PANAIT MAZILU

STATICA CONSTRUCŢIILOR

I

EDITURA DE STAT PENTRU ARHITECTURĂ ŞI CONSTRUCŢII

Prof. ing. PANAIT C. MAZILU

Recenzat 1955. Subcomisia nr. 3

6/2

STATICA CONSTRUCȚIILOR

Volumul I

SISTEME STATIC DETERMINATE

M. F. A.
BIBLIOTECA
21314/22 - 32 h.
h. h. 03885

EDITURA DE STAT PENTRU
ARHITECTURĂ ȘI CONSTRUCȚII
1955

PREFAȚĂ

Dezvoltarea artei construcțiilor pune în fața inginerilor probleme din ce în ce mai complicate, a căror rezolvare întîmpină în unele cazuri dificultăți din punctul de vedere al calculului; în același timp, în lupta pentru realizarea de economii prin proiectare un rol deosebit de important revine dimensionării raționale a elementelor de construcție pe baza determinării juste a eforturilor de calcul.

Lucrări de construcții importante au existat în toate perioadele istoriei, însă în trecut constructorii s-au bazat pe experiențele anterioare și numai pe unele considerații teoretice vagi, fără să aibă la dispoziție o știință despre calculul construcțiilor.

Știința care se ocupă cu calculul rezistenței și al stabilității construcțiilor — Mecanica Construcțiilor — este în prezent diferențiată în o serie de discipline: Statica Construcțiilor, Dinamica Construcțiilor, Stabilitatea Construcțiilor, Rezistența Materialelor, Teoria Elasticității, Teoria Plasticității, dar în perioada inițială a dezvoltării sale nu a fost o știință independentă, ci se confunda cu Mecanica Teoretică.

Abia în prima jumătate a secolului XIX, diferite ramuri ale Mecanicii Construcțiilor au început să se dezvolte ca discipline independente de Mecanică, în special în legătură cu construcțiile de poduri metalice pentru căi ferate.

Avîntul luat de industrie în secolul XIX a avut ca urmare o largă dezvoltare a lucrărilor de construcții metalice și apariția unui nou material: betonul armat.

Se poate spune că stadiul actual atît de dezvoltat al metodelor de calcul în proiectare se datorește utilizării acestor două materiale: oțelul și betonul. Acestea au permis realizarea celor mai variate construcții metalice și de beton armat. Lemnul și zidăria, deși sînt folosite în construcții de mii de ani, totuși, metodele lor de calcul ca și procedeele de execuție cu aceste materiale sînt rămase cu mult în urmă.

*

Din punct de vedere istoric, după ce Leonardo Da Vinci (1452—1519) a expus cîteva idei juste dar care s-au pierdut în manuscris și n-au avut nici o influență asupra dezvoltării ulterioare a științei, vestitul fizician, matematician și astronom Galileo Galilei (1564—1642) a inițiat primele studii teoretice și experimentale privitoare la rezistența grinzilor. Apoi, Robert Hooke (1635—1703) a formulat legea proporționalității între efort și deformație, J. Bernoulli (1654—1705) a stabilit ecuația după care se îndoaie o grindă încovoiată, Coulomb (1736—1806) s-a ocupat de torsiunea grinzilor, de încovoiere, de împingerile bolților, de probleme de rezistență în mase pulverulente pe baza frecării etc.

M. V. Lomonosov (1711—1765), pe lîngă descoperirile sale în diferite ramuri ale științei, s-a ocupat și cu probleme de rezistență a materialelor. I. P. Kulibin (1733—1818) a întocmit proiectul unui pod de lemn în arc de 300 m deschidere peste rîul Neva și a executat modelul acestuia la scara 1 : 10.

L. Euler (1707—1783), președinte al Academiei din Berlin, membru al Academiei Ruse și profesor la Petersburg, a studiat flambajul elastic și a dat o dezvoltare analitică metodelor de calcul. J. L. Lagrange (1736—1813), creatorul mecanicii analitice, a dat o formulare definitivă principiului deplasărilor virtuale, care este folosit foarte mult în problemele staticii construcțiilor.

Teoria elasticității s-a dezvoltat datorită studiilor cunoscuților cercetători : L. Navier (1785—1836), A. L. Cauchy (1789—1857), G. Lamé (1795—1875), Barré de Saint Vénant (1797—1886) etc.

Statica grafică își are originea în lucrările lui K. Culmann (1821—1881), Emil Winkler (1835—1888), L. Cremona (1830—1890), iar J. C. Maxwell (1831—1879) și C. O. Mohr (1835—1918) au stabilit metode grafo-analitice în statica sistemelor elastice.

D. I. Juravski (1821—1891) a stabilit legea distribuției eforturilor tangențiale în grinzile încovoiate și are o serie de soluționări privitoare la eforturile în grinzile cu zăbrele ; H. S. Golovin (1844—1904) a propus calculul arcelor prin metode elastice în 1882 și a aplicat principiul lucrului mecanic virtual în statica construcțiilor ; N. A. Belelubski (1845—1922) a fost unul dintre cei mai mari ingineri ruși constructori de poduri metalice și un eminent educator de cadre inginerești în Rusia. F. S. Iasinski (1856—1899) are studii deosebit de valoroase privitoare la stabilitate, V. L. Kirpicev (1845—1913) are descoperiri importante în stabilirea legii similitudinii elastice și a fost profesorul renumit al cîtorva generații de ingineri ruși ; V. G. Suhov (1853—1939) are lucrări importante privitoare la grinzile cu zăbrele în plan și în spațiu ; L. D. Proskureakov (1856—1926) s-a ocupat în special cu elaborarea teoriei calculului grinzilor cu zăbrele compuse.

S. Timosenko are studii și lucrări valoroase în toate ramurile Mecanicii Construcțiilor, dar în special în domeniul Stabilității elastice.

După victoria Marii Revoluții Socialiste din Octombrie, știința sovietică a obținut posibilități nelimitate pentru dezvoltarea sa. Savanții sovietici au făcut studii importante în domeniul calculului barelor cu pereți subțiri, al dinamicii și stabilității construcțiilor, în teoria plasticității, în calculul după teoria stărilor limită.

În domeniul calculului sistemelor static nedeterminate complexe au lucrări importante : I. P. Prokofiev, A. A. Gvozdev, I. M. Rabinovici, P. L. Pasternak, N. I. Bezuhov. Problemele de stabilitate și calculul construcțiilor la sarcini dinamice au progresat mult datorită lucrărilor savanților sovietici : A. M. Dinnik, K. S. Zavriev, S. A. Bernstein, N. M. Beliaev, N. I. Bezuhov, M. V. Kornouhov, A. F. Smirnov, N. K. Snitko etc. În calculul barelor cu pereți subțiri cu contur închis și, în general, al sistemelor spațiale, rezultate valoroase a obținut A. A. Umanski, iar V. Z. Vlasov a creat teoria calculului barelor cu pereți subțiri cu profil deschis, din punctul de vedere al rezistenței, al stabilității și al vibrațiilor.

Lucrări deosebit de importante în teoria elasticității și a plasticității au fost publicate de B. G. Galerkin, N. I. Mushelisvili, A. A. Iliușin, V. V. Sokolovski.

Calculul după teoria stărilor limită a luat în U.R.S.S. o amplă dezvoltare. Metoda de calcul la rupere pentru betonul armat, elaborată de cercetătorii : A. F. Loleit, A. A. Gvozdev, I. V. Stolearov, V. I. Murașov, P. L. Pasternak,

Recenzat 1955. Subcomisia nr. 2

V. A. Bușkov, care în 1938 a înlocuit în mod oficial vechea metodă a rezistențelor admisibile, a fost punctul de plecare pe drumul creării unor metode avansate pentru toate materialele, care să permită determinarea mai corectă a capacității portante și a gradului de siguranță al elementelor de construcții, în vederea obținerii de economii în construcții.

Dintre inginerii constructori romîni, care au avut un rol deosebit în dezvoltarea artei construcțiilor, se remarcă:

Anghel Saligny (1854—1925) — prin realizările sale tehnice excepțional de importante în construcții de căi ferate, poduri metalice, silozuri de beton armat, lucrări portuare etc. Cea mai importantă realizare a sa este podul peste Dunăre, la Cernavodă. După ce, în 1883 și 1886, s-au ținut două concursuri internaționale nereușite pentru întocmirea proiectului podului, în 1887 Anghel Saligny a primit însărcinarea elaborării proiectului pentru calea ferată Feteşti-Cernavodă cu podurile corespunzătoare. Lucrarea a fost dată în exploatare în 1895 și cuprinde poduri metalice în lungime de peste 4 km. Podul peste Dunăre, la Cernavodă, cu deschiderea centrală de 190 m, a fost, la vremea sa, cel mai mare pod din Europa continentală, și al treilea din lume.

În această lucrare Saligny a demonstrat avantajele mari ale grinzilor cu console și articulații, atît ca schemă statică de calcul, cît și ca posibilități de montaj peste fluviile mari, deși aceste sisteme de grinzi erau puțin cunoscute în acea vreme. De asemenea, el a folosit oțelul moale ca material de construcții, în locul fierului pudlat, care era folosit în construcții similare, citînd în sprijinul acestei soluții podurile de oțel construite de Belelubski în Rusia (Belelubski a vizitat chiar șantierul de la Cernavoda și a fost consultat de Saligny).

Saligny a activat și pe tărîm didactic, fiind profesor de poduri la Școala Națională de Poduri și Șosele din București între 1884 și 1914.

Elie Radu (1853—1931) a avut inițiativa primelor poduri de șosea din beton armat în țara noastră, făcînd încercări la scară mare, între care și o grindă de pod de 8 m deschidere.

Elie Radu și Anghel Saligny au introdus betonul armat în cele mai variate construcții în țara noastră. Profesor la Școala Națională de Poduri și Șosele, devenită în 1920 Școala Politehnică din București, Elie Radu își însoțea lecțiile cu exemple din marea sa experiență de constructor.

Andrei Gh. Ioachimescu (1868—1943), ca profesor de mecanică teoretică, și Ion Ionescu (1870—1946) ca profesor de poduri, au fost educatorii multor generații de ingineri constructori, cărora le-au imprimat claritate în analiza problemelor și o disciplină de lucru riguroasă.

Gheorghe Em. Filipescu (1882—1937), profesor de Statică și Rezistență la Școala Politehnică din București, s-a remarcat prin nivelul științific ridicat al cursurilor sale. Cartea sa „Statica Construcțiilor și Rezistența Materialelor", apărută în 1935, are un înalt nivel științific, cuprinzînd un material extrem de bogat într-o expunere foarte concisă, folosind exclusiv calculul vectorial. El a dat o importanță deosebită aplicării „principiului deplasărilor virtuale" în Statica Construcțiilor și a elaborat o metodă generală de sinteză a studiului sistemelor static nedeterminate, în special a cadrelor, cu ajutorul „coeficienților nedeterminați".

*

În lucrarea de față se tratează o singură ramură a Mecanicii Construcțiilor, și anume Statica Construcțiilor, al cărei material e împărțit în două volume. Primul volum tratează sistemele static determinate, iar al doilea volum, sistemele static nedeterminate.

M. F. A.
BIBLIOTECA A.L. 03885

Conținutul primului volum este împărțit în șapte capitole : în primele două capitole sînt prezentate ipotezele și metodele generale de calcul ; capitolele III, IV și V se ocupă de sistemele static determinate plane, iar capitolele VI și VII — de sistemele static determinate în spațiu.

Adresîndu-se, în primul rînd, inginerilor constructori proiectanți, lucrarea este astfel alcătuită, încît după citirea primelor două capitole, de unde se deduc orientarea și metodele generale, se poate trece direct la oricare dintre capitolele III—VII, după natura problemei ce se studiază.

Deși această formă de prezentare nu urmează o linie strict didactică, totuși chiar studenții începători vor putea depăși dificultățile de urmărire, dacă la adîncirea materialului cuprins în capitolele III—VII, vor reveni de cîte ori va fi nevoie la conținutul capitolului II.

Volumul I conține un număr mare de aplicații, cele mai multe rezolvate complet, care, deși scrise cu corp mic, completează în mare măsură expunerea teoretică, și este recomandabil pentru cititor să nu le treacă cu vederea.

Părțile din textul teoretic scrise cu corp mic pot fi însă omise la prima lectură.

Sistemele în spațiu se bucură de o dezvoltare mai largă decît în tratatele uzuale de Statica Construcțiilor, deoarece tratarea construcțiilor ca sisteme statice în spațiu poate contribui la o proiectare rațională și economică ; totuși, cele două capitole, VI și VII, neputînd acoperi toate problemele de calcul spațial, au în special rolul de a fi îndrumătoare în acest domeniu.

Întinderea mare luată de acest volum a îndemnat autorul să lase de o parte unele probleme, prea speciale, sau care nu mai sînt atît de actuale, mai ales în ce privește capitolul grinzilor cu zăbrele.

În volumul I se remarcă folosirea largă a „principiului deplasărilor virtuale", care permite rezolvări directe și intuitive pentru liniile de influență ; volumul II se bazează, de asemenea, pe „principiul lucrului mecanic virtual" aplicat însă corpurilor cu proprietăți elastice, ceea ce permite o rezolvare unitară și clară a tuturor problemelor Staticii Construcțiilor.

Ol. Vla

CAPITOLUL I

NOŢIUNI GENERALE ŞI IPOTEZE DE BAZĂ

§ 1. OBIECTUL STATICII CONSTRUCŢIILOR

Grupul de discipline care se ocupă cu studiul construcţiilor din punctul de vedere al rezistenţei, al deformării şi al stabilităţii, alcătuieşte *Mecanica Construcţiilor*.

Din „Mecanica Construcţiilor" fac parte : Statica şi Dinamica Construcţiilor, Rezistenţa Materialelor, Stabilitatea Construcţiilor, Teoria Elasticităţii şi a Plasticităţii, Mecanica Pămînturilor.

Orice construcţie supusă acţiunii forţelor exterioare ca şi acţiunilor de altă natură (efectul variaţiei de temperatură, al contracţiei, al deplasărilor de reazeme etc.) trebuie să fie *stabilă şi să nu se rupă*.

Totodată, materialele din care sînt alcătuite construcţiile fiind deformabile, este nevoie ca aceste deformări să rămînă în limite care să asigure exploatarea în bune condiţii.

Uneori exploatarea în bune condiţii necesită asigurarea construcţiilor împotriva fisurării.

Mecanica Construcţiilor nu se limitează numai la a studia rezistenţa, stabilitatea, deformarea şi, eventual, fisurarea construcţiilor ; ea studiază aceste elemente în scopul de a găsi formele şi dimensiunile cele mai raţionale şi mai economice pentru o construcţie, în funcţie de destinaţia ei şi de materialele din care este executată.

În raport cu aceste obiective generale şi urmărind realizarea lor, Statica Construcţiilor se ocupă cu studiul metodelor de calcul pentru determinarea eforturilor şi a deformărilor în anumite sisteme de construcţii. Precizarea sistemelor de construcţii pentru care se dezvoltă metodele de calcul din această lucrare apare la sfîrşitul § 4.

Deşi Statica Construcţiilor nu se ocupă în mod direct cu dimensionarea elementelor de construcţii, — aceasta aparţine Rezistenţei Materialelor — totuşi, calculele sale pregătesc o mare parte dintre elementele necesare dimensionării şi, în consecinţă, constituie o indicaţie preţioasă pentru realizarea obiectivului comun al tuturor disciplinelor Mecanicii Construcţiilor : construcţii raţionale şi economice.

§ 2. CLASIFICAREA ELEMENTELOR DE CONSTRUCŢII ŞI NOŢIUNEA DE SCHEMĂ DE CALCUL

Corpurile din care se alcătuiesc construcţiile se pot împărţi, după raportul dintre dimensiuni şi în vederea aplicării metodelor de calcul ale Mecanicii Construcţiilor, în următoarele categorii :

Bare, adică acele corpuri la care una dintre dimensiuni este mare în raport cu celelalte două (fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*).

Cînd barele sînt foarte subțiri, astfel încît au o rigiditate transversală neglijabilă, se numesc *fire* (fig. 1, *f*).

Elementele caracteristice ale unei bare sînt : pe de o parte, axa ei, iar pe de altă parte, forma și dimensiunile secțiunii transversale. Axa este, de obicei, perpendiculară pe secțiune, în centrul său de greutate. La fire interesează numai axa și mărimea secțiunii transversale, forma secțiunii neavînd consecințe în calcule.

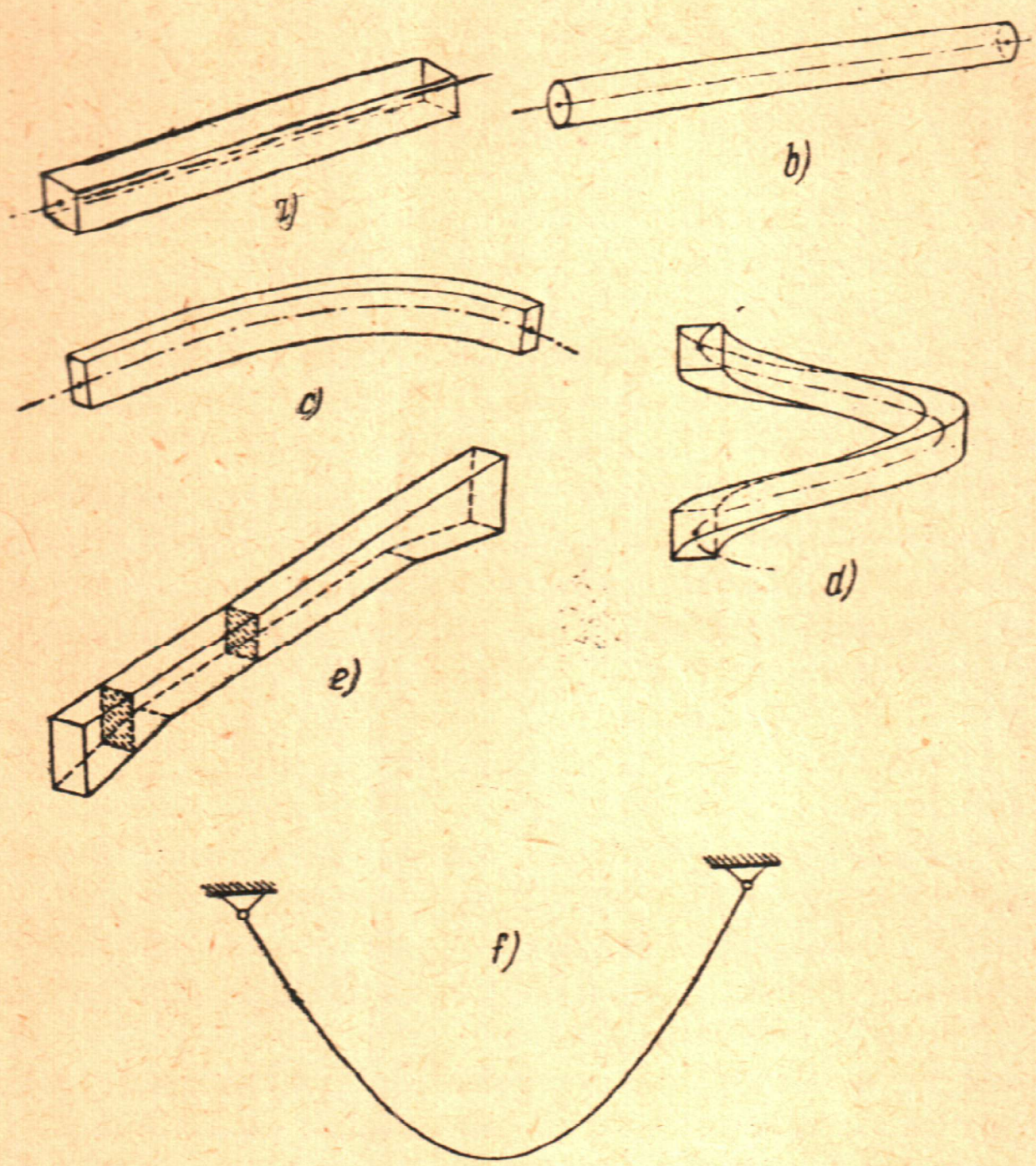


Fig. 1.

După forma axei, barele pot fi : *bare drepte* (fig. 1, *a*, *b*), *bare curbe plane* (fig. 1, *c*), sau *bare curbe în spațiu* (fig. 1, *d*). Secțiunile transversale ale barei pot fi dreptunghiulare, circulare sau în formă de L, I,] etc. Secțiunea transversală poate fi constantă de-a lungul axei și în acest caz barele sînt cu secțiune constantă (fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*), sau poate varia de-alungul axei și atunci barele sînt cu secțiune variabilă (fig. 1, *e*).

Plăci, adică acele corpuri la care două dimensiuni sînt mari în raport cu a treia (fig. 2).

Suprafața care cuprinde mijloacele grosimilor în toate punctele se numește *suprafața mediană* a plăcii. Grosimea plăcii se măsoară normal pe suprafața mediană. Plăcile pot avea grosime constantă sau variabilă. După forma suprafeței mediane, plăcile pot fi : plăci plane, numite și dale (fig. 2, *a*), plăci cu simplă curbură (fig. 2, *b*), sau plăci cu dublă curbură (fig. 2, *c*).

Cînd placa este atît de subțire, încît în calcul se poate neglija rigiditatea după direcția grosimii ei, se numește *membrană*. Elementele caracteristice ale unei plăci sînt : suprafața mediană și grosimea.

Blocuri sau masive, adică acele corpuri la care cele trei dimensiuni au valori apropiate, ca mărime, între ele (fig. 3).

Statica Construcțiilor se ocupă, în special, cu studiul construcțiilor alcătuite din bare. Metodele de calcul sînt mult mai bine puse la punct și mai ușor de aplicat la aceste sisteme, în raport cu metodele de calcul ale plăcilor și ale blocurilor. Uneori, calculul plăcilor intră, de asemenea, în capitole speciale din Statica Construcțiilor.

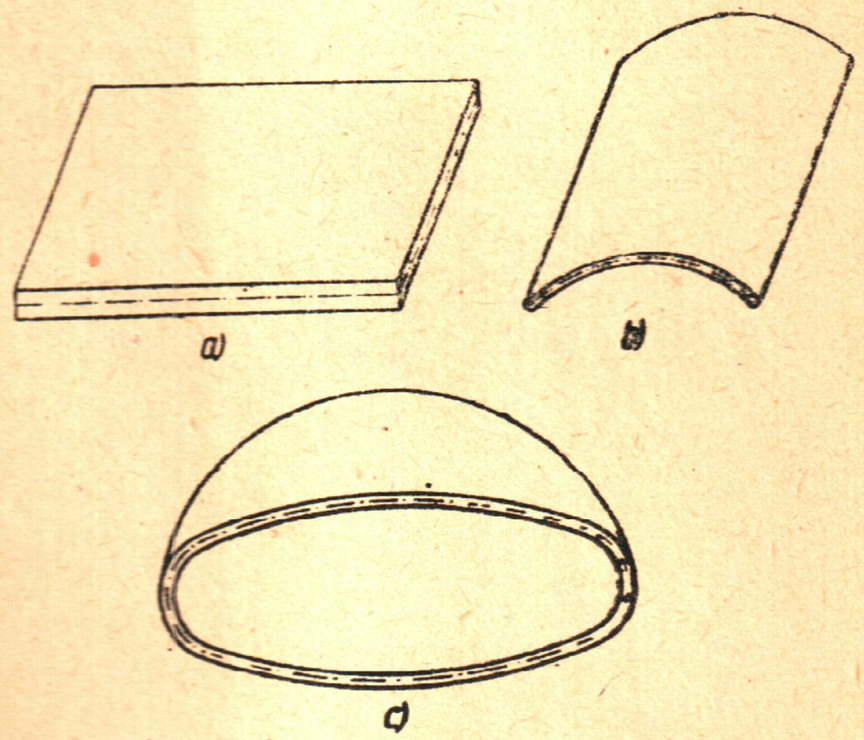


Fig. 2.

În calcule, construcțiile nu apar chiar sub forma lor materială de realizare. Pentru simplificarea calculelor și pentru a putea generaliza concluziile, apare necesitatea unei schematizări a construcțiilor reale.

În măsura în care Statica Construcțiilor se ocupă cu metodele de calcul ale sistemelor de bare, metodele de calcul ce vor fi dezvoltate se vor aplica numai construcțiilor care pot fi schematizate destul de just la un sistem de bare.

Toate construcțiile sînt construcții în spațiu și ar urma, de aici, ca schemele de calcul la care sînt reduse să fie alcătuite din sisteme spațiale de bare.

Totuși, modul de alcătuire al construcțiilor și necesitatea simplificării calculelor oferă posibilitatea ca cele mai multe dintre problemele de construcții să fie reduse la probleme plane, cel puțin în primă aproximație.

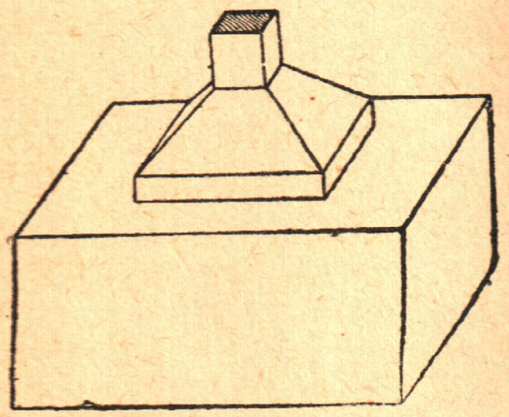


Fig. 3.

De aceea, cea mai mare parte din Statica Construcțiilor o constituie studiul problemelor în plan ; numai o serie de probleme speciale, care nu-și pot găsi soluție în plan, vor fi rezolvate în spațiu.

Un exemplu de modul cum o construcție în spațiu poate fi redusă, pentru calcule, la o serie de probleme plane, este podul reprezentat în fig. 4, *a*. Greutatea unui vagon se transmite, prin cele patru roți, la șine (fig. 4, *c*) ; șinele transmit mai departe greutatea vagonului și greutatea lor proprie la traverse, acestea—la lonjeroane, lonjeroanele—la antretoaze, antretoazele—la grinzile principale, grinzile principale — la reazeme (culei sau pile), și acestea — la pămîntul de fundație.

Schemele de calcul vor putea fi reduse în modul următor :

Pentru calculul traversei se va considera traversa ca o bară ce suportă sarcinile transmise de șine și se reazemă pe lonjeroane. Deci, este o construcție într-un plan vertical normal pe axa longitudinală a podului (fig. 4, *d*).

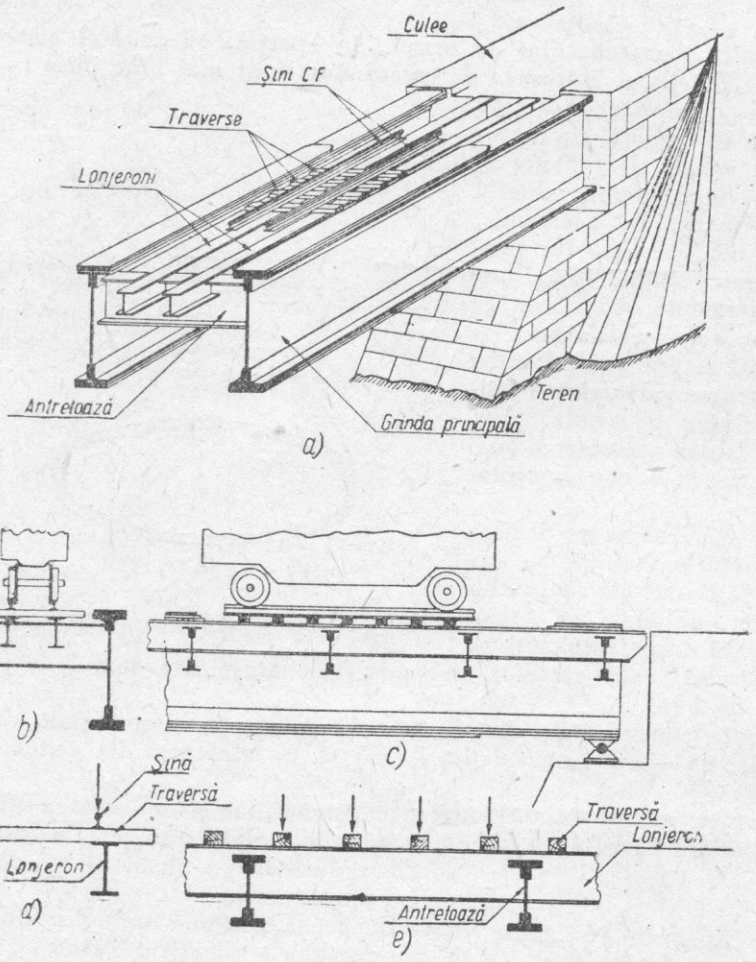


Fig. 4.

Pentru calculul lonjeronului, acesta va fi considerat ca o bară ce suportă sarcinile transmise de traverse și se reazemă pe antretoaze, deci o construcție într-un plan vertical paralel cu axa longitudinală a podului (fig. 4, *e*).

De asemenea, calculul antretoazei se va reduce la o problemă plană într-un plan vertical perpendicular pe axa podului (fig. 4 *b*), iar calculul grinzii principale se va reduce la o problemă într-un plan vertical paralel cu axa podului (fig. 4, *c*).

În cele mai multe dintre problemele Staticii Construcțiilor, schemele de bare la care se reduce construcția reală vor fi reprezentate numai prin

sistemul de axe ale barelor, față de care se vor raporta toate datele problemei.

Alte schematizări vor fi introduse referitor la modul de rezemare și de legare a barelor unele de altele și la felul cum se aplică încărcările.

Față de aceste simplificări, care trebuie efectuate pentru a reduce problemele de construcții reale la niște scheme teoretice de calcul, reprezentate printr-un sistem de axe ale unor bare cu legături schematice între ele și supuse la încărcări schematice, este foarte important modul cum se face această schematizare, astfel încît neglijările și simplificările introduse să nu aducă modificări esențiale în rezultatele calculelor, care trebuie acceptate pentru construcția reală.

Schema adoptată trebuie să aducă simplificările posibile, dar trebuie, în același timp, să nu se depărteze de baza materială a construcției.

Limitele în care este just să se aplice o schemă de calcul sînt date, pe de o parte, de studii teoretice (cum sînt efectele locale ale sarcinilor concentrate, problemele de contact etc., ce fac parte din Teoria Elasticității), care nu sînt cuprinse în această lucrare, iar pe de altă parte, de verificările experimentale, care, în ultima instanță, arată valabilitatea schemei adoptate în baza aproximațiilor admise.

§ 3. ÎNCĂRCĂRI ÎN CONSTRUCȚII

Studiul unei construcții, din punctul de vedere al Staticii Construcțiilor, înseamnă studiul eforturilor și al deformărilor ce se produc pe schema ei de calcul, sub acțiunea diferitelor încărcări.

Ansamblul de forțe și cuple care acționează asupra construcțiilor se numesc sarcini.

Sarcinile se pot clasifica după diferite criterii, iar cele mai importante, din punctul de vedere al calculelor, sînt date mai jos.

Din punctul de vedere al modului cum acționează asupra construcțiilor, sarcinile se pot împărți în [1]) :

— Sarcini fundamentale.
— Sarcini accidentale.
— Sarcini extraordinare.

Sarcini fundamentale. *Sarcinile permanente* (greutatea permanentă) acționează continuu asupra construcțiilor și provin din :

— greutatea proprie a elementelor ce se dimensionează ;
— greutatea moartă, compusă din greutatea elementelor din construcție, suportate de elementul ce se dimensionează.

Sarcinile utile (încărcări utile) cuprind sarcinile pentru care este destinată construcția : greutatea oamenilor și a animalelor, a mărfurilor, a instalațiilor și a mașinilor, a convoaielor mobile, presiunea apei, împingerea pămîntului etc.

Sarcinile accesorii care provin din :

— modul de acționare al sarcinilor utile : forța centrifugă, de tracțiune, de șerpuire etc. ;

---

[1]) Conform STAS 503-49, Încărcări în construcții, clasificarea sarcinilor.

— faptul că unele sarcini accidentale își pierd acest caracter, datorită regularității cu care intervin în anumite cazuri : efectul variației de temperatură la rezervoare pentru lichide fierbinți, forța de frînare la podurile în pantă mare, sau la intrarea în stație, etc.

Sarcini accidentale. Acestea provin din acțiuni neregulate, în general independente de voința omului, cum sînt : presiunea vîntului, încărcarea cu zăpadă, efectul variației de temperatură, forța de frînare, etc.

Sarcini extraordinare. Ele acționează întîmplător și pot avea un caracter catastrofal, provenind din : acțiunea cutremurelor, a inundațiilor, a distrugerii unor elemente de construcție, etc.

După suprafața pe care se repartizează, sarcinile pot fi :

Sarcini repartizate (sau distribuite), ce se repartizează pe o suprafață sau pe o linie.

Dacă se repartizează pe o suprafață, se măsoară în unități de forță/suprafață (t/m^2; kg/m^2 etc.), iar dacă se repartizează pe o linie, se măsoară în unități de forță/lungime (t/m, kg/m etc.).

Limita către care tinde raportul dintre valoarea sarcinii repartizate și elementul de suprafață sau de linie pe care se aplică, cînd acesta tinde

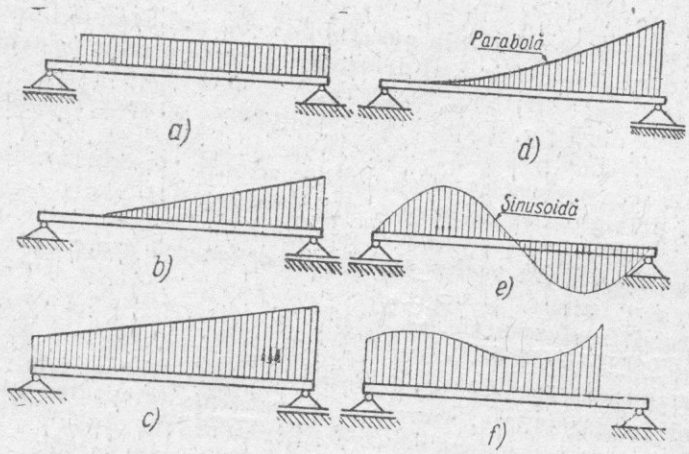


Fig. 5.

către zero, se numește intensitatea sarcinii repartizate (distribuite) în punctul considerat.

După modul cum variază intensitatea lor, sarcinile pot fi : uniform repartizate (fig. 5, *a*), repartizate triunghiular (fig. 5, *b*), trapezoidal (fig. 5, *c*), parabolic (fig. 5, *d*), sinusoidal (fig. 5, *e*), după o curbă oarecare (fig. 5, *f*).

Sarcini concentrate sînt acele sarcini la care se presupune că întreaga intensitate se aplică într-un singur punct. În construcții nu pot exista sarcini care să se aplice riguros într-un punct geometric, dar, atunci cînd

suprafața pe care se aplică este foarte mică, este mai practic pentru calcule să fie considerată redusă la un singur punct.

De exemplu, roata unui vagon transmite în mod teoretic sarcina P, la șină, prin punctul de tangență A, dar, în realitate, materialul din șină și din roată se deformează puțin în jurul acestui punct, astfel încît contactul și, deci, și transmiterea sarcinii se face pe o suprafață mică, al cărei centru de greutate este A (fig. 6).

Sarcinile concentrate se măsoară în unități de forță (t, kg, etc.).

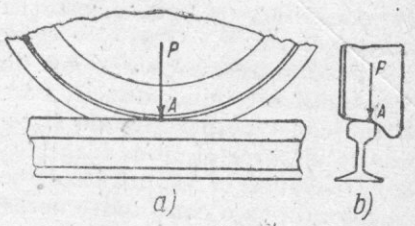


Fig. 6.

După elementul de construcție pe care se aplică sarcinile, în raport cu elementul ce se calculează, ele pot fi :

Sarcini aplicate direct, care se aplică barei ce se calculează (fig. 7, *a*).

Sarcini aplicate indirect, care nu vin direct în contact cu bara ce se calculează. De exemplu, în fig. 7, *b* sarcina concentrată P și sarcina distribuită p sînt aplicate indirect în raport cu bara principală AB.

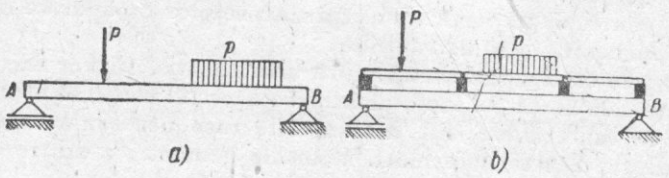


Fig. 7.

După punctele corpului în care se aplică forțele, acestea pot fi :

Forțe de suprafață, care se aplică pe suprafața corpurilor.

Forțe de volum sau de masă, care se aplică tuturor punctelor, cum sînt forțele provenite din greutatea proprie a corpului, forțele de inerție etc.

Această împărțire în forțe de suprafață și forțe de volum sau masice — care este foarte importantă pentru calculele din Teoria Elasticității —nu are urmări deosebite în statica sistemelor de bare, unde schemele de calcul sînt reduse la axele barelor.

După poziția sarcinilor în timp pe construcție, acestea se împart în :

Sarcini fixe, ale căror puncte de aplicație nu-și schimbă poziția față de construcție, cum sînt toate sarcinile permanente și unele sarcini utile (de exemplu, împingerea pămîn tului).

Sarcini mobile, ale căror puncte de aplicație se deplasează pe construcție. Această categorie cuprinde cele mai multe dintre sarcinile utile (de exemplu, convoaiele de vehicule pe un pod).

Această împărțire este deosebit de importantă în Statica Construcțiilor.

După modul cum variază intensitatea sarcinilor asupra construcțiilor, acestea pot fi :

Sarcini statice, a căror intensitate poate fi considerată independentă de timp, variind atît de încet, încît nu necesită introducerea în calcule a forțelor de inerție.

Sarcini statice sînt toate sarcinile permanente (greutatea proprie și greutatea moartă). De asemenea, pot fi considerate sarcini statice și multe dintre sarcinile utile și accesorii (greutatea mărfurilor, împingerea pămîntului etc.).

Sarcini dinamice, a căror intensitate variază în timp atît de repede, încît necesită introducerea în calcul a forțelor de inerție. Sarcini dinamice sînt unele sarcini utile și accesorii, ca : forțele produse de organele în mișcare ale mașinilor, efectul circulației cu viteză a vehiculelor pe poduri, șerpuirea, etc.

Studiul acțiunii sarcinilor dinamice în construcții este mai dificil decît al acțiunii sarcinilor statice, dar devine din ce în ce mai necesar pentru a obține construcții raționale și economice într-o serie de probleme de ordin practic al căror cîmp se lărgește mereu.

Disciplina corespunzătoare se numește *Dinamica Construcțiilor* și trebuie considerată ca o continuare necesară a Staticii Construcțiilor.

§ 4. IPOTEZE FUNDAMENTALE

Toate materialele din care sînt alcătuite construcțiile se deformează sub acțiunea forțelor ce le sînt aplicate. Din această observație elementară se pot trage concluzii importante asupra aspectelor ce apar în studiul problemelor de Mecanică a Construcțiilor.

Între forțele care acționează asupra unei construcții vor exista anumite relații. Aceste relații dintre forțe alcătuiesc *aspectul static* al problemei.

Faptul că materialele sînt deformabile face necesar studiul relațiilor geometrice dintre aceste deformări. Relațiile geometrice dintre deformările unui sistem alcătuiesc *aspectul geometric* al problemei.

Deformările sînt însă strîns legate de forțele care acționează sistemul, deci între deformări și forțe vor fi o serie de relații, a căror bază o dau anumite legi fizice stabilite pe cale experimentală.

Studiul relațiilor dintre forțe și deformări alcătuiește *aspectul fizic* al problemei.

În general, deformările sînt foarte mici în raport cu dimensiunile unei construcții în faza de exploatare și chiar dincolo de această fază, pînă aproape de rupere.

Din cauza deformărilor foarte mici, în aproape toate problemele de Statică a Construcțiilor, *aspectul static al problemelor se poate studia în starea nedeformată a corpului.* Aceasta înseamnă că *ecuațiile de echilibru static se exprimă pentru starea nedeformată a corpului.*

Cîteva exemple precizează cele de mai sus :

Grinda încastrată în capătul A și cu sarcina P în capătul B se deformează cum se arată punctat în fig. 8, *a*. Prin această deformare distanța forței P față de secțiunea de încastrare A, care era c în stare nedeformată, se micșorează puțin și devine c'. Această micșorare este foarte mică, și în calcule se ia în considerație distanța c din starea nedeformată.

Grinda $A - B$ care reazemă pe două rulouri cilindrice de rază foarte mică este încărcată cu forța P (fig. 8, *b*). Ea se deformează așa cum se arată punctat în figură, și în acest caz, reacțiunile R'_A și R'_B din reazemele simple A și B, care au direcția normalei pe planul tangent în punctele de contact

dintre grindă şi rulouri, vor avea direcţii înclinate faţă de verticală, astfel încît împreună cu forţa P să formeze un sistem de trei forţe concurente. Înclinarea capetelor A şi B ale grinzii prin deformarea dată de sarcina P este atît de mică, încît se admite că direcţiile reacţiunilor din A şi B rămîn verticale, adică aşa cum ar fi apărut dacă grinda $A - B$ ar fi fost perfect rigidă.

În fig. 8, *c*, sarcina P este suspendată prin două bare articulate AC şi BC. Datorită efortului de întindere care apare în barele AC şi BC, acestea se lungesc, şi punctul C ajunge în C'. Prin aceasta unghiul α se măreşte

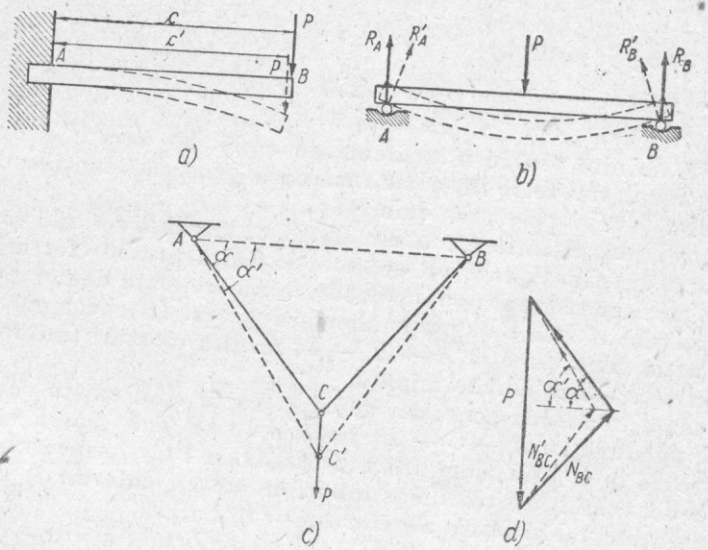


Fig. 8.

şi ajunge la valoarea $\alpha' > \alpha$. În felul acesta, valoarea eforturilor de întindere N_{BC} determinată cu unghiul α (fig. 8, *d*) se modifică în valoarea N'_{BC} care ar trebui determinată cu unghiul α'. Dacă unghiul α nu este prea apropiat de zero, nu se va ţine seamă de deplasarea punctului C în C', pentru determinarea eforturilor în barele AC şi BC, deoarece, diferenţa dintre N_{BC} şi N'_{BC} este foarte mică.

Ca şi în exemplele precedente pentru determinarea eforturilor în barele AC şi BC, nu se ţine seamă de starea deformată a sistemului, ci de starea sa nedeformată.

Din exemplele date se poate vedea în ce constă prima ipoteză de bază a Staticii Construcţiilor : *deformările corpurilor fiind foarte mici, toate ecuaţiile de echilibru static vor fi exprimate pentru starea nedeformată a corpului*, adică în ipoteza corpurilor perfect rigide, aşa cum au fost studiate în Mecanica Teoretică.

Deci, principiile Mecanicii Teoretice şi consecinţele lor, stabilite pentru corpurile perfect rigide, vor putea fi aplicate şi în Statica Construcţiilor, în baza deformărilor reale foarte mici, care pot fi neglijate în aspectul static al problemelor.

Sarcini statice sînt toate sarcinile permanente (greutatea proprie şi greutatea moartă). De asemenea, pot fi considerate sarcini statice şi multe dintre sarcinile utile şi accesorii (greutatea mărfurilor, împingerea pămîntului etc.).

Sarcini dinamice, a căror intensitate variază în timp atît de repede, încît necesită introducerea în calcul a forţelor de inerţie. Sarcini dinamice sînt unele sarcini utile şi accesorii, ca : forţele produse de organele în mişcare ale maşinilor, efectul circulaţiei cu viteză a vehiculelor pe poduri, şerpuirea, etc.

Studiul acţiunii sarcinilor dinamice în construcţii este mai dificil decît al acţiunii sarcinilor statice, dar devine din ce în ce mai necesar pentru a obţine construcţii raţionale şi economice într-o serie de probleme de ordin practic al căror cîmp se lărgeşte mereu.

Disciplina corespunzătoare se numeşte *Dinamica Construcţiilor* şi trebuie considerată ca o continuare necesară a Staticii Construcţiilor.

§ 4. IPOTEZE FUNDAMENTALE

Toate materialele din care sînt alcătuite construcţiile se deformează sub acţiunea forţelor ce le sînt aplicate. Din această observaţie elementară se pot trage concluzii importante asupra aspectelor ce apar în studiul problemelor de Mecanică a Construcţiilor.

Între forţele care acţionează asupra unei construcţii vor exista anumite relaţii. Aceste relaţii dintre forţe alcătuiesc *aspectul static* al problemei.

Faptul că materialele sînt deformabile face necesar studiul relaţiilor geometrice dintre aceste deformări. Relaţiile geometrice dintre deformările unui sistem alcătuiesc *aspectul geometric* al problemei.

Deformările sînt însă strîns legate de forţele care acţionează sistemul, deci între deformări şi forţe vor fi o serie de relaţii, a căror bază o dau anumite legi fizice stabilite pe cale experimentală.

Studiul relaţiilor dintre forţe şi deformări alcătuieşte *aspectul fizic* al problemei.

În general, deformările sînt foarte mici în raport cu dimensiunile unei construcţii în faza de exploatare şi chiar dincolo de această fază, pînă aproape de rupere.

Din cauza deformărilor foarte mici, în aproape toate problemele de Statică a Construcţiilor, *aspectul static al problemelor se poate studia în starea nedeformată a corpului.* Aceasta înseamnă că *ecuaţiile de echilibru static se exprimă pentru starea nedeformată a corpului.*

Cîteva exemple precizează cele de mai sus :

Grinda încastrată în capătul A şi cu sarcina P în capătul B se deformează cum se arată punctat în fig. 8, *a*. Prin această deformare distanţa forţei P faţă de secţiunea de încastrare A, care era c în stare nedeformată, se micşorează puţin şi devine c'. Această micşorare este foarte mică, şi în calcule se ia în consideraţie distanţa c din starea nedeformată.

Grinda $A - B$ care reazemă pe două rulouri cilindrice de rază foarte mică este încărcată cu forţa P (fig. 8, *b*). Ea se deformează aşa cum se arată punctat în figură, şi în acest caz, reacţiunile R'_A şi R'_B din reazemele simple A şi B, care au direcţia normalei pe planul tangent în punctele de contact

dintre grindă şi rulouri, vor avea direcţii înclinate faţă de verticală, astfel încît împreună cu forţa P să formeze un sistem de trei forţe concurente. Înclinarea capetelor A şi B ale grinzii prin deformarea dată de sarcina P este atît de mică, încît se admite că direcţiile reacţiunilor din A şi B rămîn verticale, adică aşa cum ar fi apărut dacă grinda $A - B$ ar fi fost perfect rigidă.

În fig. 8, *c*, sarcina P este suspendată prin două bare articulate AC şi BC. Datorită efortului de întindere care apare în barele AC şi BC, acestea se lungesc, şi punctul C ajunge în C'. Prin aceasta unghiul α se măreşte

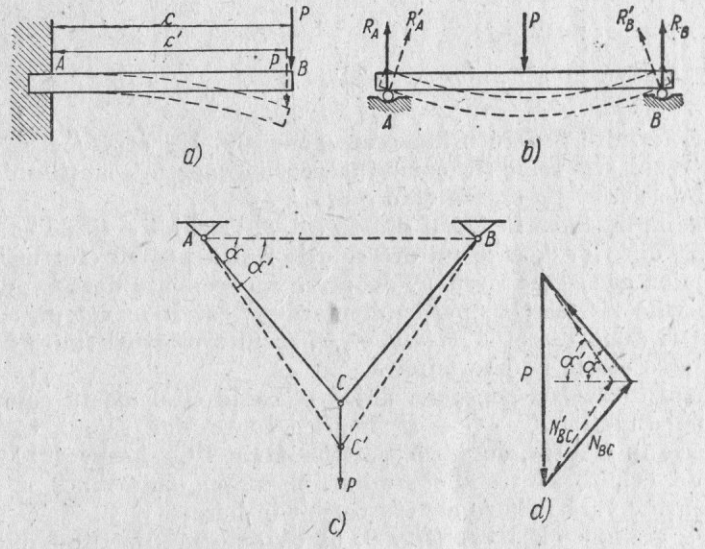


Fig. 8.

şi ajunge la valoarea $\alpha' > \alpha$. În felul acesta, valoarea eforturilor de întindere N_{BC} determinată cu unghiul α (fig. 8, *d*) se modifică în valoarea N'_{BC} care ar trebui determinată cu unghiul α'. Dacă unghiul α nu este prea apropiat de zero, nu se va ţine seamă de deplasarea punctului C în C', pentru determinarea eforturilor în barele AC şi BC, deoarece, diferenţa dintre N_{BC} şi N'_{BC} este foarte mică.

Ca şi în exemplele precedente pentru determinarea eforturilor în barele AC şi BC, nu se ţine seamă de starea deformată a sistemului, ci de starea sa nedeformată.

Din exemplele date se poate vedea în ce constă prima ipoteză de bază a Staticii Construcţiilor : *deformările corpurilor fiind foarte mici, toate ecuaţiile de echilibru static vor fi exprimate pentru starea nedeformată a corpului*, adică în ipoteza corpurilor perfect rigide, aşa cum au fost studiate în Mecanica Teoretică.

Deci, principiile Mecanicii Teoretice şi consecinţele lor, stabilite pentru corpurile perfect rigide, vor putea fi aplicate şi în Statica Construcţiilor, în baza deformărilor reale foarte mici, care pot fi neglijate în aspectul static al problemelor.

Mecanica Construcțiilor comportă însă și probleme în care studiul aspectului static în stare nedeformată nu duce la concluzii valabile, dintre care se citează :

Sistemele critice. Acestea sînt sistemele de bare la care exprimarea ecuațiilor statice de echilibru în starea nedeformată a sistemului duce la valori nedeterminate ale eforturilor pentru anumite încărcări particulare

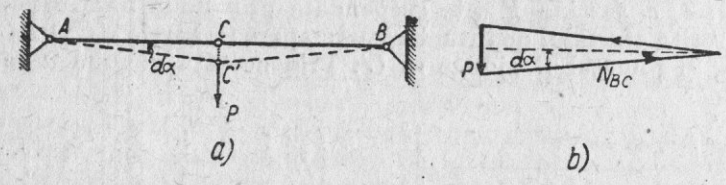


Fig. 9.

și la valori infinite pentru o încărcare generală. La aceste sisteme, pentru a obține rezultate reale în cazul încărcării generale ecuațiile de echilibru static trebue scrise pe starea deformată.

De exemplu, dacă în cazul din fig. 8, *c*, unghiul α tinde către zero, se obține cazul din fig. 9, care nu are soluție finită pentru eforturile din bare, oricît de mică ar fi greutatea P, deoarece nu se poate descompune forța P după direcțiile AC și CB, perpendiculare pe ea. În cazul particular, cînd forța P ar fi după direcția $A - C - B$, rezultă eforturi finite în bare, dar problema este static nedeterminată.

În cazul încărcării generale, adică în cazul cînd există componenta P normală pe direcția $A - C - B$, trebuie să se țină seamă că punctul C se deplasează în C' prin alungirile barelor AC și BC, și aspectul static (adică ecuațiile de echilibru) trebuie studiat în starea deformată a sistemului, pentru a obține valori finite ale eforturilor în bare.

Totuși, trebuie observat (fig. 9, *b*) că deformările fiind mici, unghiul $d\alpha$ va avea, de asemenea, o valoare mică și deci eforturile din barele AC și BC vor fi foarte mari, chiar pentru valori mici ale forței P.

Astfel de sisteme critice trebuie evitate în construcții.

Nu totdeauna însă ele apar sub o formă critică evidentă, ca în cazul din fig. 9. De aceea, în unele capitole ce vor urma, se vor da indicații pentru a fi recunoscute.

Încărcări critice. Materialele din care sînt construite barele ce formează scheletul de rezistență al unei construcții își pot pierde stabilitatea la așa-numitele încărcări critice. Exemplul cel mai simplu este flambajul unei bare drepte comprimate (fig. 10). Pentru a studia stabilitatea echilibrului unei astfel de bare, ecuațiile de echilibru static trebuie scrise în starea deformată a barei.

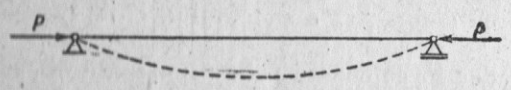


Fig. 10.

În cele ce urmează se va presupune că sistemul de încărcări nu este în apropiere de sarcinile critice și, deci, se pot exprima ecuațiile de echilibru static în stare nedeformată, chiar pentru barele comprimate.

Din această ipoteză a exprimării echilibrului în stare nedeformată nu va rezulta nici o indicație asupra stabilității echilibrului sistemului de bare tratat. Problema stabilității echilibrului va trebui cercetată separat

de calculele statice, și ea constituie disciplina numită *Stabilitatea Construcțiilor*.

Sisteme ale căror legături se modifică în timpul deformării. Dacă grinda din fig. 8, *b*, cele două rulouri pe care se reazemă grinda își mărește raza foarte mult, se ajunge la cazul din fig. 11, în care, înainte de deformare punctele teoretice de rezemare erau în punctele de tangență A și B, dar după deformare, punctele de tangență se deplasează și ajung în A' și B'. În această situație, distanța AB dintre reazeme înainte de deformare diferă sensibil de distanța $A'B'$ dintre reazeme, după deformare, iar aspectul static al problemei (adică ecuațiile de echilibru static) trebuie cercetat în starea deformată, pentru a avea rezultate suficient de exacte.

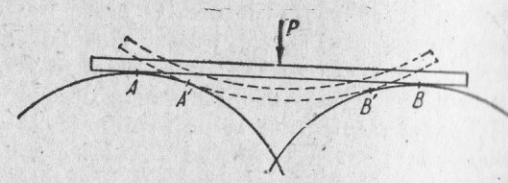


Fig. 11.

Firele. Forma de echilibru a unui fir încărcat cu sarcini transversale depinde de aceste sarcini (fig. 12, *a* și *b*). Deoarece această formă de echilibru

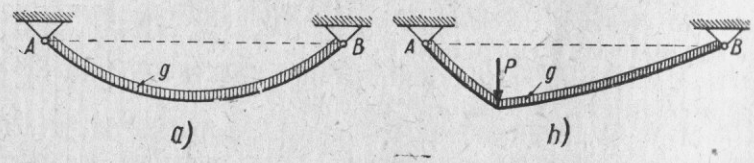


Fig. 12.

diferă foarte mult de la o încărcare la alta, nu se pot exprima condiții de echilibru pentru o formă a firului, care să fie independentă de încărcarea transversală.

Construcții cu deformări mari. La aceste construcții exprimarea relațiilor de echilibru static în stare nedeformată duce la soluții insuficient de

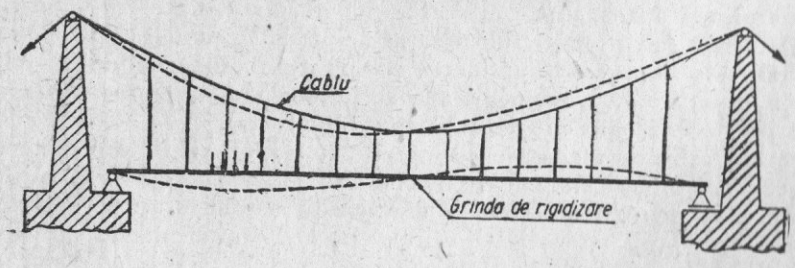


Fig. 13.

exacte și, de aceea, rezultatele trebuie corectate prin studiul relațiilor de echilibru în stare deformată. Sînt construcțiile, mai puțin curente, la care apare necesitatea unui așa-numit calcul de „ordinul 2", cum sînt, de exemplu, podurile suspendate cu grindă de rigidizare de deschidere mare (fig. 13), sau alte construcții de același ordin.

Exemplele de mai sus, deși se referă la probleme diferite, au totuși comun faptul că, în rezolvarea lor, studiul aspectului static nu se poate face în starea nedeformată a sistemului.

Lucrarea de față nu se va ocupa de aceste probleme, în care ecuațiile de echilibru static trebuie exprimate în starea deformată a corpului.

Dacă studiul problemelor de Statică a Construcțiilor s-ar putea reduce totdeauna numai la aspectul static, efectul deformărilor foarte mici, care duce la exprimarea echilibrului static în stare nedeformată, nu ar mai avea nevoie de nici o completare. O mare parte dintre probleme se vor rezuma numai la aspectul static, pentru care considerația de mai sus este suficientă. Această categorie va cuprinde întreaga problemă a determinării reacțiunilor și a eforturilor în sistemele static determinate (volumul I al lucrării).

Totuși rămîn o serie de probleme, la care studiul aspectului static este insuficient pentru a obține rezultatele necesare. Acestea sînt problemele de deformări și de determinare a reacțiunilor și a eforturilor în sistemele static nedeterminate.

Pentru aceasta trebuie să se cerceteze și aspectul geometric, și apoi, și aspectul fizic al problemei, adică va trebui să se cerceteze proprietățile materialelor din care se execută construcțiile (lemn, piatră, beton, oțel). Pentru a putea generaliza concluziile, aceste proprietăți au fost schematizate prin ipotezele cunoscute din Rezistența Materialelor, și anume :

— ipoteza că materialul este continuu, omogen și izotrop ;

— legea lui Hooke, privitoare la proporționalitatea dintre eforturi și deformări sub limita de elasticitate ;

— ipoteza că proprietățile materialului sînt invariabile în timp, și transmiterea eforturilor nu depinde de timp.

Este evident că, admițînd aceste ipoteze, calculele din Statica Construcțiilor au un oarecare convenționalism ; totuși, verificările experimentale care se pot face — cum este verificarea experimentală a deformărilor în raport cu cele calculate — arată o concordanță destul de strînsă între rezultatele calculelor și măsurători, ceea ce a dus la o mare dezvoltare a metodelor de calcul și la creșterea încrederii în valoarea calculelor, pentru a se ajunge la construcții îndrăznețe, dar, în același timp, raționale și economice.

Studiul aspectului static în starea nedeformată, datorită valorii foarte mici a deformărilor, permite folosirea principiilor Mecanicii corpurilor rigide. În special, este importantă aplicarea paragrafului din principiul al doilea al Mecanicii, referitor la „independența acțiunilor" (efectul unei forțe asupra unui corp este independent de acțiunea altor forțe).

Aceasta are drept urmare aplicarea „suprapunerii liniare a efectelor", pentru cazurile în care elementele date de Mecanica Teoretică sînt suficiente, cum este cazul pentru reacțiuni și eforturi la sistemele static determinate.

Admiterea proporționalității dintre eforturi și deformări, în cazul deformărilor foarte mici, face posibilă suprapunerea liniară a efectelor pentru deformările elastice și pentru eforturi, la sistemele static nedeterminate.

În concluzie, rezultatele experimentale, care îngăduie aplicarea celor două premise fundamentale de calcul : exprimarea ecuațiilor de echilibru static în stare nedeformată, datorită deformărilor foarte mici, și proporționalitatea dintre eforturi și deformări conduc la relații liniare între încărcări, eforturi și deformări, ceeace face posibilă utilizarea principiului „independenței acțiunilor" sau al „suprapunerii efectelor", atît pentru eforturi, cît și pentru deformări.

Totodată, rezultă clar că excepțiile amintite (sistemele critice, încărcările critice, construcțiile cu deformări mari) nu pot fi tratate în cadrul *Staticii liniare*, deoarece, deși satisfac una dintre condiții — proporționalitatea dintre eforturi și deformări — nu o satisfac pe cealaltă — exprimarea ecuațiilor de echilibru static în stare nedeformată.

Deși rezultatele calculelor din „Statica liniară" sînt destul de exact confirmate de încercările experimentale pentru solicitarea materialelor sub limita de proporționalitate, totuși, una dintre problemele cele mai importante în tehnică nu este suficient clarificată de acest stadiu de calcul. Aceasta este problema coeficientului de siguranță al unei construcții, în special al unei construcții static nedeterminate.

Prin coeficientul de siguranță se înțelege raportul dintre încărcarea care face să se ajungă la starea limită a unei construcții și încărcarea admisă în exploatare.

În funcție de destinația construcției și de materialele din care se execută, starea limită este starea în care aceasta încetează de a mai fi aptă pentru exploatare, datorită uneia din următoarele cauze : rupere, pierderea stabilității, curgere, apariția primelor fisuri, etc.

Determinarea coeficientului real de siguranță necesită studiul comportării materialelor dincolo de limita de proporționalitate și elasticitate, ceea ce duce la o altă concepție de calcul pentru construcții : *Calculul sistemelor după teoria stărilor limită.*

Datorită lucrărilor savanților sovietici, calculul în stadiul limită a luat o mare dezvoltare, în special privitor la dimensionarea secțiunilor.

Calculul sistemelor static nedeterminate după teoria stărilor limită nu este pînă în prezent la fel de dezvoltat ca cel privitor la dimensionarea secțiunilor, dar și în acest domeniu savanții sovietici au obținut rezultate remarcabile, care vor fi prezentate într-un capitol special al volumului II.

În calculul sistemelor static nedeterminate după teoria stărilor limită, chiar atunci cînd vor fi luate în considerație numai deformări foarte mici, astfel încît să fie admisă exprimarea relațiilor statice pe starea nedeformată a corpurilor, nu se va putea face uz de independența acțiunilor (suprapunerea efectelor), deoarece solicitările depășind limita de proporționalitate, legea lui Hooke nu e aplicabilă.

§ 5. ECHILIBRU STATIC ȘI ECHILIBRU ELASTIC

Sub acțiunea încărcărilor exterioare și a forțelor de legătură cu alte sisteme, construcția, în întregime, cum și orice parte a ei, trebuie să fie în echilibru.

Exprimarea condițiilor de echilibru din Mecanica Teoretică a corpurilor rigide duce la noțiunea de *echilibru static.*

Datorită însă acțiunii sarcinilor și forțelor de legătură exterioare (reacțiuni) care alcătuiesc un sistem de forțe în echilibru, în interiorul corpului, între diferitele părți ale lui, apar forțe de legătură interioare (eforturi).

Eforturile provoacă deformarea elastică a corpului, astfel încît sub acțiunea încărcărilor construcția se află în echilibru sub o formă deformată.

Starea reală de echilibru în care se găsește corpul deformat elastic duce la noțiunea de *echilibru elastic.*

Deci, noţiunea de echilibru static implică numai studiul aspectului static al sistemului, pe cînd noţiunea de echilibru elastic implică studiul tuturor celor trei aspecte : static, geometric şi fizic.

Unele probleme ale Staticii Construcţiilor necesită numai noţiunea de echilibru static, pe cînd altele necesită şi pe cea de echilibru elastic.

Astfel, din punctul de vedere al Mecanicii corpurilor rigide, sistemele se împart în sisteme static determinate şi sisteme static nedeterminate.

Sistemele static determinate sînt acelea în care, pentru un sistem de sarcini dat, ecuaţiile de echilibru static sînt suficiente pentru determinarea forţelor de legătură exterioare (reacţiuni) şi a forţelor de legătură interioare (eforturi). Pentru aceste probleme noţiunea de echilibru static este suficientă.

Sistemele static nedeterminate sînt acelea în care, pentru determinarea reacţiunilor şi a eforturilor, pe lîngă ecuaţiile de echilibru static, care sînt în număr insuficient, trebuie folosite şi condiţii suplimentare de deformări. La acestea apare, deci, şi necesitatea noţiunii de echilibru elastic.

De asemenea, chiar la sistemele static determinate, cercetarea deformărilor lor nu se poate face numai prin noţiunea de echilibru static.

Cu alte cuvinte, aceasta înseamnă că reacţiunile şi eforturile la sistemele static determinate se obţin numai din cercetarea aspectului static, pe cînd deformările acestor sisteme şi eforturile în sistemele static nedeterminate se obţin din cercetarea ansamblului de aspecte : static, geometric şi fizic.

Ca o observaţie generală se menţionează că, deşi în mod curent se vorbeşte de condiţiile de echilibru ale unui sistem, se subînţelege totdeauna că aceste condiţii de echilibru se aplică forţelor care acţionează asupra sistemului. De asemenea, deşi de obicei se vorbeşte de sisteme de construcţie static determinate şi nedeterminate, riguros ar trebui să se înţeleagă că este vorba de sisteme de forţe static determinate sau static nedeterminate, care acţionează o construcţie.

§ 6. REAZEME ŞI REACŢIUNI

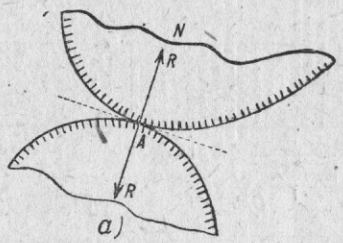
O construcţie nu apare izolată în spaţiu, ci este legată de alte construcţii sau de teren, prin anumite legături. Dacă se presupune că se izolează construcţia, în locul fiecărei legături suprimate trebuie introduse forţele de legătură corespunzătoare, astfel încît forţele date şi forţele de legătură introduse să formeze un sistem de forţe în echilibru.

Legăturile exterioare ale unei construcţii se numesc reazeme, iar forţele de legătură corespunzătoare, reacţiuni.

Reazemele obişnuite sînt următoarele :

Reazemul simplu este definit de două corpuri care se sprijină unul pe altul într-un singur punct (fig. 14, *a*), astfel încît este posibilă orice alunecare a unuia faţă de altul, în planul tangent comun şi orice rotire în jurul oricărei drepte ce trece prin punctul comun, singura deplasare împiedicată fiind după normala comună în punctul de contact. Reacţiunea într-un reazem simplu are punctul de aplicaţie cunoscut (punctul de contact A) şi direcţia cunoscută — direcţia normalei comune AN, dar mărimea ei constituie o necunoscută. Fig. 14, *b* şi *c* reprezintă două moduri practice de realizare a reazemului simplu.

Articulaţia este definită de două corpuri care se sprijină unul pe altul într-un singur punct, astfel încît orice deplasare de translaţie a unuia faţă de altul este împiedicată, fiind însă posibilă orice rotire a unuia faţă de altul în jurul oricărei axe care trece prin punctul de contact A (fig. 15, *a*). Reacţiunea are deci punctul de aplicaţie determinat, punctul de contact A, dar direcţia şi mărimea ei sînt necunoscute. Fig. 15, *b* arată un mod de realizare practică a unei articulaţii în plan.



Încastrarea este definită de două corpuri care se sprijină astfel, încît nici o deplasare şi nici o rotaţie a unui corp faţă de celălalt nu este posibilă (fig. 16). În acest caz, în plan, forţa de legătură corespunzătoare R are ca necunoscute mărimea, direcţia şi poziţia în raport cu centrul de greutate A al secţiunii de încastrare.

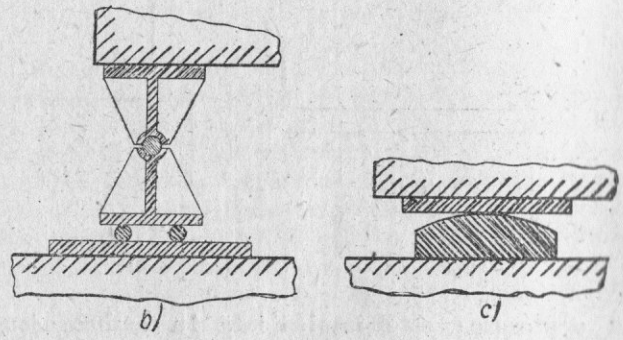


Fig. 14.

Aceste rezemări teoretice constituie nişte schematizări ale legăturilor corpurilor reale, deoarece pe de o parte s-a neglijat influenţa forţelor de frecare, iar pe de alta, legăturile reale nu se fac prin puncte teoretice, ci prin suprafeţe, care uneori au o mărime apreciabilă şi necesită o examinare atentă pentru a decide în ce caz teoretic pot fi încadrate.

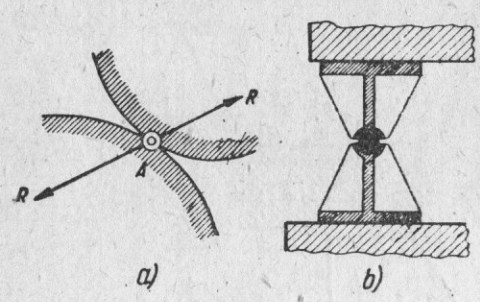


Fig. 15.

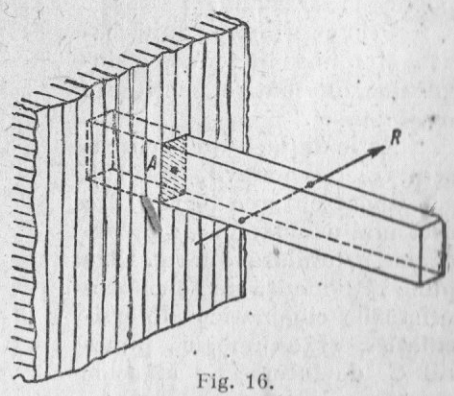


Fig. 16.

În Statica Construcţiilor reazemele se reprezintă schematizat în felul următor, în problemele plane :

Reazemul simplu, numit şi reazem mobil (la poduri) (fig. 17). Reprezentarea din fig. 17, *a* şi *b* este mai obişnuită, dar reprezentarea prin pendul

din fig. 17, *c* este mai sugestivă, deoarece exprimă intuitiv caracteristicile statice și cinematice.

Poziția și direcția pendulului arată punctul de aplicație și direcția reacțiunii, iar libertatea de rotire a pendulului față de punctul *A* arată posibilitatea celor două corpuri hașurate de a se deplasa și a se roti unul față de altul, sau, ceea ce este tot una, posibilitatea celor două corpuri de a se roti unul față de altul în jurul oricărui punct de pe direcția pendulului.

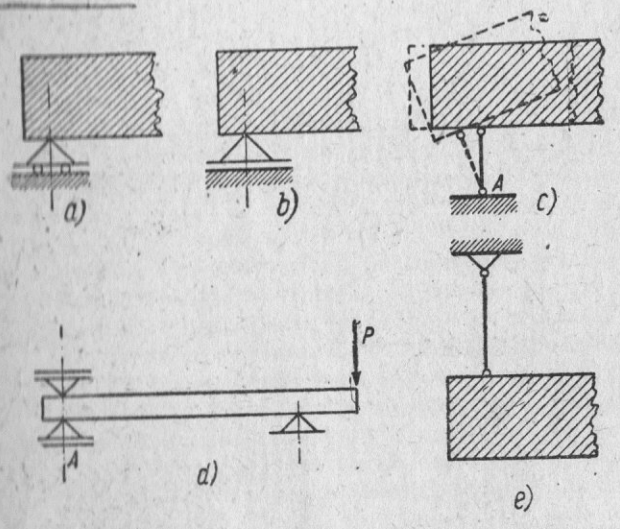


Fig. 17.

Reazemele simple pot fi unilaterale sau bilaterale, în sensul că deplasarea după direcția normalei comune (direcția pendulului) poate fi împiedicată într-un singur sens sau în ambele sensuri. Afară de cazul cînd se va face mențiune specială, se va înțelege că deplasarea este împiedicată în ambele sensuri, ca în fig. 17, *d*, în punctul *A*, indiferent de modul de reprezentare.

Tot în categoria reazemului simplu intră și legăturile prin fire (fig. 17, *e*), reacțiunea avînd direcția firului. Legătura prin fire trebuie considerată unilaterală, firul neputînd suporta compresiuni.

Prin suprimarea unui reazem simplu se introduce o singură necunoscută a reacțiunii : mărimea ei.

Articulația, numită și reazem fix (la poduri), (fig. 18).

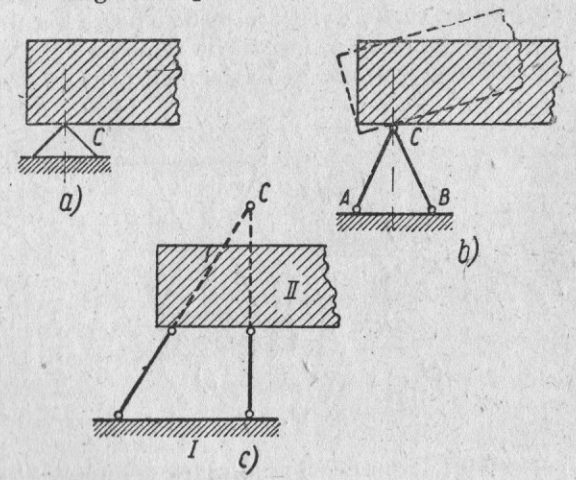


Fig. 18.

Reprezentarea din fig. 18, *a* este mai uzuală, dar reprezentarea pendulară din fig. 18, *b* pune în evidență mai clar proprietățile cinematice ale articulației, și anume, că punctul *C* de intersecție al celor două pendule este punctul pe unde trece reacțiunea și că cele două corpuri se pot roti unul față de altul numai în raport cu punctul *C*. Pendulele permit și o reprezentare mai teoretică a articulației într-un punct care nu se găsește între cele două corpuri. De exemplu, în cazul din fig. 18, *c*, corpurile *I* și *II* se pot considera articulate între ele în punctul *C*. Deci, ele se pot roti între ele, în raport cu punctul *C*, iar reacțiunea va trece prin același punct *C*.

Prin suprimarea unei articulații se introduc două necunoscute ale reacțiunii : mărimea și direcția. Aceste două elemente simple se pot reprezenta fie prin mărimea *R* și unghiul α pe care îl face *R* cu o direcție fixă (fig. 19, *a*), fie prin componentele R_1 și R_2, după două direcții alese arbitrar (fig. 19, *b*).

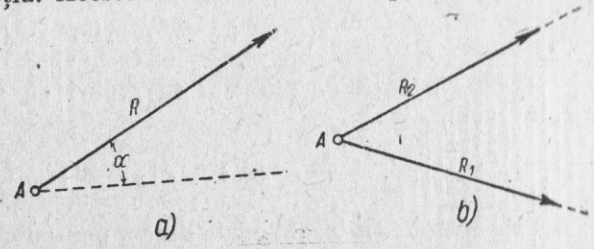


Fig. 19.

Încastrarea se reprezintă ca în fig. 20, *a*, sau ca în fig. 20, *b*, prin trei pendule neconcurente. Din ambele reprezentări rezultă că încastrarea nu permite nici o deplasare și nici o rotire.

Prin suprimarea unei încastrări se introduc trei necunoscute ale reacțiunii : mărimea, direcția și poziția, care pot fi reprezentate prin trei elemente simple : mărimea — prin *R*, direcția — prin unghiul α cu o direcție fixă, și poziția — prin distanța *d* de la punctul de încastrare (fig. 20, *a*). Mai convenabil este să se aleagă aceste trei necunoscute (fig. 20, *c*) prin componentele reacțiunii pe două direcții alese arbitrar R_1 și R_2 (care pot determina *mărimea* și *direcția* reacțiunii *R*) și prin momentul reacțiunii în raport cu punctul teoretic de încastrare *A* (care poate determina *poziția* reacțiunii *R*).

De obicei, elementele încastrării care intervin direct în calcule sînt momentul de încastrare și componentele reacțiunii după două direcții (fig. 20, *c*).

Determinarea necunoscutelor din reazeme, la sistemele static determinate, se face cu ajutorul ecuațiilor de echilibru din Mecanica Teoretică.

Se presupune că se izolează construcția prin suprimarea legăturilor și prin introducerea forțelor de legătură (reacțiunilor).

În felul acesta, construcția devine un corp liber, supus la forțele date și la forțele de legătură, căruia i se pot aplica ecuațiile de echilibru static.

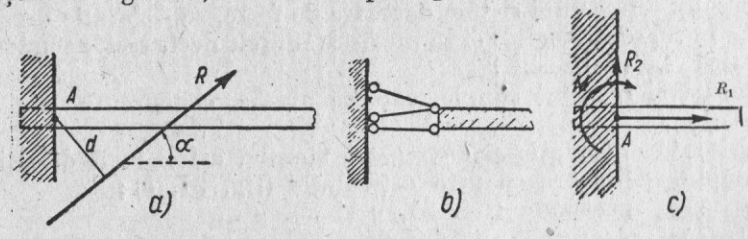


Fig. 20.

Pentru un sistem de forțe oarecare în plan, Mecanica Teoretică pune la dispoziție trei condiții de echilibru, care se pot exprima analitic sub diferite forme :

a) Două ecuații de proiecții și una de momente :

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad M = 0.$$

b) O ecuație de proiecții și două ecuații de momente în raport cu două ncte A și B alese astfel încît dreapta AB să nu fie perpendiculară pe ecția pe care se face proiecția :

$$X = 0; \quad M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

c) Trei ecuații de moment în raport cu trei puncte A, B, C, care să fie coliniare :

$$M_A = 0; \quad M_B = 0; \quad M_C = 0.$$

Prin urmare, în problemele plane, pentru ca reacțiunile unei construcții constituie un singur solid (sau, cum se mai numește, un sistem geometric

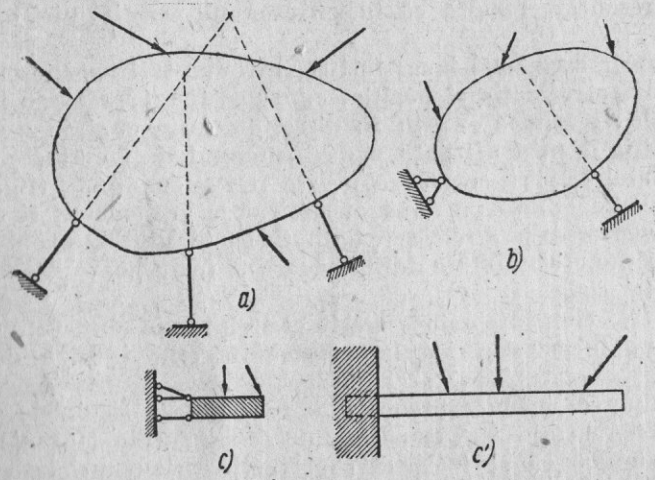


Fig. 21.

deformabil), supus unui sistem oarecare de forțe, să fie static determinate, buie ca în toate reazemele ei să nu fie mai mult decît trei necunoscute.

Aceasta se realizează :

1) prin trei reazeme simple, care să nu fie concurente sau paralele g. 21, *a*) ;

2) printr-o articulație și un reazem simplu, astfel încît direcția reazelui simplu să nu treacă prin articulație (fig. 21, *b*) ;

3) printr-o încastrare (fig. 21, *c* și *c'*).

Pentru ca reacțiunile unei construcții, — ce constituie o problemă ană, alcătuită dintr-un sistem de C corpuri legate între ele, supusă la sistem de forțe oarecare — să fie static determinate, în toate reazemele exterioare echivalente cu r reazeme simple și în toate cele S legături simple ntre solide trebuie să apară un număr de $3C$ necunoscute, deoarece, prin pararea corpurilor ce alcătuiesc sistemul se pot scrie cîte trei ecuații de hilibru pentru fiecare în parte. Rezultă relația necesară :

$$3C = r + S. \qquad (1.1)$$

De exemplu, sistemul din fig. 22, *a*, deși are patru necunoscute în reazemele exterioare A și B care sînt articulații, este totuși static determinat, deoarece este alcătuit din patru solide (I, II, III, IV) articulate între ele în punctele C, D, E, G ; dacă se izolează fiecare în parte, apar în total $6 \times 2 = 12$ necunoscute (cîte două de fiecare articulație) și tot atîtea ecuații $4 \times 3 = 12$ (cîte trei ecuații pentru fiecare solid) (fig. 22, *b*), adică : $C = 4$; $r = 2 \cdot 2 = 4$; $S = 2 \cdot 4 = 8$, care satisfac relația (1,1).

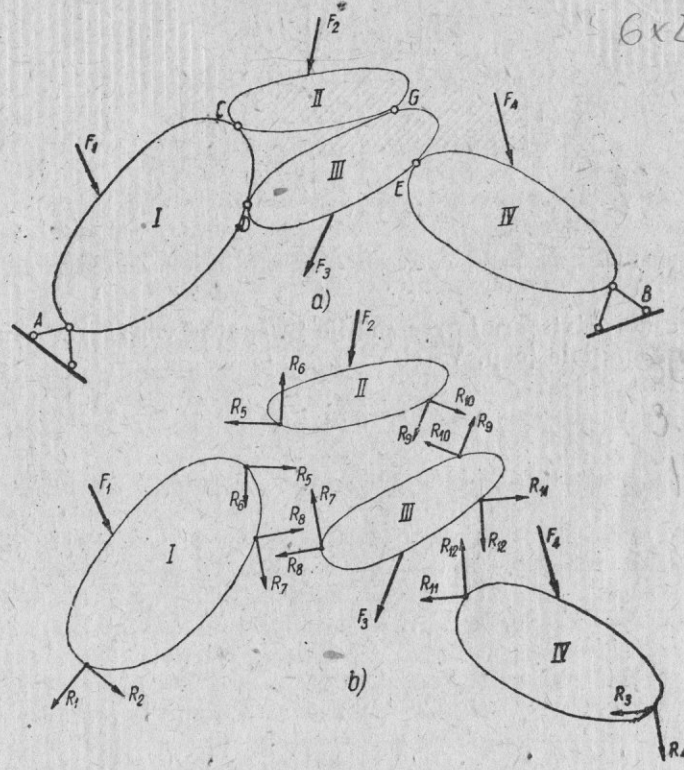


Fig. 22.

La desfacerea unei legături între două solide, dacă pe unul dintre ele s-a introdus sistemul de forțe de legătură corespunzătoare legăturii suprimate, pe celălalt se introduc forțele de aceeași direcție și mărime, dar de sensuri contrare, conform principiului acțiunii și reacțiunii (principiul al treilea al Mecanicii).

Observații.

1. Uneori se pot introduce și legături care constituie variante față de cele trei legături de bază (reazem simplu, articulație, încastrare).

Fig. 23 reprezintă o astfel de legătură prin două pendule paralele. Din punct de vedere cinematic aceste legături permit deplasarea corpului *II* față de corpul *I*, numai după direcția perpendicularei comune la cele două pendule, dar nici o rotire între ele nu este posibilă.

Din punct de vedere static, reacțiunea corespunzătoare unei astfel de legături are direcția determinată, direcția comună a celor două pendule și două elemente necunoscute, mărimea și poziția ei, sau, exprimat altfel, are ca necunoscute mărimea reacțiunii și momentul acesteia în raport cu punctul teoretic de rezemare.

2. În tot ce s-a spus despre libertățile cinematice ale diferitelor legături reprezentate prin pendule, s-a înțeles că atît deplasările, cît și rotirile în reazeme pot avea numai valori

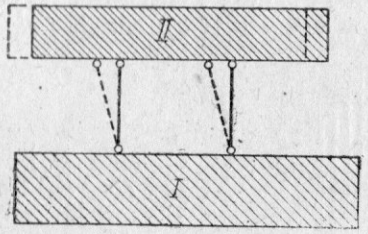


Fig. 23.

foarte mici, astfel încît, din punct de vedere practic, să li se poată aplica calculele valabile pentru infinitii mici.

Elementele privitoare la rezemările în spațiu vor fi date în capitolele construcțiilor spațiale (cap. VI și VII).

SISTEME STATIC DETERMINATE

CAPITOLUL II

METODE GENERALE DE CALCUL

§ 7. SECȚIUNI ȘI EFORTURI

Forțele și cuplele exterioare care acționează asupra unui sistem de bare ce formează scheletul de rezistență al unei construcții se împart în două categorii :

— forțe și cuple date, numite sarcini ;

— forțe și cuple de legătură care apar în reazemele (legăturile) suprimate, numite reacțiuni.

Prin suprimarea reazemelor și introducerea reacțiunilor, sistemul de bare devine un sistem liber în spațiu, iar forțele exterioare, compuse din forțele date și din reacțiunile care înlocuiesc reazemele, își fac echilibru. În acest caz se spune mai pe scurt că ansamblul sistemului de bare este în echilibru.

De asemenea, orice parte a construcției, redusă la scheletul ei de rezistență, se găsește în echilibru.

Metoda generală care permite să se exprime că fiecare parte a unei construcții este în echilibru este metoda secțiunilor. Se presupune că se face o secțiune în corpul sau în bara considerată. Prin această secțiune se taie legătura de continuitate a barei, și pe cele două fețe determinate de secțiune se introduc forțele și cuplele de legătură corespunzătoare legăturii suprimate. Aceste forțe și cuple sînt interioare, în raport cu corpul în întregime, și se numesc *eforturi*. Eforturile devin însă forțe și cuple exterioare, adică reacțiuni, dacă se ține seamă numai de o parte a barei, care rămîne după secționare prin înlăturarea celeilalte părți.

Eforturile care apar prin secționarea unei bare, considerată redusă la axa ei, sînt arătate mai jos : întîi, în cazul problemelor plane, și apoi, la problemele în spațiu.

Prin probleme plane se înțeleg acele probleme în care toate axele barelor care constituie schema de calcul se găsesc într-un plan, iar toate forțele exterioare se aplică în acest plan.

Restul problemelor se consideră probleme în spațiu.

a) Eforturi în problemele plane

Secțiunea din i (fig. 24, a) suprimă o legătură de încastrare între cele două bucăți ale barei, care era continuă în i, deci forțele de legătură ce trebuie introduse sînt cele corespunzătoare unei încastrări. În raport cu centrul de greutate al secțiunii, ele pot fi reduse pe fiecare față, așa cum se arată în fig. 24, b, la trei elemente simple :

1) componenta N după direcția tangentei la axa barei în punctul considerat, care se numește *forța axială* din secțiunea i ;

2) componenta T, după direcția normalei la axa barei în punctul considerat, numită *forța tăietoare* din secțiunea i;

3) momentul M, în raport cu centrul de greutate al secțiunii, numit *momentul încovoietor* din secțiunea i.

Pe cele două fețe sensurile componentelor M, N, T sînt contrare (conform principiului acțiunii și reacțiunii).

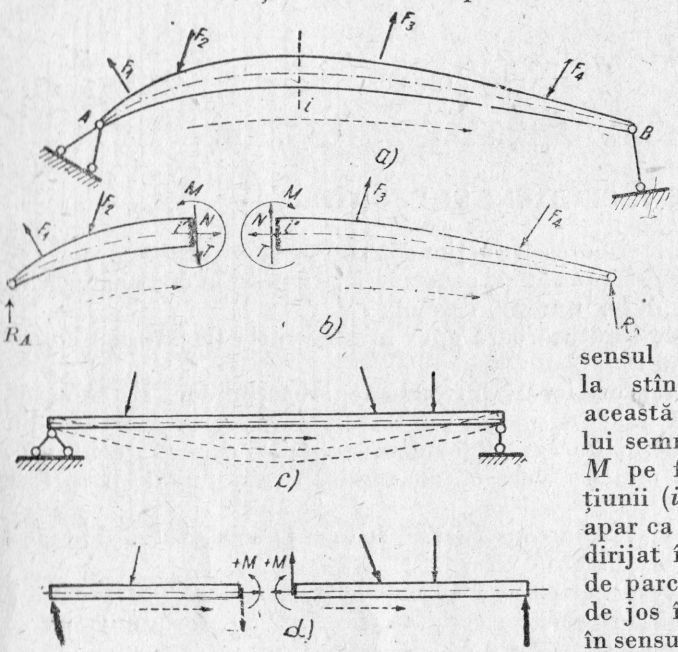


Fig. 24.

Pentru stabilirea semnelor cantităților M, N, T, se face o convenție. Se fixează întîi un sens de parcurgere al barei, reprezentat printr-o săgeată sub bară, iar observatorul se așază astfel, încît să aibă sensul de parcurgere de la stînga spre dreapta. În această poziție a observatorului semnele cantităților N, T, M pe fața din dreapta secțiunii (i'') sînt pozitive cînd apar ca în figură, adică N este dirijat în sens invers sensului de parcurgere, T este dirijat de jos în sus, iar M rotește în sensul acelor unui ceasornic.

Pe fața din stînga secțiunii (i'), aceleași cantități sînt pozitive cînd sînt dirijate în sensuri opuse: N în sensul de parcurgere, T, de sus în jos, iar M, în sens invers acelor unui ceasornic.

Această convenție poate fi interpretată și astfel:

N este pozitiv cînd este dirijat din interiorul spre exteriorul părții pe care se aplică, adică atunci cînd trage de partea respectivă a barei, indiferent de fața considerată. Deci, lui N pozitiv îi corespunde efortul de întindere și, invers, lui N negativ — efortul de compresiune;

T este pozitiv cînd rotește în sensul acelor unui ceasornic partea din bară pe care se aplică; din figură se vede că interpretarea este justă pentru ambele părți ale barei. Rezultă, deci, că semnele eforturilor N și T nu depind de sensul de parcurgere.

Pentru semnul momentului încovoietor, trebuie fixat întîi sensul de parcurgere. În raport cu acest sens de parcurgere se observă că momentele încovoietoare pozitive, după convenția fixată, deformează în jos, prin încovoiere, o bară pe două reazeme, ca în fig. 24, *c*. Într-o formă mai generală, momentul încovoietor pozitiv într-o secțiune întinde zona de jos a secțiunii și o comprimă pe cea de sus, dacă ne referim la sensul de parcurgere fixat pe bară.

Pentru barele orizontale și cele puțin înclinate față de orizontală se va presupune sensul de parcurgere de la stînga la dreapta (fig. 24, *d*), fără să se mai deseneze săgeata. Numai la sistemele de bare mai complicate, unde pot interveni interpretări diferite, se va alege întîi sensul de parcurgere

prin săgeți pe fiecare bară, pentru a putea fixa semnele momentelor încovoi
toare. Din condițiile de echilibru ale părții din stînga secțiunii rezultă că
T și M aplicate pe fața din stînga (i') — (fig. 24, *b*) — trebuie să echilibre
forțele exterioare R_A, F_1 și F_2 care acționează în stînga secțiunii. Deoare
N, T, M aplicate pe fața din dreapta secțiunii (i'') sînt egale, dar de se
suri opuse cu cele de pe fața i', rezultă că sistemul N, T, M aplicat pe fa
din dreapta a secțiunii i, adică pe fața i'', este un sistem echivalent cu sist
mul tuturor forțelor exterioare R_A, F_1 și F_2 care acționează la stînga secțiunii

Aceasta înseamnă că eforturile N, T, M pe fața din dreapta a secțiu
i se calculează prin reducerea în raport cu centrul de greutate al acest
secțiuni a tuturor forțelor exterioare (forțe date și reacțiuni) ce acționea
la stînga secțiunii i.

În mod asemănător, dacă se pornește de la condițiile de echilibru
părții din dreapta, rezultă că eforturile N, T, M aplicate pe fața din stîn
a secțiunii i — adică pe fața i' — se obțin prin reducerea, în raport cu ce
trul de greutate al acestei secțiuni, a forțelor exterioare din dreapta secțiu
(R_B, F_3 și F_4). Eforturile N, T, M pe fața din stînga vor fi egale și de se
contrar cu cele de pe fața din dreapta (principiul acțiunii și reacțiuni
însă prin convenție vor purta aceleași semne.

Trebuie observat că sensul exprimă o realitate fizică, pe cînd semn
numai o convenție algebrică.

Din cele de mai sus rezultă că eforturile N, T, M se determină în m
practic astfel:

Valoarea forței axiale pe fața din dreapta a unei secțiuni este eg
cu suma proiecțiilor pe tangenta la axa grinzii în secțiunea considerată
tuturor forțelor exterioare (forțe date și reacțiuni) de la stînga secțiu
fiind pozitivă cînd este dirijată de la dreapta la stînga (trage de corp).

Valoarea forței tăietoare pe fața din dreapta a unei secțiuni este egală
suma proiecțiilor pe normala la axa grinzii în secțiunea considerată, a tutu
forțelor exterioare de la stînga secțiunii, fiind pozitivă cînd este dirijată de
în sus (rotește partea corpului pe care se aplică în sensul acelor unui ceasorni

Valoarea momentului încovoietor pe fața din dreapta a unei secți
este egală cu suma momentelor, în raport cu centrul de greutate al aces
secțiuni, a tuturor forțelor exterioare de la stînga secțiunii, fiind pozit
cînd rotește în sensul acelor unui ceasornic.

Uneori este mai ușor să se facă operațiile de proiecții și de mome
pe partea din dreapta secțiunii; în acest caz, se obțin eforturile pe fața
stînga secțiunii, cu sensuri inversate față de cele aplicate pe fața din dreap

Pentru a evita confuzii, în mod obișnuit se referă eforturile la fața
dreapta, adică pe fața i'' și, în acest caz, operația de reducere a forțelo
face normal pe partea din stînga secțiunii, iar cînd se face pe partea
dreapta, se vor schimba sensurile eforturilor N, T, M și se vor adopta s
nele în consecință, pentru a le raporta de asemenea la fața din dreapta
țiunii. De exemplu, momentul încovoietor pe fața i' a secțiunii este poz
cînd momentul tuturor forțelor de la dreapta secțiunii rotește în sens inv
acelor unui cesornic.

Observație. Nu trebuie să se confunde sensul de parcurgere adoptat pe bară (sti
dreapta) în raport cu care este stabilită convenția de semn pentru M, cu operația de r
cere a forțelor de la stînga sau de la dreapta. Indiferent cum se face reducerea forțelor
la stînga sau de la dreapta secțiunii, sensul de parcurgere pe bară rămîne de la stînga
dreapta.

b) Eforturi la sisteme în spațiu

Prin secționarea unei bare drepte sau curbe supusă la sarcini oarecare în spațiu și înlăturarea uneia dintre părți, de exemplu, a celei din stînga, trebuie introduse pe fața din dreapta, în centrul de greutate O al secțiunii, forța $\overline{R}$ și cuplul reprezentat prin vectorul $\overline{M}$, astfel încît $\overline{R}$ și $\overline{M}$ să fie echivalente cu forțele exterioare care acționează pe partea din bară înlăturată (fig. 25, *a*) Deci, vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}$ alcătuiesc torsorul în raport cu centrul de greutate O al secțiunii, al tuturor forțelor exterioare care acționează la stînga secțiunii.

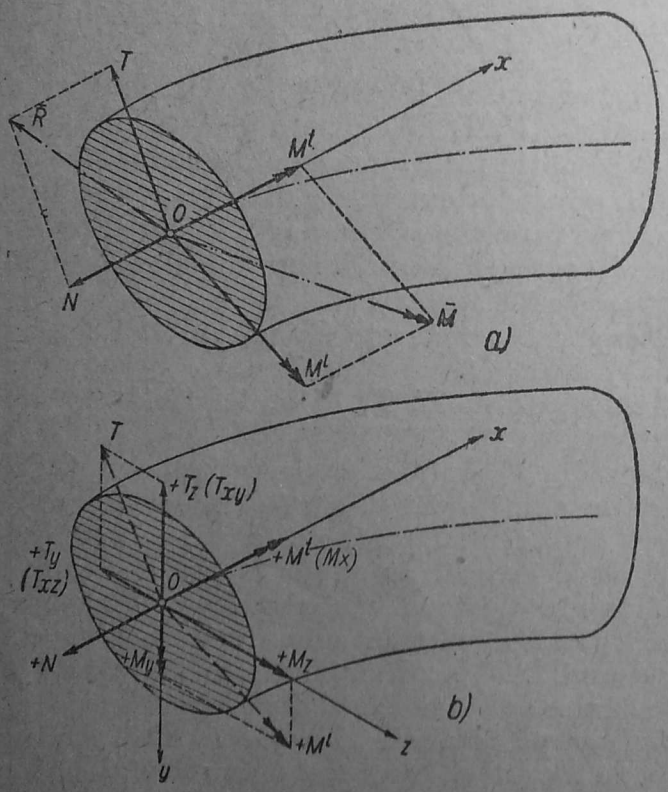


Fig. 25.

Forța $\overline{R}$ se descompune după tangenta la axa barei N, numită forța axială și componenta T în planul secțiunii, numită forța tăietoare.

Vectorul $\overline{M}$ se descompune, de asemenea, în componenta M^t după tangenta la axa barei, numită moment de torsiune sau de răsucire, după tendința pe care o are de a răsuci bara, și componenta M^i în planul secțiunii, care se numește moment încovoietor, după tendința pe care o are de a încovoia bara.

Din modul cum s-a făcut descompunerea rezultă că N și M^t au direcția determinată, deci comportă cîte o singură condiție analitică, mărimea, pe cînd T și M^i comportă cîte două condiții analitice, mărimea și direcția în planul secțiunii, sau componentele după două axe în planul secțiunii.

Dacă se alege sistemul intrinsec de axe $Oxyz$ cu Ox după tangenta la axa barei și avînd sensul pozitiv cînd intră în corp, iar Oy și Oz în planul secțiunii (fig. 25, *b*), astfel încît observatorul după Oz să vadă rotind pe Ox în sensul orar spre Oy, forța N și componentele lui T sînt pozitive cînd sînt dirijate în sens invers sensului pozitiv al axelor, adică :

N este pozitiv cînd iese din corp (întindere) ;

componenta lui T după direcția lui Oy (normală pe Oz) se notează cu T_z sau T_{xy} și este pozitivă ca în figură, iar componenta lui T după direcția Oz (normală pe Oy) se notează cu T_y sau T_{xz}, fiind pozitivă ca în figură.

Momentul de torsiune M^t și componentele lui M^i sînt pozitive cînd sînt dirijate după sensurile pozitive ale axelor, adică M^t (notat uneori cu M_x, după axa pe care se aplică) este pozitiv cînd vectorul său intră în corp, componenta lui M^i după Oy se notează cu M_y, iar componenta lui M^i după Oz se notează cu M_z și sînt pozitive, ca în figură.

Eforturile-forțe N, T_z și T_y pe fața din dreapta secțiunii se determină prin proiecțiile tuturor forțelor exterioare din stînga secțiunii, pe axele intrinseci Ox, Oy și Oz, iar eforturile-momente M_x, M_y, M_z se determină prin exprimarea momentelor tuturor forțelor din stînga secțiunii în raport cu aceleași axe intrinseci Ox, Oy, Oz.

Evident, la fel ca în plan, aceste operații se pot face și asupra forțelor exterioare de la dreapta secțiunii, obținîndu-se în acest caz eforturile care acționează pe fața din stînga secțiunii, care au aceleași valori, dar sensuri opuse față de cele de pe fața din dreapta.

În concluzie, la sistemele de bare care constituie probleme plane, într-o secțiune oarecare apar trei eforturi : forța axială N, forța tăietoare T și momentul încovoietor M, iar la sistemele de bare care constituie probleme în spațiu, într-o secțiune oarecare apar șase eforturi : o forță axială N, două forțe tăietoare T_z și T_y, un moment de torsiune M^t (M_x) și două momente încovoietoare M_y și M_z.

Din modul cum au fost definite eforturile rezultă că ele sînt strîns legate de secțiune ; cînd se trece de la o secțiune la alta, în general, eforturile își schimbă mărimea și, de multe ori, și direcția.

Deci, ori de cîte ori se vorbește de un efort, trebuie neapărat arătată și secțiunea în care are loc.

§ 8. METODE DE CALCUL

Din paragrafele precedente s-a văzut că pentru un sistem de sarcini date, acționînd asupra unui sistem de bare static determinat, atît forțele de legătură cu terenul sau cu alte sisteme (reacțiunile), cît și forțele de legătură interioare în orice secțiune (eforturile), constituie probleme de echilibru static al sistemelor de forțe din Mecanica Teoretică a corpurilor rigide.

Mecanica Teoretică pune la dispoziție două metode generale de a rezolva problemele de echilibru static :

a) metoda ecuațiilor de echilibru, decurgînd direct din aplicarea postulatelor Mecanicii, așa cum au fost formulate de Galilei și Newton ;

b) metoda lucrului mecanic virtual, decurgînd din principiul deplasărilor (strămutărilor) virtuale, considerat postulat de bază al Mecanicii.

Dacă se pornește de la postulatele Mecanicii, principiul deplasărilor virtuale apare ca o consecință ; dacă se pornește însă de la principiul deplasărilor virtuale ca postulat al Mecanicii, ecuațiile de echilibru apar ca o consecință directă, astfel încît cele două metode pot fi considerate echivalente. În Statica Construcțiilor este necesar să fie cunoscute amîndouă, deoarece varietatea problemelor oferă posibilități fiecăreia de a-și pune în evidență avantajele. În special principiul deplasărilor virtuale permite o serie de rezolvări rapide și clare unor probleme, la care aplicarea ecuațiilor de echilibru este foarte greoaie.

Metoda ecuațiilor de echilibru se poate aplica în Statica Construcțiilor pe cale vectorială (torsorul sistemului de forțe în raport cu orice punct să fie nul), pe cale analitică (proiecțiile și momentele în raport cu un sistem de axe să fie nule), pe cale grafică (poligon de forțe și poligon funicular închis), cum și prin combinații între aceste căi.

Metoda lucrului mecanic virtual se bazează pe principiul deplasărilor virtuale care se poate enunța astfel : *pentru ca un sistem de forțe care acționează asupra unui sistem material să fie în echilibru, este necesar și suficient ca pentru orice deplasări infinitesimale compatibile cu legăturile sistemului, ce am da punctelor de aplicare ale forțelor, lucrul mecanic total să fie nul.*

O construcție considerată ca alcătuită dintr-un sistem de corpuri rigide este un sistem cu legături complete din punct de vedere static, deci nu are deplasări. Pentru a aplica principiul deplasărilor virtuale trebuie dată posibilitatea de a avea deplasări și, în consecință, se suprimă unele legături exterioare sau interioare, introducînd, bineînțeles, forțele și cuplele (reacțiuni sau eforturi) corespunzătoare legăturilor suprimate.

Astfel, construcția s-a transformat într-un sistem care permite deplasări, și principiul lucrului mecanic virtual devine aplicabil.

Un astfel de sistem se numește un *sistem cinematic.*

Dacă după suprimarea unor legături, numărul de parametri independenți de care depinde configurația geometrică a sistemului este m, atunci sistemul astfel obținut se numește un mecanism sau un sistem cinematic cu m grade de libertate.

§ 9. ANALIZA CINEMATICĂ A SISTEMELOR DE SOLIDE CU GRADE DE LIBERTATE

A. DETERMINAREA GRADELOR DE LIBERTATE ALE SISTEMELOR CINEMATICE

Numărul m de grade de libertate ale unui sistem de C corpuri rigide legate între ele printr-un număr S de legături simple și care are r reazeme simple (sau legături simple) față de teren, la sistemele plane cu grade de libertate în planul sistemului se poate determina cu relația :

$$m = 3C - (S + r). \tag{2.1}$$

În adevăr, un corp plan are trei grade de libertate în planul său (două translații și o rotație), și pentru a-l fixa în acest plan trebuie trei legături simple care se pot realiza prin trei reazeme simple, printr-o articulație și un reazem simplu, sau printr-o încastrare.

Dacă toate cele C corpuri care alcătuiesc sistemul ar fi libere, sistemul ar avea $3C$ grade de libertate. Din acestea trebuie să se scadă atît cele S legături simple care există între cele C corpuri, cît și cele r reazeme simple între aceste corpuri și teren.

În expresia (2.1), S se determină cu relația :

$$S = 3i + 2a + s, \tag{2.2}$$

în care i este numărul de încastrări, a — numărul de articulații, și s — numărul de reazeme simple între corpuri. Trebuie menționat că, dacă într-un punct sînt articulate n bare (corpuri), atunci în acel punct $a = n - 1$, deoarece de una dintre bare se consideră articulate toate celelalte $n - 1$ bare (fig. 26, *a*). Aceeași observație pentru un nod încastrat cu n bare : $i = n - 1$ (fig. 26, *b*). În fig. 26, *c* este reprezentat un nod în care unele bare sînt articulate și altele încastrate : de una dintre bare se consideră legate toate celelalte. În exemplul din fig. 26, *c*, de bara orizontală sînt legate două bare încastrate, deci $i = 2$ și trei bare articulate, deci $a = 3$.

În expresia (2.1), r se determină cu relația:

$$r = 3r_i + 2r_a + r_s, \tag{2.3}$$

în care r_i este numărul de reazeme încastrate, r_a — numărul de reazeme articulate, și r_s — numărul de reazeme simple.

Dacă în relația (2.1) rezultă $m = 0$, adică dacă

$$3C = S + r, \tag{2.4}$$

sistemul este static determinat, iar dacă $m < 0$, sistemul este static nedeterminat.

Totuși, relația (2.1) nu constituie un criteriu suficient pentru a decide dacă sistemul este mecanism, static determinat sau static nedeterminat. Se poate întîmpla ca legăturile să fie astfel dispuse, încît într-o parte a sistemului să fie mai multe legături decît este necesar, adică în acea zonă sistemul să fie static nedeterminat, iar în altă parte, mai puține, astfel încît în acea zonă sistemul să fie un mecanism, dar în totalitate să fie satisfăcută relația (2.4), ceea ce ar indica în mod formal un sistem static determinat. De aceea, relațiile stabilite trebuie să fie verificate atît pe sistem în ansamblu, cît și pe diferitele lui porțiuni.

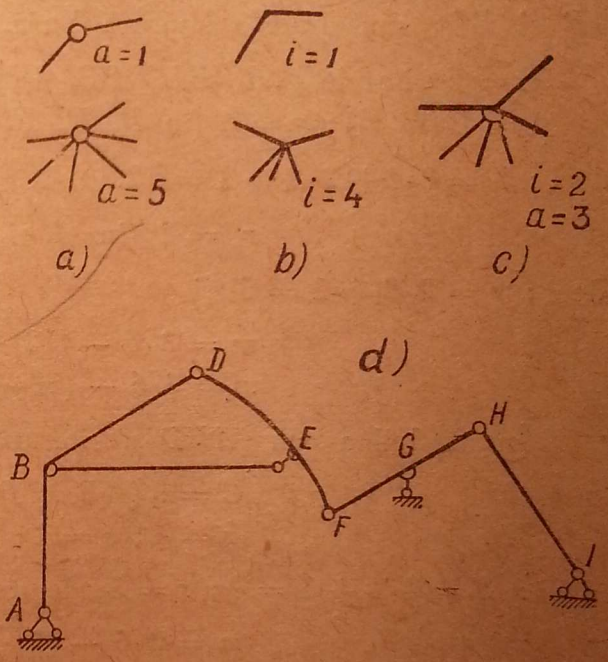


Fig. 26.

De asemenea, se poate întîmpla ca relația (2.4) să fie satisfăcută atît pentru ansamblu, cît și pentru diferitele porțiuni ale sistemului, și totuși acesta să se comporte ca un mecanism pentru deplasări infinit mici și, uneori, chiar pentru deplasări finite. Aceasta înseamnă că cele $S + r$ legături simple nu sînt liniar independente între ele, ci sistemul constituie o formă critică. Formele critice vor fi analizate în capitolul IV (Grinzi cu zăbrele).

Se exclud deocamdată din discuție aceste situații.

La sistemele static determinate, trebuie observat că în relația $3C = S + r$ (2.4) este necesar ca $r \geqslant 3$, căci altfel sistemul nu e fixat față de teren.

Dacă $r = 3$ — relația (2.4) fiind satisfăcută — înseamnă că sistemul de C corpuri este în ansamblu un sistem geometric nedeformabil, care are nevoie numai de trei legături simple față de teren.

Sistemul care îndeplinește această condiție:

$$3C = S + 3 \tag{2.5}$$

se numește un sistem liber și e caracterizat prin faptul că nu are nici un grad de libertate interioară. Pozițiile relative ale celor C corpuri nu se schimbă oricum s-ar deplasa sistemul față de teren.

Din această condiție rezultă că numărul de grade de libertate interioară m_i, numite grade de mobilitate, pe care le are un sistem de C corpuri, este numărul total de grade de libertate pe care l-ar avea sistemul dacă ar fi legat de teren numai prin trei legături simple ($r = 3$), de unde rezultă expresia :

$$m_i = 3C - (S + 3). \tag{2.6}$$

Pe baza celor de mai sus se determină gradele de libertate m și m_i ale sistemului din fig. 26, *d*. În punctul B barele AB și BD sînt încastrate între ele. Bara BE este articulată în B și simplu rezemată în E pe bara DF. În G, bara FH este simplu rezemată față de teren.

Este indiferent dacă se consideră corpul ABD alcătuit din două bare AB și BD, sau dintr-o singură bară. În primul caz :

$C = 6$ (barele AB, BD, DF, FH, HI, BE)

$i = 1$ (în B) ; $a = 4$ (în B, D, F, H) ; $s = 1$ (în E) ;

deci : $S = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 12.$

$r_a = 2$ (în A și I) ; $r_s = 1$ (în G) ;

deci : $r = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ și

$$m = 3 \cdot 6 - (12 + 5) = 1$$
$$m_i = 3 \cdot 6 - (12 + 3) = 3.$$

În al doilea caz (ABD o singură bară), rezultă :

$C = 5$ (ABD, DF, FH, HI, BE)

$a = 4$; $s = 1$;

deci : $S = 2 \cdot 4 + 1 = 9$; $r = 5$, de unde :

$$m = 3 \cdot 5 - (9 + 5) = 1$$
$$m_i = 3 \cdot 5 - (9 + 3) = 3.$$

În spațiu, un solid liber are șase grade de libertate (trei translații și trei rotații) ; deci, expresia (2.1) pentru un sistem de C corpuri trebuie înlocuită cu expresia :

$$m = 6\,C - (S + r), \tag{2.7}$$

în care S reprezintă, de asemenea, numărul de legături simple între cele C corpuri, iar r — numărul de reazeme simple față de teren.

În mod analog, numărul de grade de libertate interioare (mobilitate) se determină cu expresia :

$$m_i = 6\,C - (S + 6). \tag{2.7'}$$

În cazul sistemelor plane, care au legături numai normale pe planul sistemului, numărul de grade de libertate m, care permit deplasări normale pe acest plan, se stabilește pornind de la faptul că, în aceste condiții, un solid liber plan are trei grade de libertate : două rotații în jurul a două axe din plan și o translație normală pe plan, deci :

$$m = 3C - (S + r), \tag{2.8}$$

în care S este numărul de legături interioare care împiedică deplasări relative normale pe plan, iar r — numărul de reazeme simple față de teren care împiedică deplasări absolute normale pe plan. Astfel, o articulație completă interioară permite rotirea relativă în jurul a două axe din planul sistemului ce trec prin articulație, împiedicînd numai mișcarea de translație a unui corp față de altul, deci constituie o singură legătură simplă, normală pe plan, iar o articulație care permite rotirea relativă în jurul unei singure axe a planului (articulație cilindrică), împiedicînd rotația relativă în jurul oricărei alte axe din plan și translația relativă, constituie două legături simple. Deci, în (2.8) S are expresia :

$$S = a + 2\,a_c, \tag{2.9}$$

în care a este numărul de articulații complete, iar a_c — numărul de articulații cilindrice.

De asemenea, r din formula (2.8) se deduce cu expresia :

$$r = r_s + 3\,r_i + 2r_c, \tag{2.10}$$

în care r_s este numărul de reazeme simple, normale pe plan ; r_i — numărul de încastrări complete care împiedică rotirea în jurul a două axe ale planului și translația normală pe plan, iar r_c — numărul de încastrări care împiedică rotirea în jurul unei singure axe a planului și translația normală pe plan (reazem cilindric).

Ținînd seamă că deplasarea normală pe plan e împiedicată de trei reazeme simple normale pe plan, numărul m_i de grade de libertate interioară se deduce cu expresia :

$$m_i = 3\,C - (S + 3). \tag{2.8'}$$

Pentru sistemul reprezentat în fig. 31, rezultă :

$$C = 3\ (ABC,\ CDE,\ EFG)$$

$$a = 1\ (\text{în } E)$$

$$a_c = 1\ (\text{în } C),$$

deci :

$$S = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$r = 5\ (\text{în } A,\ B,\ D,\ F,\ G).$$

Rezultă :

$$m = 3 \cdot 3 - (3 + 5) = 1 \text{ și}$$

$$m_i = 3 \cdot 3 - (3 + 3) = 3.$$

B. TEOREME GENERALE ÎN ANALIZA SISTEMELOR CINEMATICE

Aplicarea principiului deplasărilor virtuale implică exprimarea lucrului mecanic produs de forțele și de cuplele care acționează asupra sistemului, deci trebuie exprimate deplasările infinitesimale posibile ale oricărui punct al sistemului, provenind din gradele de libertate corespunzătoare.

Lucrul mecanic fiind produsul dintre forță și proiecția deplasării pe direcția forței, sau produsul dintre moment și proiecția vectorului care

reprezintă unghiul de rotație pe direcția vectorului moment, practic, nu interesează chiar deplasările reale, ci proiecțiile acestor deplasări pe direcțiile vectorilor corespunzători.

În cazul cînd forțele au o direcție comună — și acesta este un caz frecvent în Statică, — rezultă că interesează numai proiecțiile deplasărilor pe direcția comună a forțelor. De obicei, direcția comună a forțelor este verticală.

Principiul deplasărilor virtuale cere ca deplasările să fie infinit mici; deci, analiza cinematică se va face numai pentru deplasări foarte mici, cărora li se pot aplica regulile de calcul corespunzătoare.

Un sistem cinematic alcătuit din mai multe corpuri solide va putea avea deplasările ce corespund gradelor de libertate ale sistemului.

Din acest sistem vor fi analizate deplasările relative între trei corpuri oarecare.

Deoarece se analizează numai deplasările relative dintre ele, unul dintre cele trei corpuri poate fi considerat ca un sistem de referință, fix în spațiu, cel de al doilea va avea o deplasare față de cel considerat fix, numită mișcare de transport, iar cel de al treilea va avea o mișcare, care, față de cel de al doilea, este numită mișcare relativă, iar față de primul este considerată mișcare absolută.

Un punct al celui de al treilea corp are o viteză $\bar{v}_r$ în raport cu cel de al doilea, numită *viteză relativă*, și o viteză $\bar{v}_a$ în raport cu primul corp, presupus fix, numită *viteză absolută*. Același punct, dacă se presupune că la momentul considerat s-ar găsi pe corpul al doilea, ar avea o viteză $\bar{v}_t$ față de primul corp fix, numită *viteză de transport*. Între cele trei viteze ale punctului considerat există relația cunoscută din Mecanica Teoretică:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r. \tag{2.11}$$

Relația (2.11) arată că viteza absolută a unui punct se obține din compunerea vectorială a vitezei relative cu viteza de transport a aceluiași punct.

În problema care se analizează aici punctele aparțin solidelor considerate rigide.

Mișcarea instantanee a unui solid poate fi o translație instantanee, o rotație instantanee, sau, în cazul cel mai general, o mișcare ce poate fi asimilată cu o mișcare elicoidală instantanee. În cele ce urmează se exclude cazul mișcării elicoidale, care nu are aplicații în problemele curente de Statică a Construcțiilor, iar translația va fi înglobată în mișcarea de rotație în jurul unei axe la infinit, sau ca rezultantă a două rotații egale, paralele și de sens contrar, astfel încît vor fi studiate numai mișcările de rotație instantanee.

O *mișcare de rotație* este caracterizată prin vectorul $\bar{\omega}$, ale cărui poziție, direcție și sens indică axa de rotație și sensul rotației, iar mărimea lui ω indică mărimea vitezei unghiulare.

Cînd două dintre vitezele care intră în relația (2.11) provin din rotații în jurul a două axe ce se găsesc în același plan (paralele sau concurente), relația (2.11) se transformă într-o compunere plană de rotații, iar mișcarea rezul-

tantă este, de asemenea, o rotație [1]). Vectorii rotațiilor sînt vectori alunecători și se compun exact ca forțele, astfel încît, dacă doi dintre vectori sînt paraleli, al treilea va fi paralel cu ei și în planul lor, iar dacă doi dintre vectori sînt concurenți, al treilea se va găsi în planul lor și va trece prin punctul lor de concurență.

În cele ce urmează vor fi studiate numai aceste cazuri, în care mișcările relative a trei corpuri se reduc la rotații cu axele în același plan. În acest caz, dacă cele trei corpuri care se analizează sînt notate astfel: corpul considerat fix — *T* (teren), corpul cu mișcarea de transport — *1*, iar corpul cu mișcarea relativă — *2*, relația (2.11) se poate înlocui cu relația:

$$\bar{\omega}_{2T} = \bar{\omega}_{1T} + \bar{\omega}_{21}, \qquad (2.12)$$

în care: $\bar{\omega}_{2T}$ este viteza unghiulară absolută a corpului *2* față de teren;

ω_{1T} — viteza unghiulară de transport (adică viteza unghiulară a rotației absolute a corpului *1* față de teren);

$\bar{\omega}_{21}$ — viteza unghiulară relativă a corpului *2* față de corpul *1*.

Pe de altă parte, din Mecanică se cunosc relațiile:

$$\bar{\omega}_{2T} = \frac{d\bar{\theta}_{2T}}{dt}; \quad \bar{\omega}_{1T} = \frac{d\bar{\theta}_{1T}}{dt}; \quad \bar{\omega}_{21} = \frac{d\bar{\theta}_{21}}{dt},$$

în care $d\bar{\theta}_{2T}$, $d\bar{\theta}_{1T}$, $d\bar{\theta}_{21}$ sînt rotațiile infinitesimale corespunzătoare vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_{2T}$, $\bar{\omega}_{1T}$, $\bar{\omega}_{21}$.

Dacă se introduc expresiile vitezelor unghiulare în relația (2.12) și se amplifică cu elementul diferențial de timp *dt*, se obține:

$$d\bar{\theta}_{2T} = d\bar{\theta}_{1T} + d\bar{\theta}_{21}. \qquad (2.13)$$

Deoarece deplasările și, deci, rotațiile $d\bar{\theta}$ care se analizează sînt numai infiniți mici, pentru simplificarea scrierii se renunță la litera *d* care caracterizează operațiile diferențiale și se convine ca $\bar{\theta}_{2T}$, $\bar{\theta}_{1T}$, $\bar{\theta}_{21}$ să reprezinte valori infinit mici, astfel încît se va scrie mai departe relația (2.13) sub forma:

$$\bar{\theta}_{2T} = \bar{\theta}_{1T} + \bar{\theta}_{21} \qquad (2.14)$$

știind de la început că $\bar{\theta}$ reprezintă o rotație infinit mică.

---

[1]) Dacă viteza relativă $\bar{v}_r$ a unui punct *M* provine din rotația $\bar{\omega}_r$, iar viteza de transport $\bar{v}_t$ a aceluiași punct provine din rotația $\bar{\omega}_t$, se poate scrie:

$$\bar{v}_r = \bar{r}_r \times \bar{\omega}_r \quad \text{și} \quad \bar{v}_t = \bar{r}_t \times \bar{\omega}_t,$$

unde $\bar{r}_r$ și $\bar{r}_t$ reprezintă distanțele de la punctul *M* la vectorii rotațiilor $\bar{\omega}_r$, respectiv $\bar{\omega}_t$, iar semnul × este simbolul produsului vectorial.

Expresia $\bar{v}_t + \bar{v}_r = \bar{r}_t \times \bar{\omega}_t + \bar{r}_r \times \bar{\omega}_r$ reprezintă suma momentelor vectorilor $\bar{\omega}_t$ și $\bar{\omega}_r$, în raport cu punctul *M*, iar dacă aceștia sînt în același plan, suma momentelor vectorilor $\bar{\omega}_t$ și $\bar{\omega}_r$ față de *M* este egală cu momentul rezultantei lor în raport cu *M*.

Deci relația $\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r$, unde $\bar{v}_a$ e viteza absolută a punctului *M*, poate fi scrisă sub forma: $\bar{r}_a \times \bar{\omega}_a = \bar{r}_t \times \bar{\omega}_t + \bar{r}_r \times \bar{\omega}_r$, unde: $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_t + \bar{\omega}_r$ reprezintă rezultanta vectorilor $\bar{\omega}_t$ și $\bar{\omega}_r$, iar $\bar{r}_a$ distanța de la punctul *M* la vectorul rotației absolute $\bar{\omega}_a$.

În calcule, vectorul $\bar{\theta}$ va determina complet mişcarea infinit mică a solidului respectiv.

Vectorii $\bar{\theta}$, ca şi $\bar{\omega}$, sînt vectori alunecători, deci se compun ca şi forţele; această proprietate va fi folosită în două cazuri importante, care vor fi studiate mai jos:

a) cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit deplasări numai în planul sistemului;

b) cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit deplasări numai normal pe planul sistemului.

a) Cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit deplasări numai în planul sistemului

În acest caz, mişcarea cea mai generală a unui solid oarecare din sistem este o mişcare de rotaţie în jurul unei axe normale pe planul sistemului, iar translaţia în acelaşi plan poate fi considerată de asemenea ca o rotaţie în jurul unei axe la infinit, sau ca rezultantă a două rotaţii egale şi de sens contrar, normale pe plan.

Deci, toţi vectorii de rotaţie ai diferitelor părţi sînt paraleli între ei, iar doi dintre ei se găsesc totdeauna într-un plan, astfel încît relaţia vectorială (2.14) se transformă în relaţia scalară:

$$\theta_{2T} = \theta_{1T} + \theta_{21}. \tag{2.15}$$

În acelaşi timp, pentru ca în relaţia (2.14) $\bar{\theta}_{2T}$ să fie rotaţia rezultantă a lui $\bar{\theta}_{1T}$ şi $\bar{\theta}_{21}$, cei trei vectori paraleli $\bar{\theta}_{2T}$, $\bar{\theta}_{1T}$ şi $\bar{\theta}_{21}$, reprezentînd axele instantanee de rotaţie, trebuie să fie în acelaşi plan. Acest plan se intersectează cu planul schemei care reprezintă construcţia după o dreaptă, deci cei trei vectori $\bar{\theta}_{1T}$ $\bar{\theta}_{2T}$ şi $\bar{\theta}_{21}$ vor înţepa planul sistemului în trei puncte coliniare, care sînt centrele respective de rotaţie.

De aici urmează teorema de bază în acest caz:

La sistemele cinematice plane cu grade de libertate în acelaşi plan, cele trei centre relative de rotaţie, a trei părţi oarecare ale sistemului, sînt coliniare.

Un exemplu care concretizează cele de mai sus este reprezentat în fig. 27, unde sistemul este alcătuit din trei bare articulate între ele şi articulate şi de teren (care poate fi considerat ca a patra bară). Sistemul are un singur grad de libertate, cum se deduce din relaţia (2.1); $m = 3C - (S + r)$, unde: $C = 3$, $S = 2 \cdot 2 = 4$, $r = 2 \cdot 2 = 4$; deci: $m = 3 \cdot 3 - (4 + 4) = 1$.

Dîndu-se barei AB o rotaţie foarte mică θ_{1T}, rezultă pentru celelalte bare rotaţii bine determinate, în funcţie de θ_{1T}.

Astfel, punctul B se deplasează pe un mic arc de cerc cu raza AB, arc de cerc care poate fi înlocuit cu normala BB' pe AB în cazul rotaţiei infinit mici a lui AB.

Punctul B face parte însă şi din bara BC. Deoarece s-a deplasat în B', rezultă că centrul instantaneu de rotaţie al barei BC se va găsi pe o normală la BB', adică pe dreapta AB.

Tot astfel, punctul C al barei CD, care se roteşte în jurul lui D, se deplasează pe normala CC' la CD. În consecinţă, bara BC care conţine şi punctul C va avea centrul de rotaţie pe dreapta CD. Centrul instataneu de rotaţie al barei BC în raport cu terenul se va găsi la intersecţia E a barelor AB şi CD.

Notînd cu *1*, *2*, *3* barele *AB*, *BC*, *CD*, şi cu *T* — *terenul*, se observă că punctul *A* este centrul (*1*, *T*); *B* — centrul relativ al barei *2* faţă de bara *1*, deci centrul (*2*, *1*); *C* — centrul (*3*, *2*) şi *D* — centrul absolut (*3*, *T*). Centrul relativ (*3*, *1*) se va găsi în punctul *F*, aşa cum s-a găsit în punctul *E* cen-

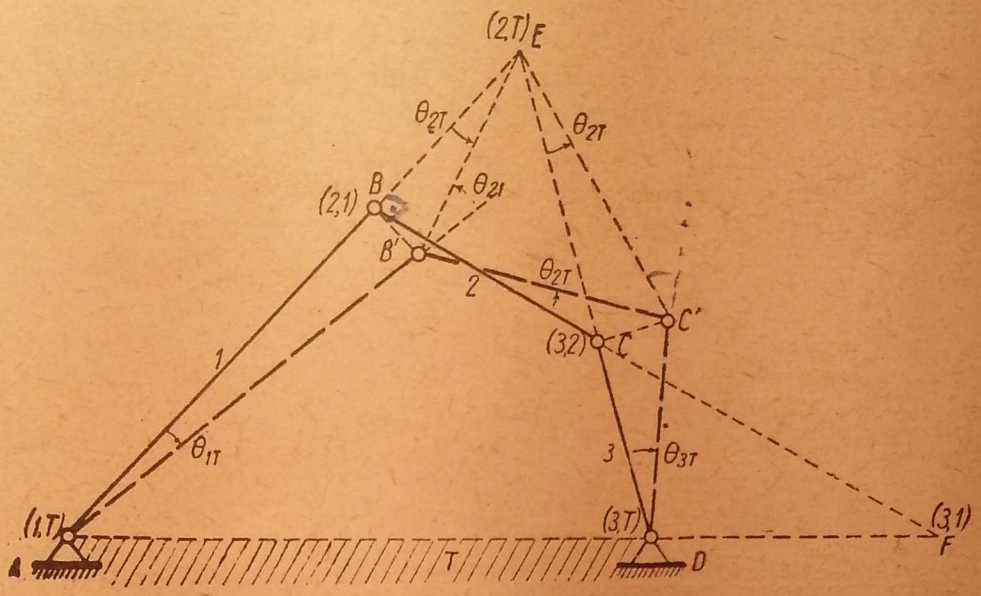


Fig. 27.

trul (*2*, *T*). Din modul de construcţie se verifică teorema coliniarităţii centrelor instantanee.

Astfel :

Corpurile *T*, *1* şi *2* au cele trei centre relative (*1*, *T*) (*2*, *1*) şi (*2 T*) în linie dreaptă ;

Corpurile *1*, *2* şi *3* au cele trei centre relative (*2*, *1*) (*3*, *2*) şi (*3*, *1*) în linie dreaptă ;

Corpurile *2*, *3* şi *T* au cele trei centre relative (*3*, *2*) (*3*, *T*) şi (*2*, *T*) în linie dreaptă ;

Corpurile *1*, *3* şi *T* au cele trei centre relative (*3*, *1*) (*3*, *T*) şi (*1*, *T*) în linie dreaptă.

Relaţia (2.15)

$$\theta_{2T} = \theta_{1T} + \theta_{21} \tag{2.15}$$

se verifică de asemenea direct din triunghiul *AEB'*, unde unghiul θ_{21} este exterior triunghiului, dacă se ţine seamă de sensurile de rotaţie respective.

Astfel θ_{1T} roteşte în sensul orar (vectorul său iese din plan în faţă). θ_{2T} roteşte în sens opus acelor unui ceasornic (vectorul său intră în spatele planului), iar θ_{21} roteşte în sens opus acelor unui ceasornic (θ_{21} înseamnă că este vorba de rotaţia lui *2* faţă de *1*, deci *1* este fix şi *2* se deplasează).

Pentru a ajunge la relaţia cunoscută între valorile absolute ale unghiurilor, trebuie să se atribuie unghiurilor de un sens, un semn, şi celor de celălalt sens, semnul contrar. Astfel, dacă se atribuie semnul plus unghiurilor care rotesc în sensul orar, şi semnul minus, celorlalte, relaţia (2.15) devine :

$$-|\theta_{2T}| = +|\theta_{1T}| - |\theta_{21}|$$

sau

$$|\theta_{21}| = |\theta_{1T}| + |\theta_{2T}| \tag{2.15'}$$

astfel cum este cunoscută relația din geometrie (unghiul exterior al unui triunghi).

Pe de altă parte, dacă se dă o valoare arbitrară unuia dintre vectorii θ în relația (2.15), ceilalți doi vectori θ pot fi determinați după procedeul cunoscut al descompunerii unei forțe după două direcții date paralele cu ea.

În calculele practice însă, nu vor mai fi reprezentate unghiurile prin vectori, ci vor fi determinate numai mărimile lor absolute cu relația (2.15′), semnele atribuindu-li-se ulterior, după sensul de rotație care rezultă din figură.

Proiecția deplasărilor pe o direcție dată. Corpul Q din fig. 28 are mișcarea definită de rotația în jurul centrului instantaneu de rotație I.

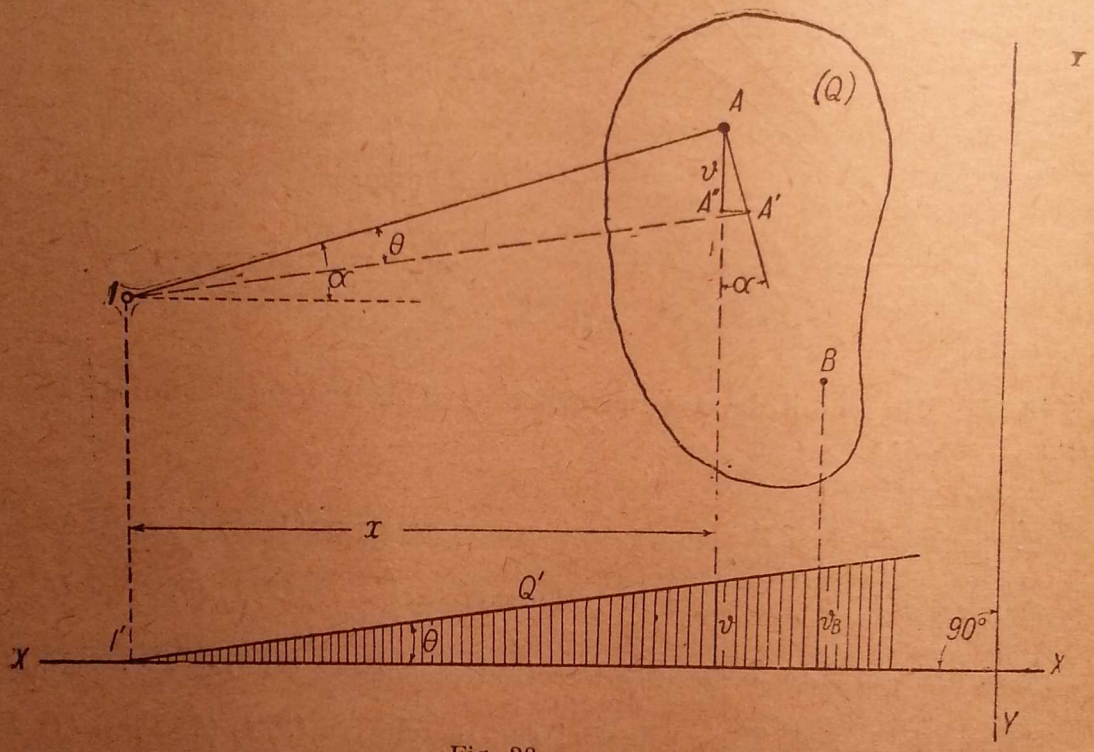


Fig. 28.

Printr-o rotație cu un unghi foarte mic θ în jurul acestui centru, punctul A se deplasează în A', perpendicular pe raza IA, cu cantitatea $AA' = IA \cdot \theta$. De obicei, nu interesează deplasarea reală, ci numai proiecția acestei deplasări pe o direcție dată YY. În acest caz se duce o dreaptă XX perpendiculară pe YY. Fie α unghiul făcut de raza IA cu XX. Direcția deplasării reale AA' face cu direcția YY, de asemenea, unghiul α. Proiecția deplasării reale AA' pe dreapta YY va fi:

$$v = AA'' = AA' \cos \alpha = IA \cdot \theta \cos\alpha = (IA \cdot \cos \alpha) \cdot \theta.$$

Dacă se notează: $IA \cos \alpha = x$, care este proiecția razei vectoare IA pe direcția XX, proiecția deplasării punctului A pe direcția YY este:

$$v = x \cdot \theta. \qquad (2.16)$$

De aici rezultă că v depinde numai de unghiul θ și de proiecția razei vectoare pe direcția XX, perpendiculară pe direcția de proiecție YY, iar proiecțiile deplasărilor pe direcția YY a tuturor punctelor solidului consi-

derat pot fi reprezentate de o dreaptă Q', care face unghiul θ cu XX. Această dreaptă taie dreapta de reper XX în punctul I', unde se proiectează centrul instantaneu de rotație I.

Un punct oarecare B va avea ca proiecție a deplasării sale pe direcția YY segmentul v_B, măsurat direct în diagrama determinată de axa XX și dreapta Q'. Această diagramă se numește *epura deplasărilor pe direcția YY*.

Se observă că în această operație unghiul θ din deplasarea reală a lui (Q) apare cu aceeași valoare în epura deplasărilor pe direcția YY, fiind unghiul dintre dreapta Q' și axa XX.

Unghiul θ și deplasările v sînt cantități foarte mici, cărora li se pot aplica regulile de calcul pentru infiniții mici. Ordonatele v pot fi reprezentate la o scară mărită, însă indiferent de scara desenului, unghiurilor θ și segmentelor v li se aplică regulile de calcul ale infiniților mici.

Din expresia (2.16) rezultă că indiferent de forma corpului solid (Q), proiecția deplasărilor pe o direcție dată este reprezentată de o dreaptă Q'.

Se va analiza acum cazul concret al unui sistem cinematic cu un singur grad de libertate, și anume, sistemul din fig. 29, ale cărui centre instantanee de rotație au fost determinate în fig. 27. Dacă un sistem de corpuri solide are un singur grad de libertate cinematică, aceasta înseamnă că deplasările tuturor punctelor lui depind de un singur parametru și se pot exprima în funcție de acesta.

Pentru o deplasare foarte mică θ_1 a corpului *1*, proiecțiile deplasărilor tuturor punctelor corpului *1* pe direcția YY vor fi reprezentate de dreapta $1'$ care face unghiul θ_1 cu axa XX. Pentru a afla proiecțiile deplasărilor punctelor aparținînd corpului *2*, care, de asemenea, vor fi reprezentate de o dreaptă $2'$, sînt necesare două puncte. Acestea sînt : proiecția $(1,2)'$ pe dreapta $1'$ a centrului $(1,2)$, deoarece $(1, 2)$ aparține corpului *1*, iar al doilea punct îl constituie proiecția $(2, T)'$ pe axa de reper XX a centrului $(2, T)$ care, fiind un centru de rotație absolut, are deplasarea nulă față de axa de reper. Prin punctele $(1, 2)'$ și $(2, T)'$ se duce dreapta $2'$ care cuprinde proiecțiile deplasărilor tuturor punctelor aparținînd corpului *2*. Analog se duce dreapta $3'$ prin punctele $(2, 3)'$ și $(3, T)'$.

Pentru verificare dreptele $1'$ și $3'$ trebuie să se întîlnească într-un punct $(1, 3)'$ pe dreapta paralelă cu YY care trece prin $(1, 3)$, deoarece deplasarea relativă a două corpuri în centrul lor de rotație este nulă.

Diagrama deplasărilor obținută păstrează unghiurile de rotație reale, astfel încît relațiile dintre unghiurile θ pot fi deduse direct din epura deplasărilor pe o direcție oarecare, fără a ne mai referi la sistemul cinematic real.

Astfel, în diagrama deplasărilor, din triunghiul $(1, T)'$, $(2, T)'$, $(1,2)'$ se obține în valoare absolută :

$$|\theta_{21}| = |\theta_1| + |\theta_2|,$$

iar sensurile și, în consecință, semnele sînt indicate de săgeți.

În fig. 29 și în relațiile respective dintre unghiuri nu s-a mai introdus al doilea indice pentru unghiurile de rotație în raport cu terenul. În cele ce urmează, de cîte ori unghiul θ va apărea cu un singur indice, înseamnă că rotația respectivă este efectuată în raport cu terenul.

Pentru un unghi θ_1 dat, celelalte se determină în funcție de poziția centrelor instantanee și de diagrama (epura) deplasărilor.

Astfel, exprimînd ordonata v_2 în două moduri şi ţinînd seamă de modul cum se face calculul cu infiniţii mici ($\theta \approx \sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta$), se obţine :

$$v_2 = (a + b)\,\theta_1 = b \cdot \theta_{21},$$

de unde rezultă

$$\theta_{21} = \frac{a+b}{b}\,\theta_1.$$

Această relaţie dă valoarea absolută a unghiului θ_{21}. Semnul trebuie citit pe diagramă. În cazul de faţă, θ_1 are semnul plus (roteşte în sensul

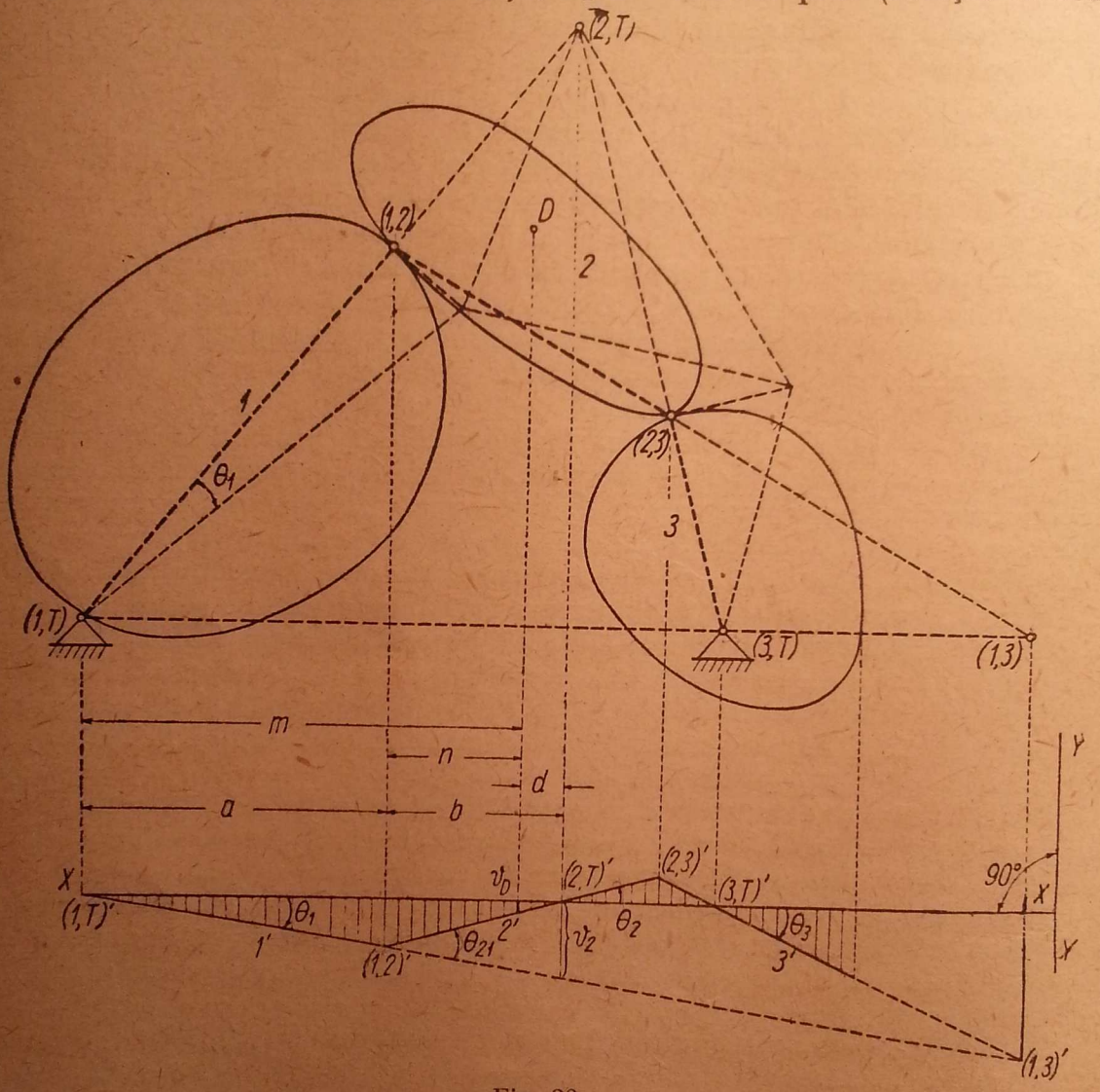


Fig. 29.

orar), iar θ_{21}, semnul minus ($2'$ s-a rotit faţă de $1'$ pentru a-l descrie pe θ_{21} în sens invers acelor unui ceasornic).

θ_{12} este egal, dar de sens şi semn contrar cu θ_{21}.

Din relaţia $a \cdot \theta_1 = b \cdot \theta_2$ rezultă că :

$$\theta_2 = \frac{a}{b}\,\theta_1,$$

iar semnul lui θ_2 este negativ. Ordonatele deplasărilor după direcţia YY se obţin în mod analog.

Astfel, deplasarea după direcția YY a punctului D se poate exprima sub forma :

$$v_D = d\,\theta_2,$$

sau sub forma

$$v_D = m\,\theta_1 - n\theta_{21}.$$

În aceste calcule unghiurile θ se introduc în valoare absolută.

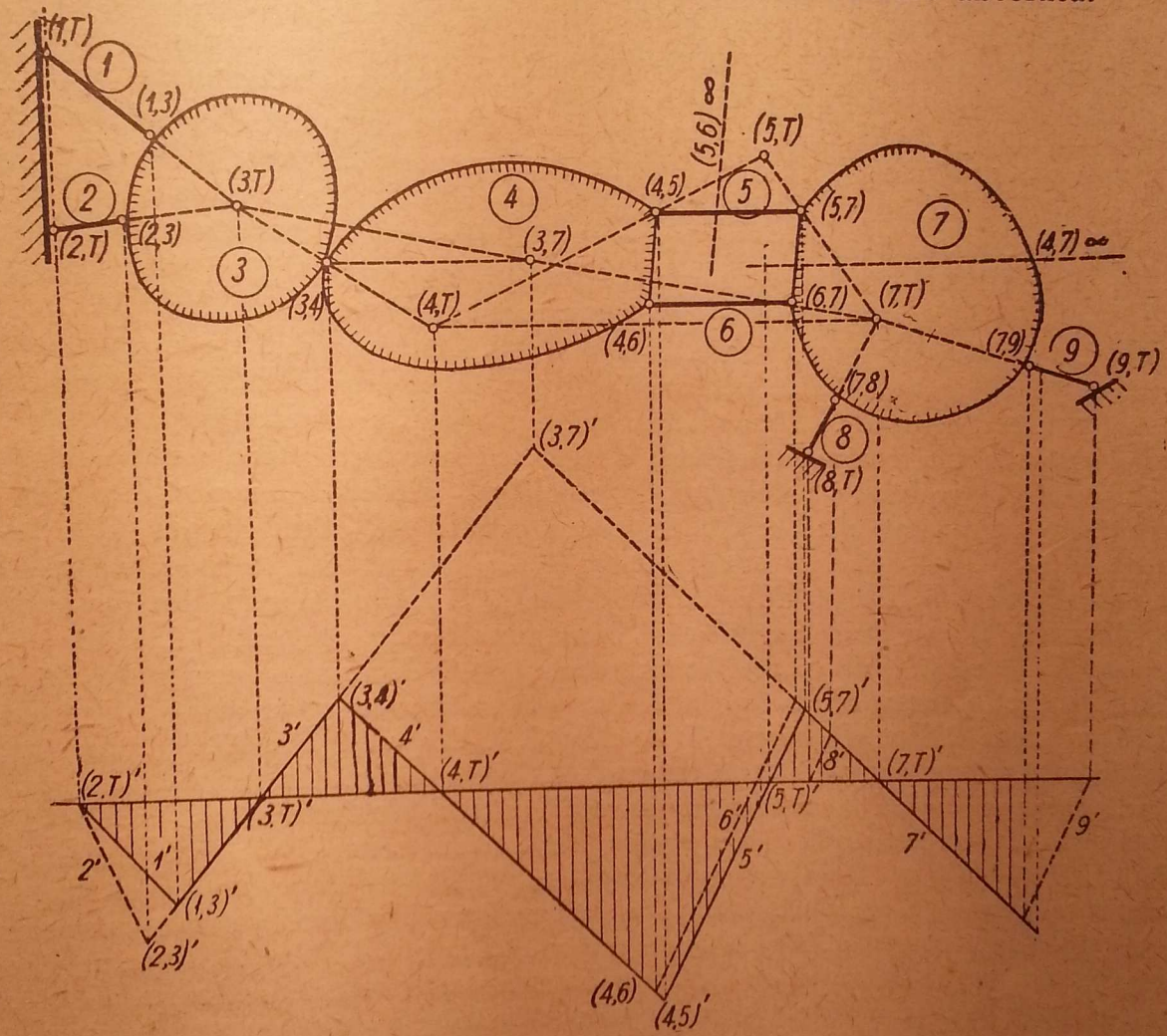


Fig. 30.

Observație. Toate unghiurile și distanțele pot fi exprimate astfel, încît parametrul gradului de libertate să poată fi scos ca factor comun, prin înlocuiri succesive. De exemplu

$$v_D = m\,\theta_1 - n\theta_{21} = \left[m - \frac{n\,(a+b)}{b} \right] \theta_1 = \left(\frac{m \cdot b}{a+b} - n \right) \theta_{21},$$

după cum se alege parametrul θ_1 sau θ_{21}.

Deci, prin amplificarea parametrului cu un număr oarecare, toate unghiurile și toate deplasările se amplifică cu același număr.

În consecință, deși unghiurile sînt foarte mici, prin amplificarea parametrului, diagrama deplasărilor poate fi reprezentată la o scară convenabilă pentru citiri și măsurători.

Un exemplu mai complicat este dat de sistemul alcătuit din nouă corpuri din fig. 30. Sistemul are : $C = 9$, $S = 2 \cdot 9 = 18$, și $r = 2 \cdot 4 = 8$.

Rezultă : $m = 3C - (S + r) = 3 \cdot 9 - (18 + 8) = 1$, deci sistemul are un singur grad de libertate.

Centrele $(1,T)$, $(2,T)$, $(3,T)$, $(8,T)$, $(9,T)$, $(7,8)$, $(7,9)$ $(7,T)$, $(1,3)$ $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ $(4,6)$, $(5,7)$, $(6,7)$ nu necesită nici o observație specială.

Pentru a reprezenta proiecția deplasărilor pe o direcție oarecare, fiecare dreaptă care va reprezenta un corp pe epura deplasărilor trebuie să aibă două puncte, sau un punct și direcția, cunoscute. Dacă se dă corpului *1* o rotație arbitrară reprezentată în epură prin $1'$, prin proiecția lui $(1,3)$ se obține $(1,3)'$, iar prin proiecția lui $(3, T)$, se obține pe dreapta de reper $(3, T)'$; deci dreapta $3'$ reprezentînd proiecția lui *3* este determinată. Mai departe, prin proiecția lui $(3,4)$ se obține $(3,4)'$ pe dreapta $3'$. Dar deocamdată nu se cunoaște un al doilea punct util pentru corpul *4*. Ar trebui ca acesta să fie $(4,T)$, $(4,1)$ sau $(4,2)$. Mai ușor de determinat este $(4,T)$, în modul următor. Cele trei corpuri : *terenul*, *3* și *4* au cele trei centre ale lor $(3,T)$, $(3,4)$ și $(4,T)$ în linie dreaptă, deci $(4, T)$ se va găsi pe dreapta $(3,T)-(3, 4)$. Mai trebuie o dreaptă pe care să se găsească $(4, T)$, și aceasta se obține din grupul de corpuri : *terenul*, *4* și *7*. Centrul $(7, T)$ este cunoscut. Centrul $(4, 7)$ trebuie să se găsească la intersecția dreptelor *5* și *6*, care sînt paralele. Deci, centrul $(4, 7)$ se va găsi la infinit pe direcția comună a dreptelor *5* și *6*, iar cele trei corpuri : *terenul*, *4* și *7* vor avea cele trei centre $(7, T)$, $(4, T)$ și $(4,7)$ coliniare pe dreapta paralelă cu direcția comună a lui *5* și *6* care trece prin centrul $(7, T)$. Sînt acum construite două drepte $(3, T) - (3, 4)$ și $(7, T) - (4, 7)$, astfel încît $(4, T)$ se va găsi la intersecția lor. Se proiectează $(4, T)$ pe linia de reper în $(4, T)'$ și prin cele două puncte $(3, 4)'$ si $(4, T)'$ se duce dreapta $4'$ corespunzătoare corpului *4*.

Se determină prin proiecție punctul $(4, 5)'$, dar nu se cunoaște un al doilea punct pentru $5'$. Se poate evita determinarea unui al doilea punct dacă se trece în loc de corpul *5* la corpul *7*. Corpul *7* are $(7,T)$ cunoscut. Pe de altă parte s-a văzut că centrul $(4, 7)$ se găsește la infinit, deci cele două corpuri *4* și *7* vor rămîne paralele între ele în timpul deplasării. Același lucru se întîmplă și cu proiecțiile lor. În consecință, se proiectează $(7, T)$ în $(7, T)'$ pe linia de reper, iar din $(7, T)'$ se duce o paralelă la $4'$, care este cunoscut. În felul acesta $7'$ a fost construit printr-un punct cunoscut și direcția sa cunoscută. Apoi se proiectează $(5,7)$ în $(5, 7)'$ pe $7'$, și prin punctele $(4, 5)'$ și $(5, 7)'$ se duce dreapta $5'$, reprezentînd proiecția lui *5*.

Corpurile *2* și *6* se proiectează direct în $2'$ și $6'$, cum se arată punctat, și nu necesită vreo observație specială. Tot astfel, *8* și *9*.

Se pot face o serie de verificări grafice. Astfel, corpurile *5* și *6* rămîn paralele în timpul deplasării, deoarece centrul $(5, 6)$ se găsește la intersecția dreptelor $(4, 5) - (4, 6)$ și $(5, 7) - (6, 7)$, care sînt paralele. Deci $5'$ și $6'$ trebuie să fie paralele în epura deplasărilor.

Corpul *5* are centrul de rotație absolut $(5, T)$ la intersecția dreptelor $(4, T)-(4, 5)$ și $(7,T) - (5, 7)$, de unde rezultă că $5'$ trebuie să taie linia de repere în dreptul proiecției lui $(5, T)$.

Centrul relativ $(3,7)$ al corpurilor *3* și *7* se găsește odată pe dreapta $(3, T) - (7, T)$ din combinația *3*, *7* și *teren*, iar altă dată, — din combinația *3*, *4* și *7* —, trebuie să se găsească pe paralela din $(3, 4)$ la dreapta *5*, pe direcția căreia se găsește la infinit centrul $(4, 7)$. Intersecția celor două drepte determină pe $(3, 7)$. Deci dreptele $3'$ și $7'$ din epura deplasărilor trebuie să se întîlnească pe dreapta de proiecție a lui $(3, 7)$. Astfel de verificări pot continua, și uneori sînt utile pentru a evita erori principiale, sau numai de construcție grafică.

b) Cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit deplasări numai perpendicular pe planul sistemului

În acest caz, mișcarea cea mai generală a unei părți oarecare din sistem este o mișcare de rotație în jurul unei axe cuprinse în planul sistemului. Deci, toți vectorii de rotație ai diferitelor părți se găsesc în același plan, planul sistemului.

Relația (2.14)

$$\bar{\theta}_{2T} = \bar{\theta}_{1T} + \bar{\theta}_{21},$$

care reprezintă o compunere de rotații în jurul unor axe ce se găsesc în același plan, arată că cei trei vectori reprezentînd rotațiile a trei corpuri oarecare (în acest caz unul dintre ele s-a presupus a fi terenul) trebuie să fie concurenți, iar poligonul vectorilor de rotație (analog poligonului forțelor) trebuie să fie un triunghi, astfel încît vectorul $\bar{\theta}_{2T}$ să fie rezultanta celorlalți doi $\bar{\theta}_{1T}$ și $\bar{\theta}_{21}$.

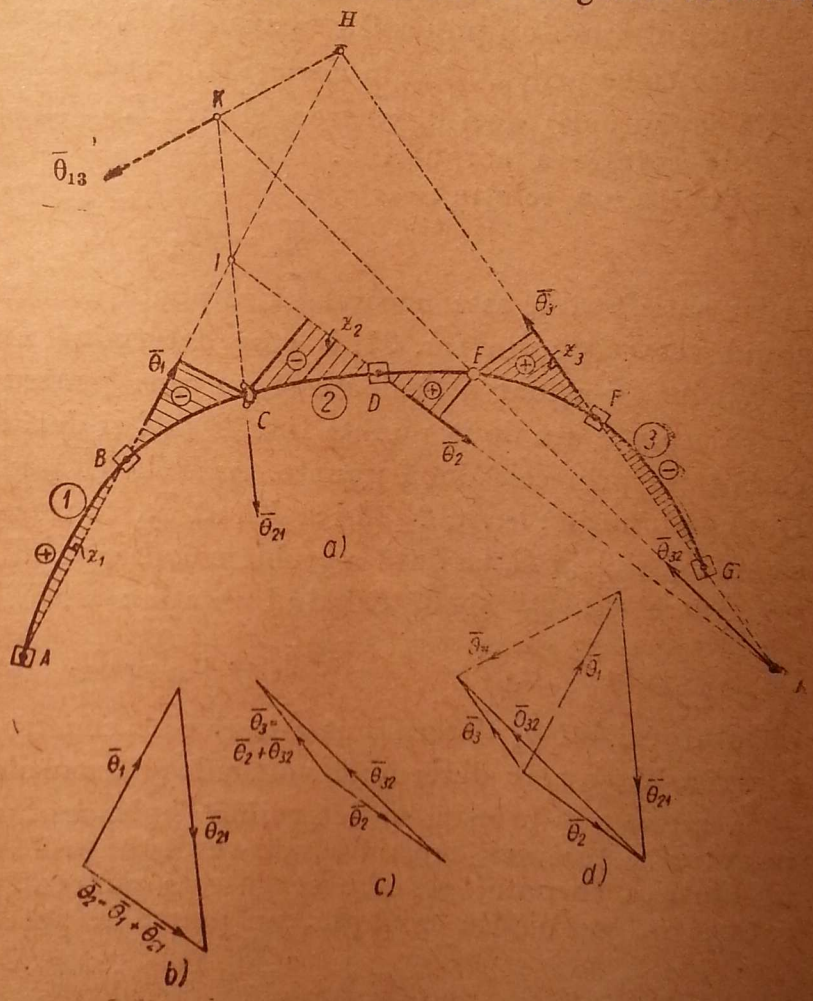


Fig. 31.

În fig. 31, *a* este reprezentat un sistem plan de trei bare rezemate normal pe plan în punctele *A*, *B*, *D*, *F* și *G*. Aceste reazeme se presupun a fi reazeme simple, care împiedică deplasarea corpului normal pe planul figurii. Deoarece s-a admis că nu există deplasări în planul figurii, înseamnă că singurele deplasări posibile vor fi în jurul unor axe din planul figurii, care trec prin reazeme, astfel încît punctele de reazeme nu au nici o deplasare.

Cele trei corpuri sînt legate între ele astfel:

Corpul *1* (*ABC*) este legat de corpul *2* (*CDE*) în *C* printr-o articulație cu un singur grad de libertate, care permite rotația unui corp față de celălalt în jurul unei axe din plan determinate, axa $\bar{\theta}_{21}$ (ca balamaua unei uși). Astfel de articulație se numește articulație cilindrică. Corpul *2* (*CDE*) este legat de corpul *3* (*EFG*) în *E* printr-o articulație completă, care permite rotația unui corp față de celălalt, în jurul oricărei axe din plan ce ar trece prin *E*.

Sistemul are un singur grad de libertate pentru deplasările normale pe plan, așa cum s-a arătat cu ajutorul expresiilor (2.8), (2.9), (2.10). De

altfel, dacă s-ar rigidiza articulația cilindrică din C, care are un singur grad de libertate, adică dacă s-ar introduce o singură legătură simplă, grinda $ABCDE$ ar avea trei reazeme A, B și D, deci ar fi stabilă pentru sarcini normale pe plan, iar partea EFG ar avea, de asemenea, trei reazeme : G, F și punctul E al grinzii precedente, deci și aceasta ar fi stabilă pentru sarcini normale pe plan.

În sistemul cinematic din fig. 31, *a*, corpul *1* are două puncte fixe A și B, deci singura lui mișcare posibilă va fi cea de rotație în jurul axei $\overline{\theta}_1$, care trece prin punctele A și B.

Corpul *2* se poate roti față de corpul *1*, numai în jurul axei $\overline{\theta}_{21}$, care se întîlnește cu $\overline{\theta}_1$ în punctul I.

Corpul *2* are un punct fix, reazemul D, deci el se poate roti în jurul unei axe care trece prin D, dar, în același timp, cei trei vectori $\overline{\theta}_2$, $\overline{\theta}_{21}$ și $\overline{\theta}_1$ trebuie să fie concurenți, deci $\overline{\theta}_2$ va trece și prin I. Astfel, dreapta ID va determina axa de rotație a corpului *2*.

Pentru ca relația :

$$\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_{21} + \overline{\theta}_1$$

să fie satisfăcută, este necesar să se poată construi cu cei trei vectori poligonul vectorilor din fig. 31, *b*, care determină mărimile și sensurile lui $\overline{\theta}_{21}$ și $\overline{\theta}_2$, dacă s-a luat o valoare și un sens pentru $\overline{\theta}_1$.

Corpul *3* are două puncte fixe F și G și deci se rotește în jurul axei $\overline{\theta}_3$, care trece prin cele două puncte. Axa GF ($\overline{\theta}_3$) se intersectează cu $\overline{\theta}_2$ în J. Din combinația : *teren*, *2* și *3* rezultă că $\overline{\theta}_{32}$ va trece prin J și deoarece trebuie să treacă și prin E, ca dată a problemei, dreapta EJ determină direcția lui $\overline{\theta}_{32}$.

Între $\overline{\theta}_2$, $\overline{\theta}_{32}$ și $\overline{\theta}_3$ existînd relația :

$$\overline{\theta}_3 = \overline{\theta}_{32} + \overline{\theta}_2,$$

cu ajutorul lui $\overline{\theta}_2$ determinat anterior se construiește triunghiul vectorilor din fig. 31, *c*, care determină mărimile și sensurile rotațiilor $\overline{\theta}_{32}$ și $\overline{\theta}_3$.

Acum este ușor să se determine deplasarea normală pe plan a oricărui punct al sistemului, multiplicîndu-se distanța de la punct la axa de rotație absolută a corpului pe care se găsește punctul, cu valoarea unghiului de rotație respectiv. De exemplu, un punct de pe corpul *1* are deplasarea :

$$v = z_1 \cdot \theta_1 ;$$

un punct de pe corpul *2* :

$$v = z_2 \cdot \theta_2 ;$$

iar un punct de pe corpul *3* :

$$v = z_3 \cdot \theta_3 .$$

În aceste relații mărimile unghiurilor θ_1, θ_2, θ_3 sînt luate în valoare absolută, sensurile reieșind din sensul vectorului de rotație și din poziția punctului față de axă.

De exemplu, pentru corpul *1*, rotația dată de $\overline{\theta}_1$ coboară porțiunea dintre A și B și o ridică pe cea dintre B și C, deci ordonatele schimbă de

semn în punctul B. În fig. 31, *a* sînt notate cu semnul plus regiunile care coboară, şi cu semnul minus — cele care se ridică.

Se observă că, pentru un acelaşi corp, ordonatele v sînt proporţionale cu distanţele punctelor la axa de rotaţie, deci pot fi reprezentate prin suprafeţele haşurate, dar trebuie menţionat că ordonatele nu sînt reprezentate la aceeaşi scară pe toată construcţia, deoarece segmentele haşurate trebuie multiplicate cu valorile unghiului θ, care se schimbă cînd se trece de la un corp la altul.

De asemenea, spre deosebire de cazul *B*, *a*) al sistemelor plane cu grade de libertate în planul sistemului, cînd proiecţiile deplasărilor pe o direcţie dată erau reprezentate prin drepte, indiferent de forma corpului, la cazul *B*, *b*) al sistemelor plane cu grade de libertate normale pe planul sistemului, deplasările normale pe plan depind de forma corpului şi nu vor mai fi reprezentate prin drepte, decît atunci cînd însuşi corpul va fi alcătuit din bare drepte.

Şi în acest caz se pot face verificări grafice. Se observă mai întîi că triunghiurile din fig. 31, *b* şi 31, *c* pot fi suprapuse într-un poligon unic, care poate fi numit *poligonul rotaţiilor* (fig. 31, *d*).

Se va considera combinaţia de corpuri *1*, *2*, *3*. Între rotaţiile respective există relaţia :

$$\bar{\theta}_{31} = \bar{\theta}_{21} + \theta_{32}.$$

În fig. 31, *d* $\bar{\theta}_{31}$ este desenat punctat, iar în fig. 31, *a* din punctul K de intersecţie a lui $\bar{\theta}_{21}$ cu $\bar{\theta}_{32}$ se duce paralela la $\bar{\theta}_{31}$ din poligonul rotaţiilor (fig. 31, *d*) şi se obţine adevărata poziţie a lui $\bar{\theta}_{31}$.

Dacă se consideră combinaţia de corpuri : *teren*, *1* şi *3*, rezultă relaţia :

$$\bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_{31},$$

relaţie care este satisfăcută în poligonul rotaţiilor (fig. 31, *d*). Deci vectorii $\bar{\theta}_3$, $\bar{\theta}_1$ şi $\bar{\theta}_{31}$ care sînt toţi construiţi în fig. 31, *a*, în adevărata poziţie trebuie să fie concurenţi, ceea ce constituie o verificare. În fig. 31, *a*, punctul lor de concurenţă este H.

§ 10. DIAGRAME DE EFORTURI

În § 7 s-au definit eforturile într-o secţiune a unei bare şi s-a văzut că determinarea lor se poate face prin reducerea tuturor forţelor şi a cuplelor exterioare de la stînga secţiunii în raport cu centrul de greutate al secţiunii de pe faţa din dreapta, sau făcînd operaţia de reducere a forţelor de la dreapta şi schimbînd sensurile, respectiv semnele.

Aceste eforturi servesc la verificarea sau la dimensionarea barei în secţiunea considerată, prin determinarea eforturilor unitare normale σ şi a eforturilor unitare tangenţiale τ.

De fapt, continuitatea fizică a barei este realizată prin întreaga suprafaţă secţionată, nu numai prin axa ei, astfel încît forţele de legătură trebuie introduse pe fiecare element de suprafaţă al secţiunii. Acestea sînt eforturile unitare σ şi τ. Reducerea tuturor eforturilor unitare σ şi τ din secţiune în raport cu centrul de greutate al secţiunii determină un torsor ale cărui componente M, N, T au fost numite eforturi. Conducerea pratică a calculelor este însă aceasta : întîi se determină eforturile rezultante sau integrale

M, N, T, şi apoi se determină modul cum ele se repartizează pe secţiune prin eforturile unitare σ şi τ.

Calea aceasta este justificată deoarece la sistemele static determinate eforturile M, N, T se determină numai prin ecuaţii statice de echilibru, pe cînd modul de repartiţie a lor pe secţiune prin eforturile unitare σ şi τ este totdeauna o problemă static nedeterminată, care nu poate fi rezolvată numai prin ecuaţii statice.

Statica Construcţiilor nu se ocupă direct de dimensionarea secţiunilor, deci, din acest punct de vedere, nu se ocupă de distribuţia tensiunilor σ şi τ pe secţiune, dar prin stabilirea eforturilor M, N, T pune la dispoziţie o parte dintre datele necesare determinării lui σ şi τ.

Determinarea eforturilor într-o singură secţiune a schemei unei construcţii este nesatisfăcătoare în general, deoarece de multe ori nu se poate cunoaşte cu anticipaţie secţiunea cea mai solicitată. De aceea, este necesară cunoaşterea eforturilor în mai multe secţiuni şi la limită în toate secţiunile schemei de calcul. Ajungem astfel la noţiunea de *diagramă de eforturi.*

Astfel, diagrama momentelor încovoietoare este determinată de curba ale cărei ordonate reprezintă mărimea momentului încovoietor în dreptul secţiunii respective. De obicei, drept linii de reper pentru reprezentarea diagramelor se iau chiar axele sistemului de bare, iar ordonatele se măsoară normal pe axe.

Uneori, însă, la sistemele simple, se poate lua ca linie de reper şi altă linie decît axa barei; de asemenea, în multe cazuri ordonatele se pot măsura şi pe altă direcţie decît cea normală pe axa barei.

Tot astfel se definesc diagramele forţelor axiale şi forţelor tăietoare, iar la sistemele în spaţiu, diagramele de eforturi corespunzătoare (N, T_z, T_y, M_y, M_z, M^t).

Pentru a construi diagramele de eforturi trebuie să se cunoască expresia acestor eforturi în orice secţiune.

Aceasta se poate face cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru interpretate vectorial, analitic sau grafic, sau prin deplasări virtuale.

Deoarece diagramele de eforturi vor constitui o problemă permanentă în toate capitolele Staticii Construcţiilor, în acest capitol se dau numai indicaţii generale concretizate pe un exemplu simplu, cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru interpretate analitic. Dezvoltarea calculelor analitice şi interpretarea grafică vor fi date la fiecare capitol în parte, iar interpretarea vectorială a ecuaţiilor de echilibru va fi arătată la sistemele în spaţiu.

Se va arăta tot în acest capitol în ce constă aplicarea deplasărilor virtuale.

a) Calculul eforturilor pe cale analitică

În fig. 32 este dată schema unei construcţii alcătuite din două bare, CB şi AD, legate rigid între ele în punctul D, astfel încît, în ansamblu, constituie un singur corp solid (geometric nedeformabil), cu o articulaţie în A şi un reazem simplu în B, deci un sistem static determinat, supus la încărcările fixe P, $P' = 3\,P$ şi $P'' = 6\,P$.

Primul pas îl constituie determinarea reacţiunilor. Pentru aceasta corpul trebuie eliberat de legăturile lui cu terenul, punîndu-se în locul legăturilor suprimate forţele de legătură corespunzătoare: în articulaţia A, două componente V_A şi H_A ale reacţiunii, după două direcţii alese, dar de

mărimi necunoscute, iar în reazemul B, o reacțiune V_B de direcție cunoscută, perpendiculară pe suprafața de lunecare, dar de mărime necunoscută (fig. 32, *b*).

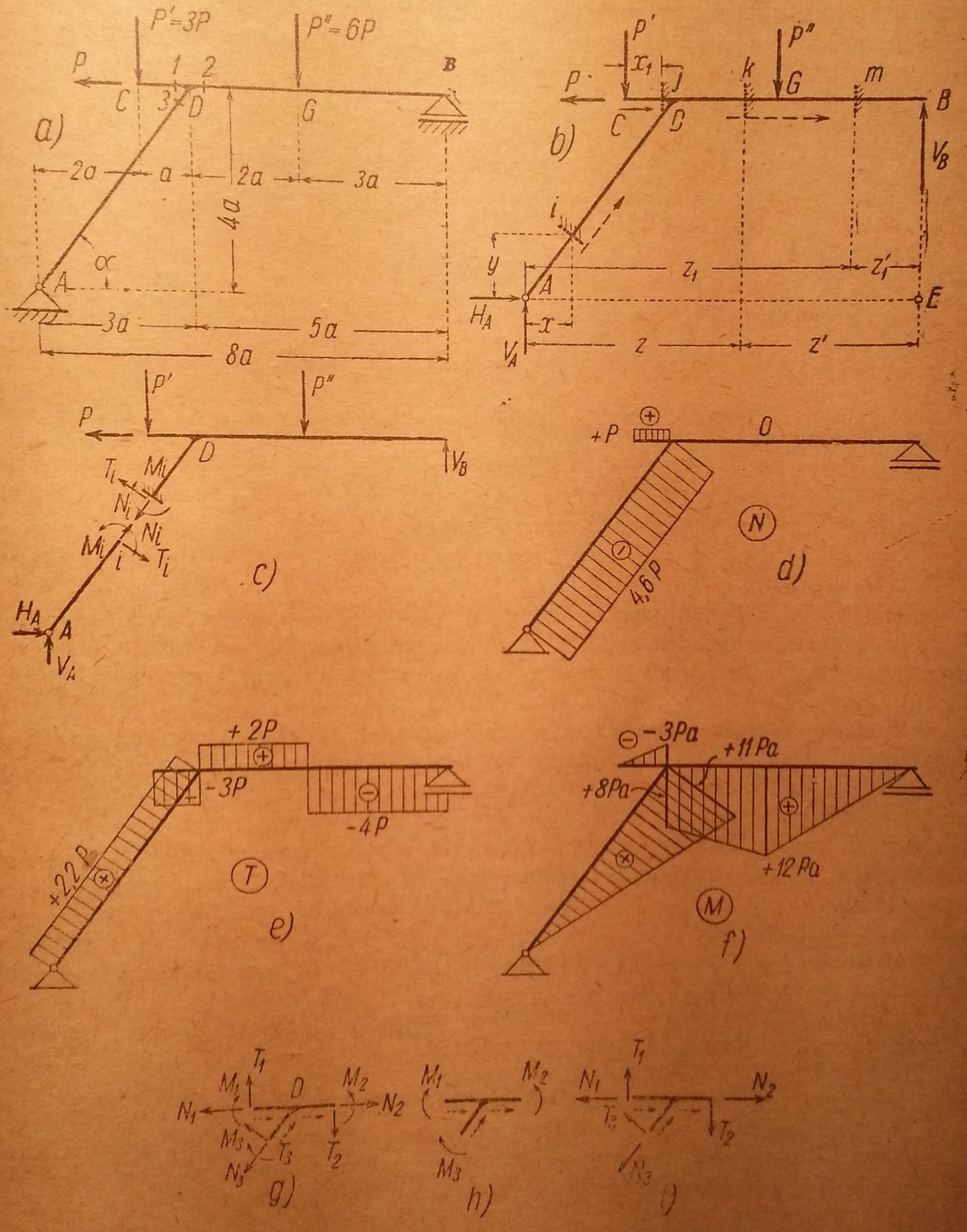


Fig. 32.

Sistemul fiind acum un corp liber se pot aplica forțelor exterioare care-l acționează, cele trei ecuații de echilibru date de Mecanica Teoretică, în cazul sistemelor de forțe în plan. Aceste trei ecuații vor determina cele trei reacțiuni necunoscute V_A, H_A și V_B.

Este indicat să se aleagă ecuațiile astfel, încît fiecare în parte să conțină cîte o singură necunoscută. Pentru aceasta se vor folosi : 1) ecuația de momente în raport cu A, în care va intra numai V_B ca necunoscută ; 2) ecuația de momente în raport cu punctul de intersecție E a lui H_A cu V_B, în care numai V_A va intra ca necunoscută, și 3) ecuația de proiecție pe normala comună la direcția lui V_A și V_B, adică ecuația de proiecție pe orizontală, în care numai H_A va intra ca necunoscută.

$$\mathfrak{M}_A) \qquad -V_B \cdot 8a - P \cdot 4a + P' \cdot 2a + P'' \cdot 5a = 0 ; \tag{2.17}$$

$$\mathfrak{M}_E) \qquad V_A \cdot 8a - P \cdot 4a - P' \cdot 6a - P'' \cdot 3a = 0. \tag{2.18}$$

$$\text{Pr. pe oriz.}) \qquad H_A - P = 0. \tag{2.19}$$

Ținînd seamă că $P' = 3P$ și $P'' = 6P$ și făcînd calculele, se obține :

$$V_B = 4P ; \quad V_A = 5P ; \quad H_A = P.$$

Ca ecuație de verificare se poate folosi ecuația de proiecție pe verticală :

$$V_A + V_B - P' - P'' = 0,$$

care este satisfăcută, deoarece :

$$5P + 4P - 3P - 6P = 0.$$

Reacțiunile fiind determinate și verificate, se poate trece la determinarea eforturilor în diferite secțiuni, fixîndu-se în prealabil sensul de parcurgere pe fiecare bară în parte, așa cum este indicat prin săgeți în fig. 32, *b*.

Pentru construirea diagramelor este necesar să găsim expresii analitice ale eforturilor care să fie valabile pe anumite intervale. Limitele intervalelor sînt determinate de punctele de discontinuitate și, în cazul de față, acestea sînt punctele de aplicație ale forțelor concentrate și punctul D numit nod, unde sînt legate rigid între ele bara înclinată AD și bara orizontală CB. Bara orizontală CB poate fi, la rîndul ei, considerată că este compusă din două bare, CD și DB, astfel încît în nodul D se întîlnesc trei bare, AD, CD și DB.

Sensul de parcurgere pe fiecare bară în raport cu care se fixează semnele eforturilor este indicat în fig. 32, *b*.

Intervalele în care vor fi stabilite expresii distincte pentru eforturi, în baza observațiilor de mai sus, vor fi : $A - D$, $C - D$, $D - G$ și $G - B$.

Expresiile eforturilor într-o secțiune i din intervalul $A - D$. Se face secțiunea din i și se introduc eforturile N_i, T_i, M_i.

Dacă se izolează cele două părți și se exprimă condițiile de echilibru pentru una dintre ele, de exemplu, pentru partea din stînga, eforturile N_i, M_i, T_i, care sînt forțe interioare față de sistemul inițial, devin forțe exterioare în raport cu partea izolată și vor intra în ecuațiile de echilibru în mod obișnuit, împreună cu celelalte forțe exterioare care se aplică corpului astfel izolat (fig. 32, *c*).

Aceasta înseamnă că eforturile de pe fața din dreapta secțiunii se obțin prin reducerea forțelor exterioare ale sistemului nesecționat, care acționează pe partea din stînga, în raport cu punctul i, astfel încît în viitor nu se vor mai arăta în mod explicit secționarea corpului și echilibrul părții din stînga,

aceste operații fiind subînțelese, ci se vor exprima eforturile pe fața din dreapta, prin reducerea forțelor exterioare din stînga secțiunii.

În baza convenției de semne stabilite, rezultă :

$$N_i = -V_A \cdot \sin\alpha - H_A \cdot \cos\alpha = -5P \cdot 0{,}8 - P \cdot 0{,}6 = -4{,}6P;$$

$$T_i = +V_A \cdot \cos\alpha - H_A \cdot \sin\alpha = +5P \cdot 0{,}6 - P \cdot 0{,}8 = +2{,}2P;$$

$$M_i = +V_A \cdot x - H_A \cdot y = +5P \cdot x - P \cdot x \operatorname{tg}\alpha = +5P \cdot x - \frac{4}{3} P \cdot x = \frac{11}{3} P \cdot x;$$

$$\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3};\quad \sin\alpha = 0{,}8;\quad \cos\alpha = 0{,}6\right).$$

Aceste expresii rămîn valabile pentru orice punct cuprins între A și D, și reprezentarea lor arată chiar diagramele de eforturi pe acest interval, cum se vede pe bara $A - D$ din fig. 32, *d*, *e*, *f*, unde N și T au valori constante, iar M variază liniar, pornind de la zero în A și ajungînd la valoarea $11Pa$ în D $(x = 3a)$.

Expresiile eforturilor într-o secțiune j **între** C **și** D. La stînga secțiunii rămîne numai porțiunea Cj cu forțele P și P' (fig. 32, *b*).

Deci :

$$N_j = +P;$$
$$T_j = -P' = -3P;$$
$$M_j = -P' \cdot x_1 = -3P \cdot x_1.$$

N_j și T_j rămîn constante pe tot intervalul CD, iar M_j variază de la zero, în C, la valoarea $-3Pa$ în D $(x_1 = a)$ și sînt reprezentate în fig. 32, *d*, *e*, *f*.

Expresiile eforturilor într-o secțiune k **între** D **și** G. La stînga secțiunii k rămîne toată porțiunea $ACDk$ cu forțele V_A, H_A, P și P' (fig. 32, *b*).

Deci :

$$N_k = -H_A + P = 0;$$
$$T_k = V_A - P' = 5P - 3P = 2P;$$
$$M_k = V_A \cdot z - P'(z - 2a) - H_A \cdot 4a =$$
$$= 5P \cdot z - 3P(z - 2a) - P \cdot 4a. \qquad (2.20)$$

M_k este o expresie liniară în z și este valabilă pentru

$$3a \leqslant z \leqslant 5a.$$

La cele două limite ale intervalului, M_k are valorile :

pentru $z = 3a$

$$M_k = 5P \cdot 3a - 3P \cdot a - P \cdot 4a = +8Pa;$$

pentru $z = 5a$

$$M_k = 5P \cdot 5a - 3P \cdot 3a - P \cdot 4a = +12Pa.$$

Expresiile eforturilor într-o secțiune m **între** G **și** B. La stînga secțiunii rămîne toată porțiunea $A - D - C - G - m$ cu forțele V_A, H_A, P, P' și P'' (fig. 32, *b*).

Deci :

$$N_m = -H_A + P = 0;$$
$$T_m = V_A - P' - P'' = 5P - 3P - 6P = -4P;$$
$$M_m = V_A \cdot z_1 - P'(z_1 - 2a) - P''(z_1 - 5a) - H_A \cdot 4a =$$
$$= 5P \cdot z_1 - 3P(z_1 - 2a) - 6P(z_1 - 5a) - P \cdot 4a.$$

M_m este o expresie liniară în z_1 și este valabilă pentru $5a \leqslant z_1 \leqslant 8a$.

La cele două limite ale intervalului, are valorile :

pentru $z_1 = 5a$

$$M_m = 5P \cdot 5a - 3P \cdot 3a - 0 - P \cdot 4a = +12Pa;$$

pentru $z_1 = 8a$

$$M_m = 5P \cdot 8a - 3P \cdot 6a - 6P \cdot 3a - P \cdot 4a = 0.$$

Operația de reducere a forțelor se putea face și de la dreapta secțiunii, dar trebuiau schimbate semnele eforturilor pentru a le obține pe fața din dreapta secțiunii. Reducerea de la dreapta ducea evident la calcule mai scurte pe porțiunea $D - B$, deoarece erau mai puține forțe.

De exemplu, între B și G :

$$N_m = 0;$$
$$T_m = -(V_B) = -4P;$$
$$M_m = -(-V_B \cdot z_1') = +4P \cdot z_1', \text{ cu valorile extreme :}$$

pentru $z_1' = 0$ $\quad M_m = 0;$

pentru $z_1' = 3a$ $\quad M_m' = +12\,Pa.$

Tot astfel între G și D :

$$N_k = 0;$$
$$T_k = -(V_B - P'') = -(4P - 6P) = +2P;$$
$$M_k = -[-V_B \cdot z' + P'' \cdot (z' - 3a)] \text{ cu valorile extreme :}$$

pentru $z' = 3a$ $\quad M_k = +12\,Pa;$

pentru $z' = 5a$ $\quad M_k = -(-4P \cdot 5a + 6P \cdot 2a) = +8Pa.$

Reprezentarea diagramelor de eforturi N, T, M este arătată în fig. 32, *d*, 32, *e* și 32, *f*, după criteriile următoare : axele barelor au servit ca linii de reper, iar ordonatele normale pe axă reprezintă valoarea eforturilor din secțiunea corespunzătoare. Semnele se definesc în raport cu sensul de parcurgere pe bare.

Astfel :

La diagrama M, momentele încovoietoare pozitive se reprezintă în jos, iar cele negative, în sus, față de observatorul așezat astfel, încît sensul de parcurgere să fie dirijat de la stînga spre dreapta. Aceasta corespunde semnificației fizice următoare : ordonatele diagramei momentelor încovoietoare se desenează pe partea zonei întinse a secțiunii. Astfel, pe porțiunea CD zona întinsă a secțiunii este în sus, față de săgeată, iar pe porțiunea ADB zona întinsă este în jos, față de săgeată.

Dacă se respectă această convenție de a desena totdeauna diagrama momentelor de partea zonei întinse a secțiunii, se poate renunța la a mai

pune semne pe diagrama momentelor încovoietoare și nu mai este nevoie să se țină seamă de sensul de parcurgere.

Deocamdată se vor pune semne și se va ține seamă de sensul de parcurgere, dar se va observa mai tîrziu, la tratarea sistemelor static nedeterminate prin metoda deplasărilor, că este mai convenabil să se renunțe la semne.

Pentru diagramele N și T se poate adopta convenția ca N și T pozitive să fie reprezentate deasupra liniei de reper, iar N și T negative, dedesubtul ei, în raport cu sensul de parcurgere, dar nu are o importanță prea mare dacă se face altfel.

Ecuații de verificare a nodului rigid. Punctul unde se întîlnesc două sau mai multe bare se numește nod.

Dacă legătura dintre bare în nodul teoretic se face prin articulații, nodul se numește articulat, iar dacă legătura dintre bare, în nodul teoretic, se face prin încastrare, nodul se numește rigid sau încastrat. Într-un nod articulat, prin deformările elastice ale barelor, unghiurile dintre bare se pot modifica, pe cînd într-un nod rigid unghiurile dintre bare nu se modifică prin deformările elastice ale barelor.

Dacă se secționează toate barele din jurul nodului rigid, punîndu-se eforturile respective, nodul este un corp liber supus unui sistem de forțe și cuple care trebuie să se găsească în echilibru.

Astfel, dacă din fig. 32, *a* se izolează nodul *D*, în cele trei secțiuni *1*, *2*, *3* trebuie introduse eforturile presupuse pozitive față de sensul de parcurgere, așa cum se arată în fig. 32, *g*.

Cele trei ecuații de echilibru care sînt : o ecuație de momente și două ecuații de proiecții, se separă în două grupe, datorită faptului că forțele axiale nu dau momente în raport cu centrul nodului, iar forțele tăietoare, de asemenea, nu dau momente, deoarece secțiunile sînt infinit vecine nodului.

În ecuația de momente nu intervine deci nici o forță, ci numai momentele încovoietoare, astfel încît această ecuație se poate scrie fără a mai reprezenta forțele, așa cum se vede în fig. 32, *h*. De asemenea, pentru ecuațiile de proiecții ale forțelor nu este nevoie să se reprezinte momentele (fig. 32, *i*).

În cazul de față, din echilibrul momentelor din nod (fig. 32, *h*) rezultă că :

$$M_1 - M_2 + M_3 = 0,$$

ceea ce se verifică pe diagrama momentelor încovoietoare unde :

$$M_1 = -3Pa\,;\quad M_2 = +8Pa\,;\quad M_3 = +11Pa,$$

deoarece :

$$-3Pa - (+8Pa) + 11Pa = 0.$$

Din ecuațiile de proiecții pe verticală și pe orizontală ale forțelor din nod (fig. 32, *i*) rezultă :

$$T_1 - T_2 - N_3 \sin\alpha + T_3 \cos\alpha = 0\,;$$
$$-N_1 + N_2 - N_3 \cos\alpha - T_3 \sin\alpha = 0.$$

Din diagramele de eforturi se obține :

$$T_1 = -3P\,;\qquad T_2 = +2P\,;\qquad T_3 = +2{,}2P\,;$$
$$N_1 = +P\,;\qquad N_2 = 0\,;\qquad N_3 = -4{,}6P.$$

Deci,

$$-3P-2P+4{,}6P\cdot 0{,}8+2{,}2P\cdot 0{,}6=-5P+3{,}68P+1{,}32P=0;$$
$$-P+0+4{,}6P\cdot 0{,}6-2{,}2P\cdot 0{,}8=-P+2{,}76P-1{,}76P=0.$$

Observaţie. Diagramele de eforturi au fost determinate prin interpretarea grafică a unor expresii analitice. Fiecare expresie analitică reprezintă o funcţie continuă. Forţele concentrate, schimbarea expresiei care reprezintă intensitatea unei încărcări, schimbarea axei barei, nodurile etc., reprezintă puncte de discontinuitate ale funcţiilor analitice care reprezintă eforturile.

De aceea, este necesar să se împartă sistemul de bare într-un număr de intervale, astfel încît pe fiecare interval să se poată scrie o expresie analitică a efortului căutat, valabilă pe tot intervalul.

b) Utilizarea deplasărilor virtuale pentru determinarea reacţiunilor şi a eforturilor într-o secţiune

În acest caz, se suprimă o legătură simplă corespunzătoare reacţiunii sau efortului căutat, se introduce forţa sau cuplul de legătură corespunzător; sistemului transformat astfel într-un sistem cinematic cu un grad de libertate i se dă o deplasare virtuală corespunzătoare legăturilor rămase şi se exprimă că lucrul mecanic total prin această deplasare este nul.

Se va determina pe această cale reacţiunea V_B din exemplul precedent.

Se suprimă reazemul simplu B şi se introduce reacţiunea V_B (fig. 33, *a*). Sistemul se poate roti în jurul articulaţiei din A cu un unghi infinit mic θ. Punctele de aplicaţie ale forţelor P, P', P'' şi V_B se deplasează; lucrul mecanic total prin aceste deplasări trebuie să fie nul.

Deplasarea oricărui punct M al corpului prin rotaţia cu un unghi θ în jurul lui A (fig. 33, *d*) este:

$$\overline{MM'}=\delta=r\,\theta,$$

în care r este distanţa de la centrul de rotaţie A la punctul considerat.

Pentru lucrul mecanic interesează însă proiecţia deplasării pe direcţia forţei respective, astfel încît notînd cu β unghiul dintre r şi normala la direcţia forţei, proiecţia deplasării va fi:

$$MM''=\delta'=\delta\cos\beta=(r\cos\beta)\cdot\theta=d\cdot\theta,$$

în care d este distanţa de la centrul de rotaţie A la forţa respectivă.

Ecuaţia lucrului mecanic virtual aplicată în cazul din fig. 33, *a* va duce la:

$$-P\cdot d\cdot\theta+P'\cdot d_1\cdot\theta+P''\cdot d_2\cdot\theta-V_B\cdot d_3\cdot\theta=0.$$

Dacă se simplifică cu θ şi se înlocuiesc distanţele d, d_1, d_2, d_3 şi forţele P', P'' cu valorile lor, se obţine o relaţie echivalentă cu (2.17):

$$-P\cdot 4a+3P\cdot 2a+6P\cdot 5a-V_B\cdot 8a=0,$$

de unde rezultă

$$V_B=4P.$$

Determinarea reacţiunii H_A (fig. 33, *b*). Se suprimă în articulaţia din A legătura corespunzătoare lui H_A, adică se transformă articulaţia într-un reazem simplu, care permite deplasarea pe orizontală, şi se introduce forţa de legătură H_A corespunzătoare. În acest caz, singura deplasare posibilă

este o mișcare de translație orizontală. Notînd cu δ această deplasare, ecuația de lucru mecanic va fi:

$$+ P \cdot \delta - H_A \cdot \delta = 0,$$

de unde rezultă

$$H_A = P.$$

P' și P'' nu dau lucru mecanic deoarece deplasarea este normală pe direcția lor.

Determinarea momentului încovoietor în secțiunea I (fig. 33, *c*). Se suprimă în secțiunea I legătura corespunzătoare momentului încovoietor,

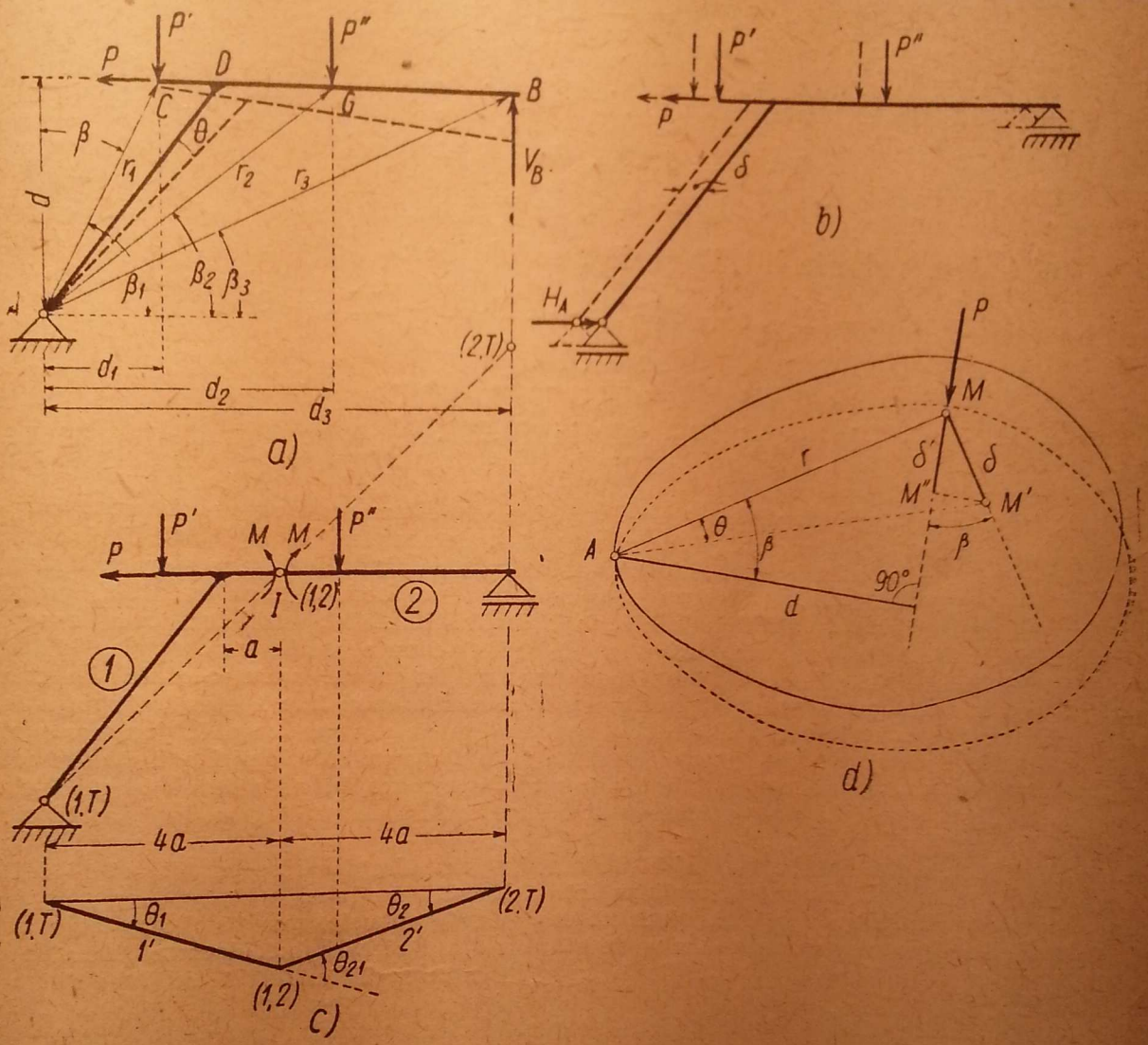


Fig. 33.

adică se introduc o articulație și cele două momente M corespunzătoare legăturii suprimate. Se obține astfel un sistem cinematic cu un singur grad de libertate.

Pentru exprimarea lucrului mecanic produs de forțe și de momente, trebuie să se obțină unghiurile; aceasta se face cu ușurință prin epura deplasărilor pe o direcție dată, cu ajutorul centrelor $(1, T)$ $(1, 2)$ $(2, T)$.

Conform celor stabilite, ecuația de lucru mecanic va fi exprimată astfel:

$$- P \cdot 4a \cdot \theta_1 + P' \cdot 2a \cdot \theta_1 + P'' \cdot 3a \cdot \theta_2 - M \cdot \theta_{21} = 0. \qquad (2.21)$$

În ecuația (2.21), P și P' se aplică pe porțiunea *1* care se rotește cu unghiul θ_1; lucrul mecanic este produsul dintre forță, distanța de la centrul de rotație la forță și unghiul de rotație; analog, P'' se aplică pe corpul *2* care se rotește cu θ_2, iar perechea de momente M din secțiunea *I* produce lucrul mecanic $-M \cdot \theta_{21}$, deoarecè se poate presupune că *1* stă pe loc, și *2* se rotește față de *1* cu unghiul θ_{21} în sens invers momentului M care se aplică pe fața aparținînd corpului *2*. Același rezultat se obține dacă se presupune că momentul M de pe corpul *1* se rotește cu θ_1, iar cel de pe corpul *2*, cu θ_2:

$$-M\theta_1 - M\theta_2 = -M(\theta_1 + \theta_2) = -M\theta_{21}$$

deoarece $\theta_{21} = \theta_1 + \theta_2$.

Dacă se elimină unghiurile θ din ecuația (2.21) și din relațiile:

$$\theta_1 \cdot 4a = \theta_2 \cdot 4a, \text{ deci } \theta_1 = \theta_2 \text{ și}$$
$$\theta_{21} = \theta_1 + \theta_2 = 2\theta_1$$

și se înlocuiesc valorile lui P' și P'', se obține:

$$-P \cdot 4a + 3P \cdot 2a + 6P \cdot 3a - 2M = 0$$

sau

$$M = 10\,Pa,$$

rezultat care se obține și din relația (2.20).

Observații.

1. La aplicarea principiului deplasărilor virtuale nu este necesar să se elibereze corpul de toate legăturile, deoarece lucrul mecanic produs de reacțiuni în legăturile fără frecări, nesuprimate, prin deplasările compatibile cu legăturile, este nul. În adevăr, la un reazem simplu deplasarea compatibilă este normală pe reacțiune, deci nu produce lucru mecanic, iar la o articulație, deplasarea compatibilă este rotația în jurul articulației, astfel încît reacțiunea nu produce lucru mecanic, deoarece punctul ei de aplicație nu se deplasează.

Tot astfel, eforturile ale căror legături nu se suprimă nu produc lucru mecanic. În exemplul de mai sus cînd s-a exprimat lucrul mecanic al momentului încovoietor în *I*, nu a fost introdus lucrul mecanic al forței axiale și al forței tăietoare din secțiunea *I*, deoarece punctele de aplicație ale acestora de pe cele două fețe din *I* nu au suferit nici o deplasare relativă după direcția tangentei sau normalei la bară; în acest caz, lucrul mecanic al unui efort de pe o față este egal și de sens contrar cu al aceluiași efort de pe cealaltă față, astfel încît se anulează.

În aceasta constă marele avantaj al deplasărilor virtuale, deoarece permite să se determine direct un anumit efort sau reacțiune într-o anumită secțiune.

2. Din modul cum se aplică principiul deplasărilor virtuale, rezultă că acesta nu este indicat pentru determinarea diagramelor de eforturi din încărcări fixe, deoarece, de cîte ori se trece de la o secțiune la alta și de la un efort la altul, trebuie să se schimbe sistemul cinematic.

Deci, în mod practic, deplasările virtuale nu se folosesc pentru determinarea diagramelor de eforturi din încărcări fixe.

§ 11. LINII DE INFLUENȚĂ

În paragraful precedent au fost tratate eforturile care apar în diferitele secțiuni ale unui sistem de bare din acțiunea sarcinilor care aveau poziții fixe pe bare. În construcții însă, cele mai multe dintre sarcinile utile au poziții mobile, cum sînt, de exemplu, vehiculele pe un pod.

În acest caz se pune problema ca într-o secțiune dată să se găsească situațiile cele mai defavorabile pentru eforturi în funcție de diferitele poziții

ale convoiului mobil de sarcini. Această problemă se tratează cu ajutorul liniilor de influență, la a căror noțiune se ajunge în modul următor.

Din ipotezele de bază ale Staticii Construcțiilor a rezultat că se poate aplica „principiul independenței acțiunilor" din Mecanică pentru reacțiuni și eforturi, sub numele cunoscut de „suprapunerea liniară a efectelor".

În acest caz, într-o secțiune x a unui sistem de bare (de exemplu fig. 34, *a*), un efort sau o reacțiune, notată în general cu S_x, se va putea exprima ca o funcție liniară de sarcinile independente $F_1, F_2, \ldots, F_n$ care acționează sistemul de bare în secțiunile $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$, în felul următor:

$$S_x = \eta_{x1} \cdot F_1 + \eta_{x2} \cdot F_2 + \ldots + \eta_{xi} \cdot F_i + \ldots + \eta_{xn} \cdot F_n. \qquad (2.22)$$

Semnificația coeficienților η_{xi} se deduce prin particularizare.

Pentru a-l determina pe η_{x1}, se face $F_1 = 1$ și $F_2 = F_3 = \ldots = F_i = \ldots F_n = 0$. În acest caz

$$S_x = \eta_{x1} \cdot 1,$$

adică η_{x1} este efortul sau reacțiunea care apare în secțiunea x, cînd în secțiunea 1 am pus după direcția lui F_1 o forță egală cu unitatea.

Tot astfel, particularizînd $F_i = 1$ și toate celelalte forțe $F_1 = F_2 = \ldots = F_{i-1} = F_{i+1} = \ldots = F_n = 0$, se obține:

$$S_x = \eta_{xi} \cdot 1,$$

adică η_{xi} este efortul care apare în secțiunea x, cînd în secțiunea i am aplicat după direcția lui F_i o forță egală cu unitatea, și așa mai departe.

Deci, pentru a putea aplica expresia (2.22) trebuie să se cunoască valoarea efortului în secțiunea x, pentru încărcarea cu forța $F = 1$, pe rînd, în fiecare din pozițiile și direcțiile corespunzătoare forțelor din secțiunile $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$.

În general, forțele $F_1, F_2 \ldots, F_i \ldots, F_n$ sînt paralele, avînd direcția verticală, în care caz se notează cu P, și ele pot ocupa orice poziție pe o așa-numită linie de încărcare a construcției, astfel încît evaluarea expresiei (2.22) necesită cunoașterea valorii efortului în secțiunea x pentru orice poziție a forței egale cu unitatea ($P = 1$) de direcție dată, pe linia de încărcare.

Dacă se convine să se reprezinte, de la o dreaptă de reper care corespunde liniei de încărcare, în dreptul poziției sarcinii $P = 1$, valoarea efortului din secțiunea x, curba descrisă prin deplasarea sarcinii unitare se numește *linia de influență a efortului* S_x.

Se remarcă de la început diferența esențială dintre o diagramă de eforturi și o linie de influență. În timp ce în diagrama eforturilor ordonata din secțiunea i reprezintă efortul din aceeași secțiune i, pentru o poziție fixă a sarcinilor, în linia de influență ordonata din secțiunea i reprezintă efortul din secțiunea x provocat de forța $P = 1$ aplicată în i.

Odată cunoscută linia de influență a efortului S_x, pentru o linie de încărcare dată, se pot determina valorile efortului S_x pentru orice sistem de sarcini de direcția sarcinii unitare pentru care este construită linia de influență și care se aplică pe linia de încărcare, cu expresia (2.22).

Astfel, dacă linia de influență a efortului S_x pentru linia de încărcare $A - B$ este cea din fig. 34, *b* și se aplică sistemul de sarcini concentrate P_1, P_2, P_3 în secțiunile $1, 2, 3$, efortul S_x este:

$$S_x = \eta_{x1} \cdot P_1 + \eta_{x2} \cdot P_2 + \eta_{x3} \cdot P_3, \qquad (2.22')$$

în care $\eta_{x1}, \eta_{x2}, \eta_{x3}$ se măsoară pe diagrama liniei de influență.

Dacă pe porțiunea $a - b$ (fig. 34, *c*) se aplică o sarcină distribuită după o lege oarecare, efortul S_x are valoarea dedusă din trecerea la limită a expresiei (2.22) :

$$S_x = \int_a^b p_i \eta_{xi}\, ds, \tag{2.23}$$

iar dacă sarcina este uniform distribuită pe intervalul $a - b$ (fig. 34, *d*) :

$$S_x = \int_a^b p\, \eta_{xi}\, ds = p \int_a^b \eta_{xi}\, ds = p \cdot \Omega_{ab}, \tag{5.24}$$

în care Ω_{ab} este suprafața liniei de influență pe intervalul pe care se aplică sarcina uniform distribuită.

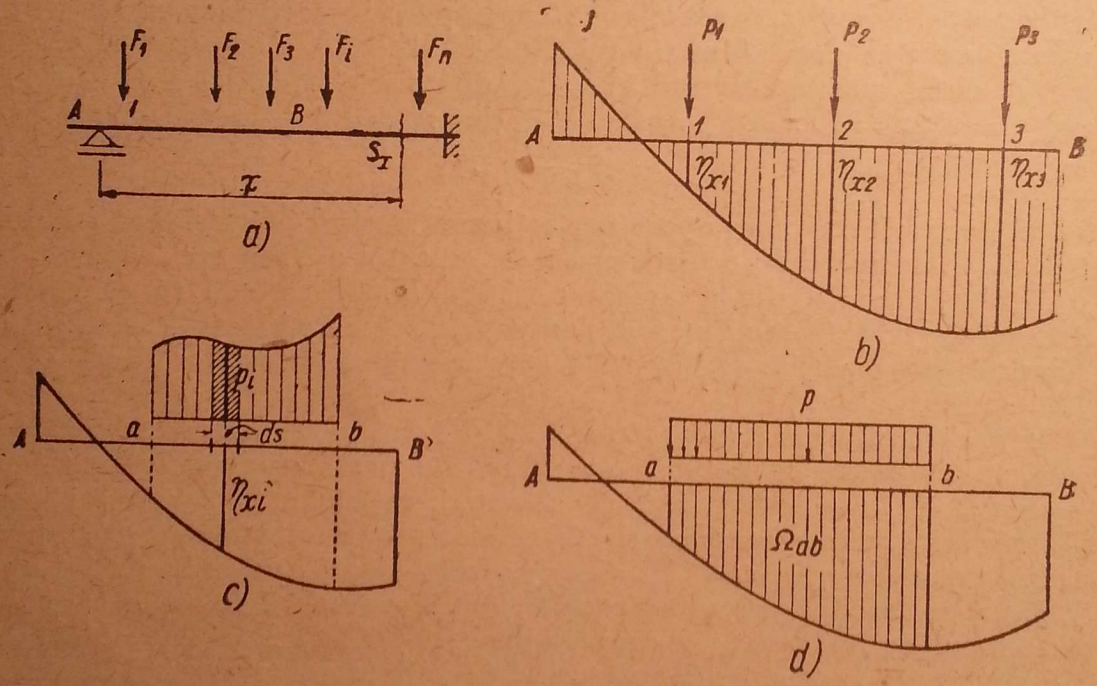


Fig. 34.

În problemele concrete, după natura eforturilor N, T, M, se vor schimba și notațiile pentru ordonatele notate mai sus cu η, în modul următor :

Pentru forțele axiale :

$$N_x = n_{x1} \cdot P_1 + n_{x2} \cdot P_2 + \ldots + n_{xn} \cdot P_n. \tag{2.25}$$

Pentru forțele tăietoare :

$$T_x = t_{x1} \cdot P_1 + t_{x2} \cdot P_2 + \ldots + t_{xn} \cdot P_n. \tag{2.26}$$

Pentru momentele încovoietoare :

$$M_x = m_{x1} \cdot P_1 + m_{x2} \cdot P_2 + \ldots + m_{xn} \cdot P_n. \tag{2.27}$$

Coeficienții η_{xi}, n_{xi}, t_{xi}, m_{xi} se numesc coeficienți de influență și totdeauna sînt notați cu litere mici, purtînd doi indici.

Faptul că este scris cu literă mică înseamnă că este provocat de o cauză egală cu unitatea; primul indice arată locul unde se produce efortul, iar al doilea, locul unde se găsește cauza care provoacă acest efort.

Dimensiunile acestor coeficienți pot fi interpretate în două moduri: Dacă $P_1, P_2, \ldots$, se consideră că au dimensiunea de forță, t_{xi} și n_{xi} sînt numere fără dimensiune, iar m_{xi} are dimensiune de lungime. Această interpretare este utilă în problemele curente satic determinate.

Dacă însă $P_1, P_2, \ldots$, etc., se consideră ca niște numere fără dimensiune, care amplifică unitatea de forță: $P_i = P_i \cdot 1$, iar 1, care poartă dimensiunea de forță, se asociază coeficientului de influență, atunci coeficienții n_{xi} și t_{xi} au dimensiunea de forță, iar coeficientul m_{xi}, dimensiunea de moment. Această interpretare are avantaje în sistemele static nedeterminate.

Problema liniilor de influență, alături de diagramele de eforturi, este, de asemenea, o problemă permanentă, care va fi tratată în toate capitolele Staticii Construcțiilor.

În paragraful de față se dau numai metodele generale de rezolvare, aplicate pe exemple simple.

Și aici avem la dispoziție atît ecuațiile de echilibru, aplicate analitic, cît și principiul deplasărilor virtuale.

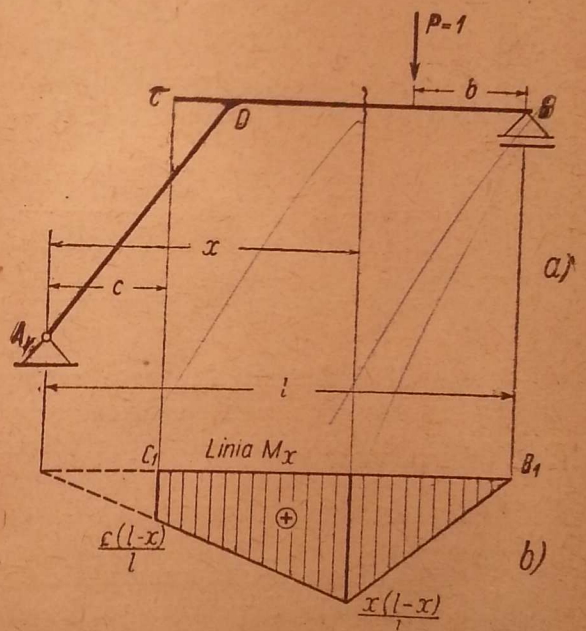


Fig. 35.

A. DETERMINAREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ PE CALE ANALITICĂ

Se va determina linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea x, pentru o forță verticală $P = 1$, care se poate deplasa între B și C, pe sistemul din fig. 35, *a*.

Pentru aceasta se va scrie expresia analitică a momentului încovoietor M_x, pentru un caz particular de încărcare cu o singură forță verticală $P=1$, a cărei poziție se poate preciza printr-un parametru. Acest parametru este distanța b față de reazemul B. Avem două cazuri distincte pentru expresia momentului încovoietor: cînd forța $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii x și cînd $P=1$ se găsește la stînga secțiunii x.

Cazul cînd $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii x. Este indicat să se scrie expresia momentului încovoietor în secțiunea x pornind de la stînga.

În articulația A apare o reacțiune verticală, deoarece V_B și $P = 1$ sînt, de asemenea, verticale

$$V_A = \frac{1 \cdot b}{l},$$

iar

$$M_x = V_A \cdot x = \frac{b}{l} x. \qquad (2.28)$$

Această expresie este valabilă atît timp cît forța $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii x: $0 \leqslant b \leqslant (l - x)$ și reprezintă o dreaptă cu valorile extreme:

pentru $b = 0$ $\quad M_x = 0$

pentru $b = l - x$ $\quad M_x = \frac{x(l-x)}{l}$.

Cazul cînd $P = 1$ se găsește la stînga secțiunii x. În acest caz este indicat să se scrie expresia momentului încovoietor în secțiunea x pornind de la dreapta:

$$V_B = \frac{1 \cdot (l - b)}{l},$$

iar

$$M_x = -[-V_B(l - x)] = \frac{(l - b)}{l}(l - x). \qquad (2.29)$$

Această expresie este valabilă atît timp cît forța $P = 1$ se găsește în stînga secțiunii x: $(l - x) < b < (l - c)$ și reprezintă o dreaptă cu valorile extreme:

pentru $b = l - x$ $\quad M_x = \frac{x(l-x)}{l}$

pentru $b = l - c$ $\quad M_x = \frac{c(l-x)}{l}$.

Linia de influență M_x este reprezentată complet în fig. 35, *b*.

Se convine ca pentru orice linie de influență ordonatele pozitive să se reprezinte sub linia de reper, și cele negative, deasupra ei.

B. DETERMINAREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ PRIN DEPLASĂRI VIRTUALE

Înainte de a trece la exemplificare se poate da soluția generală a liniilor de influență prin deplasări virtuale.

Se suprimă legătura corespunzătoare efortului, sau reacțiunii, a cărei linie de influență trebuie determinată și se introduc forțele de legătură corespunzătoare. Din punct de vedere static, sistemul a rămas în echilibru prin introducerea forțelor de legătură. Din punct de vedere cinematic, sistemul s-a transformat într-un mecanism cu un singur grad de libertate. În deplasarea virtuală corespunzătoare acestui grad de libertate sînt numai două cauze care provoacă lucru mecanic: forța unitară $P = 1$, care se găsește undeva pe linia de încărcare, și efortul introdus în legătura suprimată, astfel încît ecuația de lucru mecanic va avea numai doi termeni.

Fie S_x efortul din secțiunea x, Δ_x deplasarea virtuală corespunzătoare efortului S_x în gradul de libertate introdus și v_i deplasarea punctului de aplicație al forței $P = 1$, după direcția acestei forțe, forță care se găsește în punctul i al liniei de încărcare.

Se poate alege totdeauna sensul lui Δ_x, astfel, încît lucrul mecanic $S_x \cdot \Delta_x$ să fie negativ. În acest caz, ecuația de lucru mecanic devine:

$$-S_x \cdot \Delta_x + 1 \cdot v_i = 0, \qquad (2.30)$$

de unde rezultă :

$$S_x = + \frac{v_i \cdot 1}{\Delta_x} . \qquad (2.31)$$

Se știe că v_i și Δ_x au ca factor comun parametrul deplasării sistemului (cum s-a văzut la § 9), care deci se va simplifica. Aceasta înseamnă că se poate lua o valoare care să convină în mod special pentru Δ_x. Se va lua $\Delta_x = 1$.

În acest caz expresia (2.31) devine :

$$S_x = + v_i \cdot 1, \qquad (2.32)$$

care arată că linia de influență a efortului S_x este proiecția deplasărilor liniei de încărcare după direcția forței $P = 1$, cînd s-a dat o deplasare $\Delta_x = 1$.

Ecuația (2.32) indică, în același timp, și semnul liniei de influență, deoarece membrul al doilea al ecuației provine din lucru mecanic. Cînd deplasările v_i vor fi în sensul forței $P = 1$, atunci $v_i \cdot 1$ va fi pozitiv.

În rezumat, linia de influență a unui efort S_x prin deplasări virtuale se determină astfel : se suprimă legătura corespunzătoare efortului și se dă o deplasare virtuală $\Delta_x = 1$, de sens contrar efortului S_x, pentru ca lucrul mecanic al efortului să fie negativ. Diagrama deplasărilor liniei de încărcare, după direcția lui $P = 1$, este tocmai linia de influență a efortului S_x căutat, cu scara și semnul determinate. Scara este dată de condiția $\Delta_x = 1$, iar semnul apare automat : părțile care se deplasează în sensul forței $P = 1$ (în jos) au semnul plus, și cele care se deplasează în sus, semnul minus.

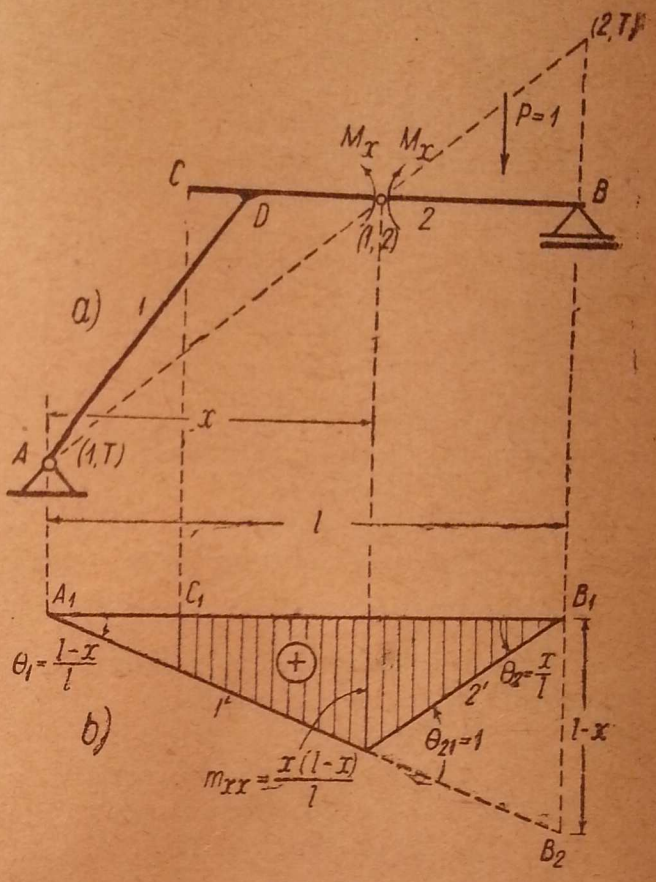


Fig. 36.

Se va aplica acest lucru la exemplul precedent reprezentat în fig. 36.

În secțiunea x se suprimă legătura corespunzătoare momentului încovoietor, adică din punct de vedere cinematic se introduce o articulație, iar din punct de vedere static se introduce o pereche de momente M_x. Sistemul cinematic are centrele $(1, T)$, $(1, 2)$ și $(2, T)$ din fig. 36, *a*.

Se va da o deplasare virtuală, astfel încît M_x să producă lucru mecanic negativ. Momentul M_x de pe fața corpului *2* rotește în sensul orar față de corpul *1*, deci rotația $\theta_{21} = 1$ a corpului *2* față de *1* va trebui să fie în sens invers acelor unui ceasornic, adică articulația se va lăsa în jos, așa cum este arătat în epura deplasărilor (fig. 36, *b*). Cu aceasta epura deplasărilor pe verticală este terminată. Din ea se păstrează numai porțiunea corespunzătoare liniei de încărcare $C - B$, care va constitui chiar linia de influență a lui M_x cu semnul și cu scara determinate. Semnul este plus, deoarece epura deplasărilor a coborît sub linia de reper, iar scara se deduce din $\theta_{21} = 1$.

Faptul că s-a considerat $\theta_{21} = 1$ nu schimbă cu nimic calculele pentru infiniții mici, deoarece θ_{21} este de fapt un infinit mic, iar valoarea 1a provenit din simplificarea lui θ_{21} cu el însuși, așa cum s-a specificat la ecuația (2.32).

Astfel se deduc imediat valorile necesare pentru ordonate; de exemplu:

$$B_1B_2 = l \cdot \theta_1 = (l - x)\,\theta_{21} = (l - x); \qquad \theta_1 = \frac{l - x}{l}.$$

Analog: $\theta_2 = \frac{x}{l}$.

Ordonata în dreptul secțiunii x este:

$$m_{xx} = x \cdot \theta_1 = \frac{x\,(l - x)}{l}.$$

Observație. Din modul cum se deduc liniile de influență prin deplasări virtuale se întrevede marele avantaj față de calea analitică la sistemele compuse din mai multe corpuri, deoarece, prin deplasări virtuale, linia de influență se obține direct din epura deplasărilor pe toată construcția, pe cînd pe cale analitică trebuie împărțită construcția într-o serie de zone, și pentru fiecare zonă urmează să se calculeze alte expresii, ceea ce devine greoi la sistemele mai complicate.

C. DETERMINAREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ CU AJUTORUL DIAGRAMEI VITEZELOR (DEPLASĂRILOR)

Principiul deplasărilor virtuale se poate aplica și prin așa-numita diagramă a vitezelor, care este utilă în unele cazuri de sisteme cu multe bare, unde determinarea tuturor centrelor instantanee este dificilă.

Sînt necesare unele observații preliminare.

Dacă un corp plan se rotește în planul său în jurul centrului instantaneu I cu viteza unghiulară ω (fig. 37), atunci vitezele punctelor a, b, c sînt:

$$v_a = r_a \cdot \omega,$$
$$v_b = r_b \cdot \omega,$$
$$v_c = r_c \cdot \omega,$$

avînd direcțiile normale pe razele r_a, r_b, r_c, de unde se deduce:

$$\frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} = \frac{v_c}{r_c} = \ldots = \omega.$$

Dacă se rabat aceste viteze cu 90° se obțin punctele a', b', c' pe razele vectoare, astfel încît triunghiul $a'\,b'\,c'$ are laturile paralele cu triunghiul abc, deoarece:

$$\frac{aa'}{r_a} = \frac{bb'}{r_b} = \frac{cc'}{r_c}.$$

Deoarece vitezele sînt proporționale cu deplasările infinit mici $\left(v = \frac{ds}{dt}\right)$, se poate spune că segmentele aa', bb', cc' reprezintă deplasările infinit mici rabătute cu 90° ale punctelor a,b,c și amplificate la o scară convenabilă pentru calcule, astfel încît la această metodă se va folosi fie expresia de viteze, fie expresia de deplasări infinit mici.

Din această construcție simplă rezultă că, dacă la un corp geometric nedeformabil, se cunosc : o deplasare (sau viteza) aa' rabătută și centrul instantaneu I (bineînțeles pe direcția aa'), atunci se poate cunoaște deplasarea (sau viteza) rabătută a a oricărui punct b al corpului. În adevăr, se unește b cu I, și din a' se duce o paralelă la ab. Intersecția cu bI determină punctul b', și bb' reprezintă deplasarea rabătută a punctului b. De asemenea, dacă se cunosc două deplasări rabătute aa' și bb' (bineînțeles, astfel încît $ab \parallel a'b'$), se poate determina deplasarea rabătută a oricărui punct c, fără să se mai utilizeze centrul instantaneu. Din a' se duce paralela la ac și din b' o paralelă la bc. Intersecția lor determină punctul c' și segmentul cc'.

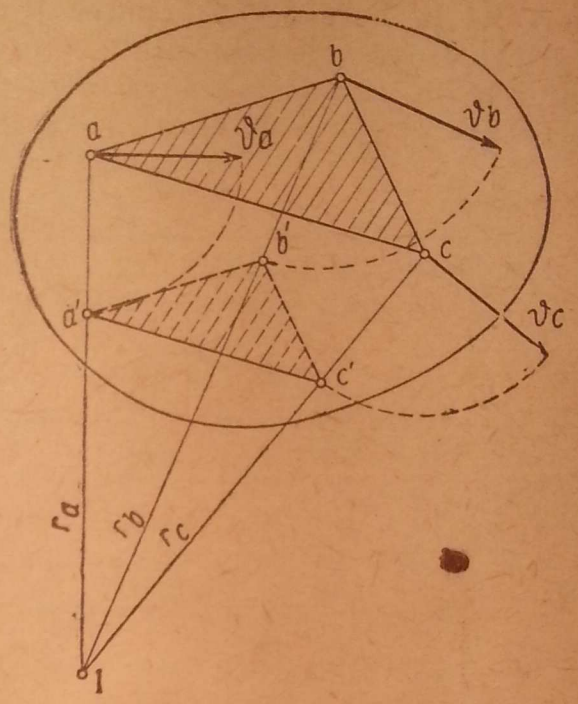


Fig. 37.

Punctele a', b', c' se numesc puncte rabătute ale punctelor a, b, c.

Dacă într-un punct m acționează o forță oarecare F, iar punctul se deplasează cu distanța mm'' (fig. 38) după direcția vitezei, lucrul mecanic produs de forța F este :

$$L = F \cdot mm_1,$$ m_1 fiind proecția lui m'' pe forța F.

După rabaterea deplasării mm'' cu 90° în mm', ducînd prin m' o perpendiculară $m'm_2$ pe forța F, rezultă $mm_1 = m'm_2$, și notînd $m'm_2 = \delta$, se obține

$$L = F \cdot \delta. \qquad (2.33)$$

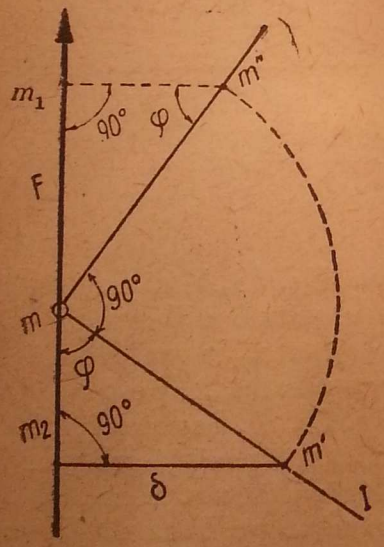


Fig. 38.

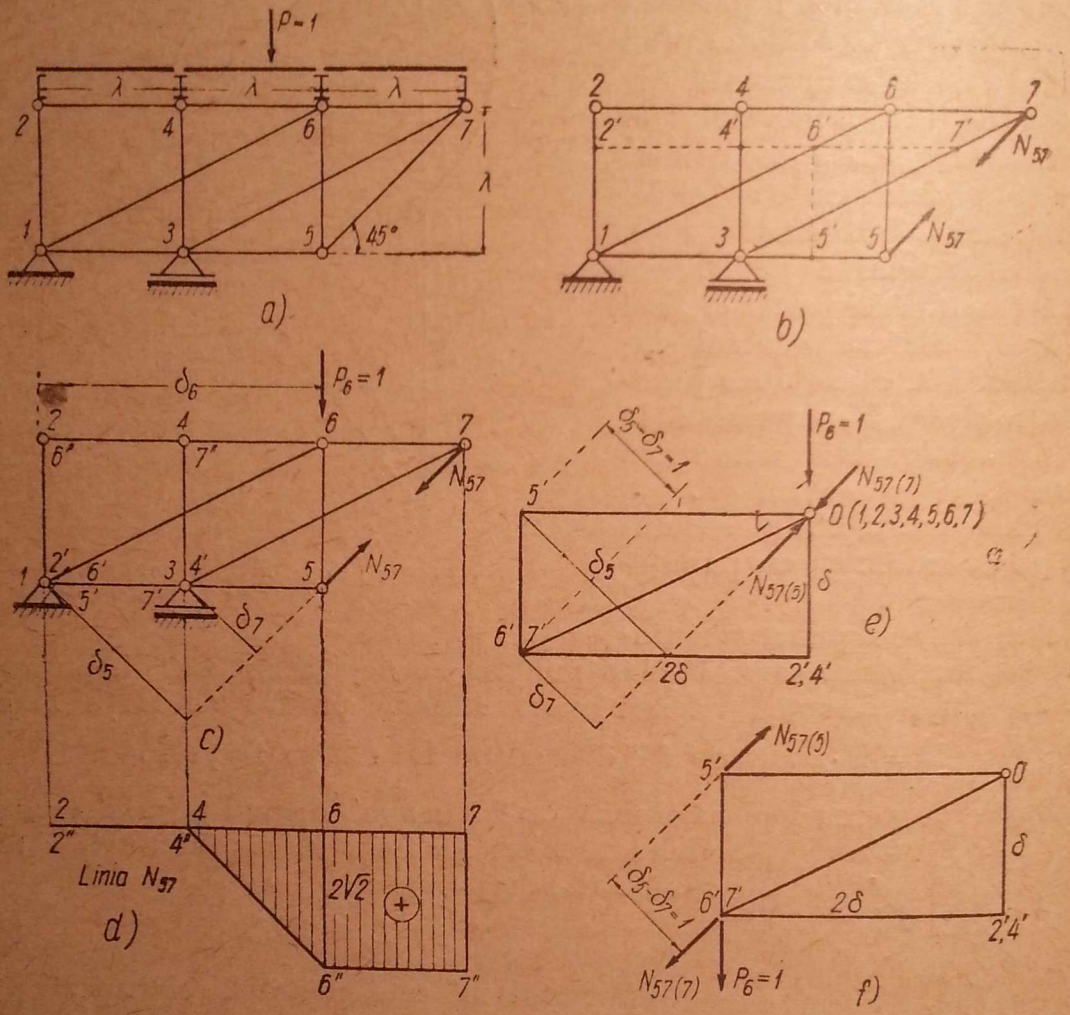
Punctul m' este punctul rabătut al punctului m.

Dacă mm'' reprezintă o deplasare infinitesimală, expresia (2.33) reprezintă lucru mecanic, dar dacă mm'' este chiar viteza lui m, expresia (2.33) reprezintă produsul dintre forța și proiecția vitezei pe direcția forței, din care, prin înmulțirea cu dt, se poate deduce lucrul mecanic. Evident, această înmulțire nu este necesară pentru calculul de față.

Din expresia (2.33) rezultă că lucrul mecanic al forței F, aplicată în m, are ca expresie chiar momentul forței F în raport cu punctul rabătut al lui m. Semnul expresiei (2.33) este plus sau minus, după cum momentul forței F față de punctul m' rotește în sensul acelor unui ceasornic sau invers. De aici rezultă că expresia lucrului mecanic virtual va fi înlocuită în metoda diagramei deplasărilor (vite-

zelor) prin expresia sumei momentelor tuturor forțelor în raport cu punctele rabătute ale punctelor lor de aplicație.

În exemplul din fig. 39, *a* se cere să se determine linia de influență a efortului în bara $5 - 7$, cînd $P = 1$ se deplasează pe partea superioară a grinzii cu zăbrele prin intermediul unor lonjeroane și antretoaze care transmit sarcina numai în noduri. Pentru aceasta se suprimă bara $5 - 7$ și se introduce perechea de eforturi N_{57} în cele două noduri 5 și 7. Sistemul s-a



. 39,

transformat într-un mecanism cu un grad de libertate (fig. 39, *b*) și urmează să se obțină deplasările nodurilor. Pentru aceasta se observă că bara $1 - 3$ rămîne pe loc, ea fiind rezemată pe teren cu ambele capete. Se va da o deplasare arbitrară nodului 2. Punctul său rabătut se va găsi în $2'$, pe dreapta 21, deoarece 1 este centrul de rotație al barei 21 (fig. 39, *b*). Segmentul $22'$ reprezintă deplasarea arbitrară dată nodului 2. Din această poziție arbitrară pentru $2'$ trebuie obținute pozițiile tuturor nodurilor rabătute. Punctul 3 stă pe loc ca și punctul 1, deci punctul 4 care se găsește pe bara 43 se va găsi rabătut pe bara 43. În același timp, punctul 4 ca și punctul 2 se găsesc și pe bara 24, deci punctele $2'$ și $4'$ vor trebui să se găsească pe o paralelă la 24. Deci, din $2'$ se duce o paralelă la 24, și intersecția ei cu 34 determină pe $4'$. Punctul 6 este legat de punctul fix 1, deci $6'$ se va găsi pe 16, dar punctele 6 și 4 se găsesc și pe bara 46, deci $6'$ se va găsi și pe paralela din

4' la *46*, astfel încît se determină imediat. Punctul *7* este legat de punctul fix *3*, deci *7'* se va găsi pe *37*, dar, deoarece *7* se găsește și pe bara *67*, *7'* se va găsi și pe paralela din *6'* la *67*. Tot astfel se determină punctul *5'* ca punct rabătut al lui *5*, care este legat de *3* și de *6*.

Linia de influență este determinată de proiecția deplasărilor pe verticală a liniei de încărcare. Avînd deplasările nodurilor *2 — 4 — 6 — 7*, se construiește ușor epura deplasărilor pe verticală. Deoarece deplasările reale sînt rabătute de 90°, va trebui să se țină seamă de proiecțiile lor pe orizontală, pentru a avea proiecțiile reale pe verticală. Pentru ușurința construcției este practic să se ia deplasarea arbitrară *22'* egală cu lungimea barei *21*. În acest caz, punctele *2'*, *6'* și *5'* se suprapun peste *1*, iar punctele *4'* și *7'* se suprapun peste *3* (fig. 39, *c*).

Pentru construirea liniei de influență, de la o dreaptă de reper care reprezintă linia de încărcare, vom pune în ordonate deplasările verticale ale acesteia, adică ale nodurilor *2*, *4*, *6*, *7*, unde se găsesc antretoazele. Între două noduri succesive, linia de influență care este reprezentată de deplasarea lonjeronului respectiv este o dreaptă.

Deplasările pe verticală ale nodurilor *2* și *4* sînt nule, deoarece proiecțiile orizontale ale lui *22'* și *44'* sînt nule. Proiecția pe verticală a lui *6* este dată de proiecția pe orizontală a lui *66'* care este *66''* egală cu două panouri, iar proiecția verticală a lui *7* este dată de proiecția orizontală a lui *77'* egală, de asemenea, cu două panouri. Deci linia de influență poate fi trasată cu ușurință ca în fig. 39, *d*. Mai trebuie determinate scara și semnul. Pentru aceasta se aplică forța $P = 1$ într-o poziție oarecare pe grindă, de exemplu, în nodul *6*, și se scrie ecuația de lucru mecanic, care se reduce la a scrie că suma momentelor forțelor în raport cu punctele lor de aplicație rabătute este nulă.

Forțele în fig. 39, *c* sînt: forța $P_6 = 1$ în nodul *6*, al cărei moment în raport cu *6'* este $+ P_6 \cdot \delta_6$, forța N_{57} din nodul *7*, al cărei moment în raport cu *7'* este $+ N_{57} \cdot \delta_7$ și forța N_{57} din nodul *5*, al cărei moment în raport cu *5'* este $- N_{57} \cdot \delta_5$. Deci ecuația de lucru mecanic devine:

$$1 \cdot \delta_6 + N_{57} \cdot \delta_7 - N_{57} \cdot \delta_5 = 0,$$

de unde rezultă:

$$N_{57} = \frac{\delta_6}{\delta_5 - \delta_7} \cdot 1.$$

Această expresie arată că, dacă se măsoară ordonatele δ la scara $\delta_5 - \delta_7 = 1$, acestea vor reprezenta valorile ordonatelor liniei de influență N_{57}.

Din fig. 39, *c* se poate scrie:

$$\delta_6 = 2\lambda;\ \delta_5 = 2\lambda\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \delta_7 = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } \delta_5 - \delta_7 = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2},$$

astfel încît $N_{57} = 2 \cdot \sqrt{2}$ reprezintă ordonata liniei de influență în mărime și semn în dreptul nodului *6*. Cu aceasta, linia de influență este complet determinată.

Se poate evita construcția diagramei deplasărilor pe schema grinzii, reprezentîndu-se separat, așa cum se arată în fig. 39, *e*, deoarece nu interesează pozițiile nodurilor, ci numai deplasările lor.

Dintr-un pol O, care reprezintă toate nodurile sistemului înainte de deplasare, se duce întîi o deplasare arbitrară $22' = \delta$. Apoi se trece la nodul 4. Din 3, adică din O, se duce o paralelă la 34, iar din $2'$, o paralelă la 24, deci $4'$ se confundă cu $2'$. Se trece la punctul 6. Din 1, adică din O, se duce o paralelă la $1-6$, iar din $4'$, o paralelă la $4-6$ Se determină astfel punctul $6'$. Se trece la 5. Din 3 (O) se duce o paralelă la 35, iar din $6'$, o paralelă la 65. Se trece la 7. Din 3 (O) se duce o paralelă la 37, iar din $6'$, o paralelă la 67. Punctul $7'$ se confundă cu $6'$. Astfel, în fig. 39, *e* sînt redate toate deplasările diagramei vitezelor, rabătute cu 90°. Această figură va fi numită *diagrama polară a deplasărilor (vitezelor)*. Forțele se aplică toate în polul O. Distanțele δ_6, δ_5 și δ_7 se determină de asemenea în fig. 39,*e*.

Astfel, brațul de pîrghie al lui P_6 este distanța de la $6'$ la P_6: $\delta_6 = 2\delta$; brațul de pîrghie al lui N_{57} din nodul 5 este distanța de la $5'$ la N_{57}: $\delta_5 = \delta\sqrt{2}$, iar brațul de pîrghie al lui N_{57} din nodul 7 este distanța de la $7'$ la N_{57}: $\delta_7 = \delta\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Proiecțiile orizontale ale deplasărilor din diagrama polară reprezintă deplasările verticale ale nodurilor, pe care, punîndu-le în ordonate de la o linie de reper care reprezintă linia de încărcare, se obține linia de influență din fig. 39, *d*.

În diagrama polară din fig. 39, *e*, toate forțele se aplică în polul O, deoarece polul reprezintă toate nodurile sistemului înainte de deplasare, iar momentele acestor forțe au fost luate în raport cu punctele rabătute ale nodurilor corespunzătoare. În felul acesta, ecuația de lucru mecanic este identică cu aceea scrisă pentru diagrama deplasărilor desenate pe grinda inițială (fig. 39, *b* și *c*).

Se poate observa însă că, dacă în diagrama polară forțele se așază în punctele rabătute ale nodurilor, ca în fig. 39, *f*, atunci momentele vor trebui luate în raport cu polul O. Prin utilizarea acestui procedeu, momentele tuturor forțelor au semnele schimbate în raport cu cele stabilite mai sus (fig. 39, *c* și *e*), dar rezultatul final nu este influențat deoarece suma momentelor e nulă.

Diagrama polară sub forma din fig. 39, *f* poartă numele de „*pîrghia lui Jukovski*". Ecuația de lucru mecanic virtual se poate interpreta pe pîrghia lui Jukovski astfel: suma momentelor în raport cu punctul O a tuturor forțelor așezate în punctele rabătute ale diagramei polare trebuie să fie nulă.

Acestea sînt metodele generale de determinare a liniilor de influență. După ce s-a determinat linia de influență a unui efort într-o secțiune, urmează să se găsească efortul cel mai defavorabil în acea secțiune, sub acțiunea unui convoi mobil de sarcini, ceea ce necesită determinarea poziției celei mai defavorabile a convoiului. În general, aceasta se face prin încercări.

La sistemele static determinate plane supuse la forțe în planul lor, linia de influență a unui efort este totdeauna poligonală (fig. 40), deoarece nu este altceva decît epura deplasărilor pe o direcție dată a liniei de încărcare.

Or, epura deplasărilor este formată totdeauna din drepte, indiferent de forma corpului (§ 9). În acest caz, dacă sistemul mobil de sarcini

este alcătuit din forțe concentrate, pentru a avea efortul maxim, trebuie ca totdeauna una dintre sarcini să se găsească în dreptul unui vîrf de poligon [1]). Aceasta micșorează numărul încercărilor.

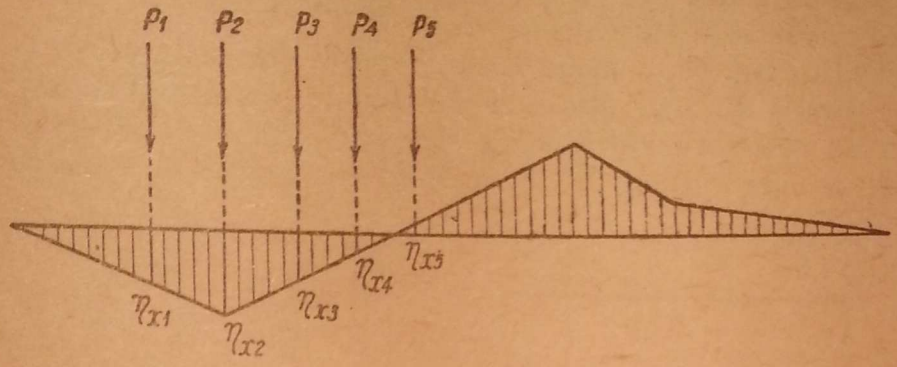


Fig. 40.

Practic, se vor așeza sarcinile cele mai mari în dreptul ordonatelor mari, și efortul se obține cu expresia (2.22)

$$S_x = P_1 \cdot \eta_{x1} + P_2 \cdot \eta_{x2} + P_3 \cdot \eta_{x3} + \dots$$

§ 12. SISTEME STATIC DETERMINATE ȘI SISTEME STATIC NEDETERMINATE

Din punctul de vedere al Mecanicii Teoretice sistemele de bare se pot împărți în : mecanisme, sisteme static determinate și sisteme static nedeterminate.

În § 9 au fost date unele elemente de analiză cinematică a sistemelor de corpuri solide, dar această analiză a avut un obiectiv limitat : acela de a face posibilă aplicarea principiului deplasărilor virtuale la sistemele a căror poziție de echilibru era cunoscută. Poziția de echilibru era poziția pe care o avea sistemul static determinat înainte de transformarea lui în mecanism prin suprimarea unor legături, iar deplasările cinematice considerate erau numai deplasările infinitesimale în jurul acestei poziții.

Lucrarea de față nu se ocupă însă cu un studiu propriu-zis al mecanismelor, care constituie obiectul altei discipline.

Statica Construcțiilor se ocupă cu studiul sistemelor de bare static determinate și static nedeterminate.

Sistemele static determinate sînt cele la care reacțiunile și eforturile dintr-o încărcare oarecare pot fi determinate numai din ecuațiile statice de echilibru. Reacțiunile și eforturile la un sistem static determinat se obțin numai din studiul aspectului static al problemei.

Sistemele static nedeterminate sînt cele la care, pentru determinarea reacțiunilor și a eforturilor, sau numai a o parte dintre ele, ecuațiile de echilibru static nu sînt suficiente, ci trebuie completate cu condiții de deformare. La sistemele static nedeterminate este necesar să fie studiate pe lîngă aspectul static, și aspectul geometric și fizic al problemei.

În capitolul I, § 6 s-a arătat cum se recunoaște dacă un sistem este sau nu static determinat, din punctul de vedere al reacțiunilor. Sistemele

[1]) Demonstrația în *I. P. Prokofiev*, Statica Construcțiilor, vol. 1 — § 10.

static nedeterminate din punctul de vedere al reacțiunilor se numesc sisteme static nedeterminate exterior.

Există și sisteme care sînt satic determinate pentru reacțiuni, dar static nedeterminate din punctul de vedere al eforturilor. Acestea se numesc sisteme static nedeterminate interior.

Exemplul din fig. 41, *a* arată o construcție static determinată exterior, deoarece reacțiunile din articulația *A* și reazemul simplu *B* se pot determina din ecuațiile de echilibru static. Dar eforturile *M*, *N*, *T* din orice secțiune nu se pot determina numai din ecuații statice, cum se vede în fig. 41, *b*,

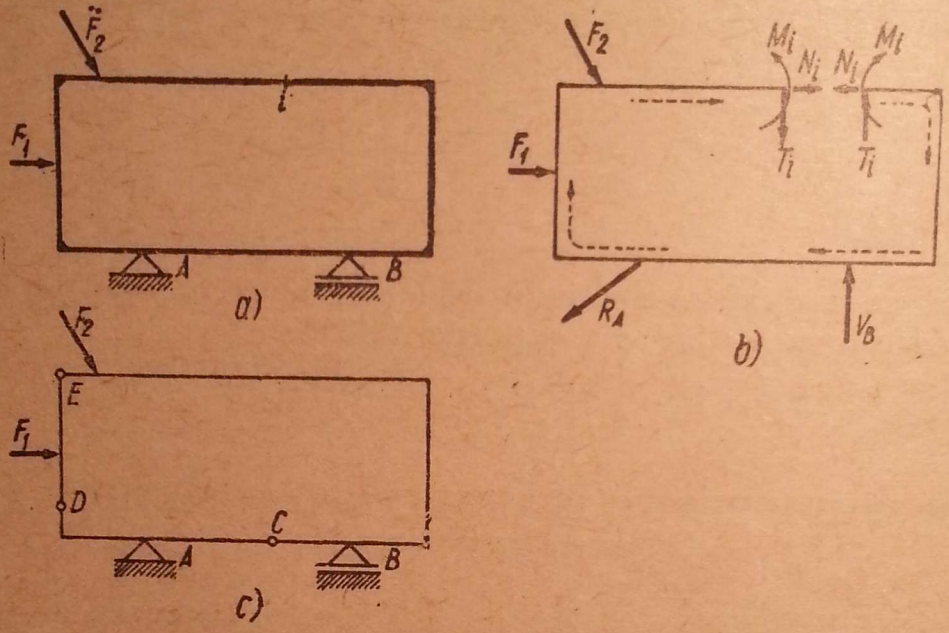


Fig. 41.

unde, făcînd o secțiune în *i* și introducînd cele trei eforturi necunoscute M_i, N_i, T_i, pornind cu reducerea fie de la dreapta lui *i*, fie de la stînga lui *i*, se obțin numai identități.

Aceasta este evident, deoarece au fost introduse trei necunoscute M_i, N_i, T_i, dar sistemul nu a fost separat în două corpuri prin această secțiune, ci a rămas tot un singur solid cu numai trei ecuații de echilibru static, care au fost deja folosite pentru determinarea reacțiunilor din *A* și *B*.

Deci nu există nici o ecuație statică disponibilă pentru determinarea celor trei eforturi M_i, N_i, T_i. Sistemul este, prin urmare, de trei ori static nedeterminat interior, pentru că există trei necunoscute suplimentare, care sînt toate eforturi interioare.

Pentru ca sistemul să fie static determinat, ar trebui să se mai poată scrie trei ecuații de echilibru static În fig. 41, *c*, prin introducrea a trei articulații care nu sînt în linie dreaptă, se obține un sistem static determinat, deoarece se poate exprima că momentele încovoietoare în fiecare dintre articulațiile *C*, *D*, *E* sînt nule. Aceasta este echivalent cu a spune că, secționînd sistemul prin cele trei articulații *C*, *D*, *E* și eliberîndu-l de legăturile din *A* și *B*, se introduc nouă necunoscute, cîte două în fiecare dintre articulațiile *A*, *C*, *D* și *E* și una în reazemul *B*. Pe de altă parte, sistemul a fost descompus în trei solide libere *DAC*, *CBE* și *ED*, și pentru fiecare dintre ele se pot scrie cîte trei ecuații de echilibru, deci, în total, nouă ecuații statice de echilibru.

Uneori, același sistem poate fi privit fie ca sistem static nedeterminat exterior, fie ca static nedeterminat interior.

De exemplu, grinda din fig. 42, *a* cu o articulație și două reazeme simple este odată static nedeterminată. Dacă necunoscuta static nedeterminată

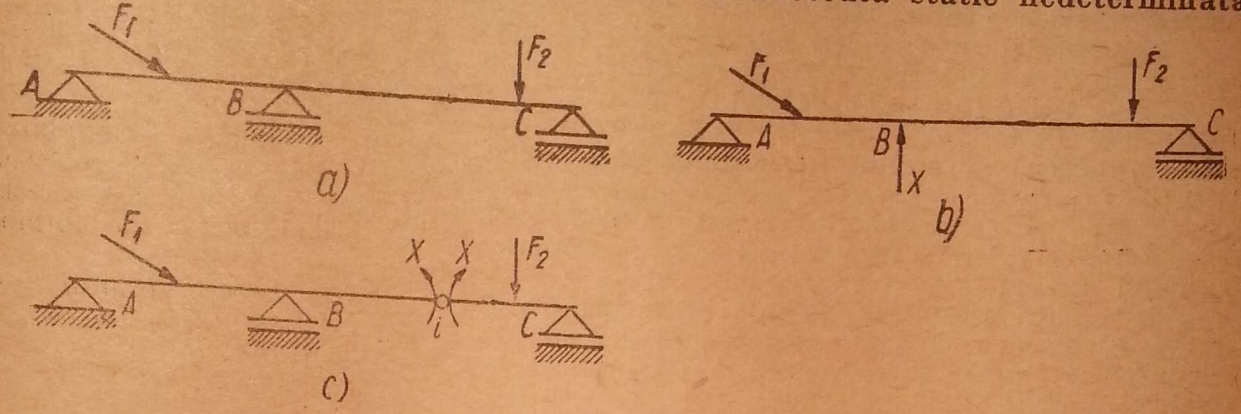


Fig. 42.

se alege reacțiunea X din B (fig. 42, *b*), sistemul este static nedeterminat exterior; dacă însă se alege ca necunoscută static nedeterminată momentul încovoietor X în secțiunea i (fig. 42, *c*) sistemul este static nedeterminat interior.

De altfel, împărțirea în sisteme static nedeterminate exterioare și interioare nu are o importanță principială, așa cum se va vedea la studiul sistemelor static nedeterminate.

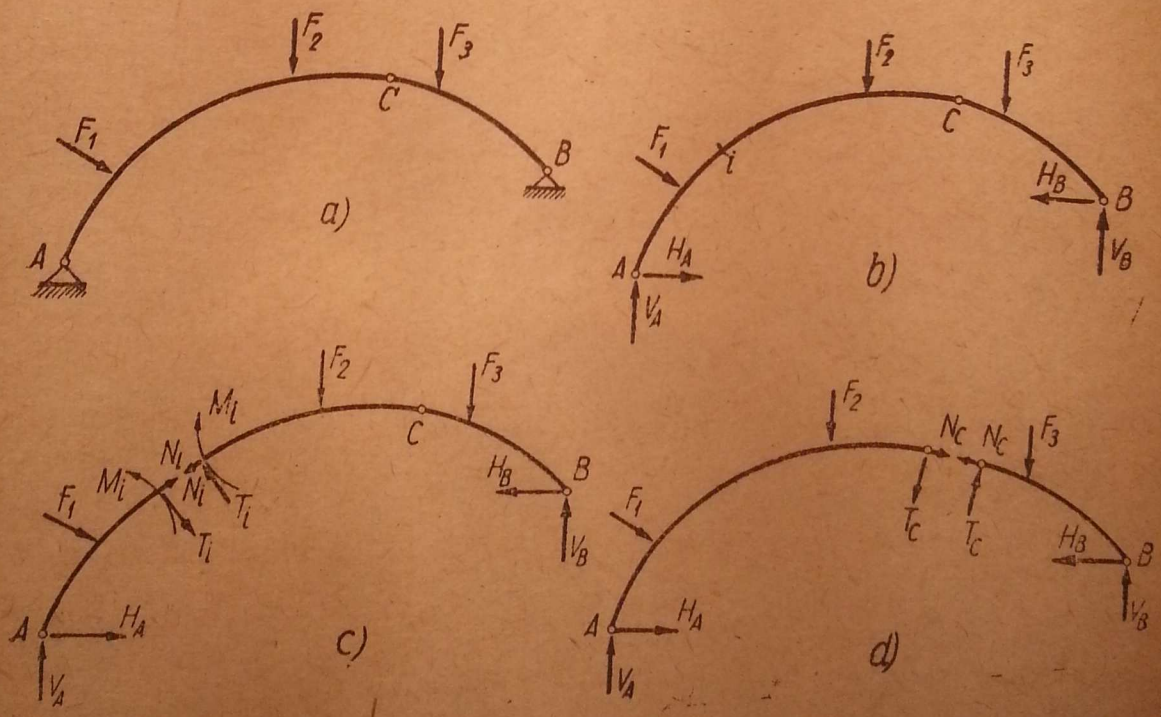


Fig.

Criteriile practice de a recunoaște mai repede de cîte ori este static nedeterminat un sistem vor fi date mai tîrziu la capitolele sistemelor static nedeterminate.

O b s e r v a ț i e. Printr-o secționare care taie un corp în două corpuri separate, se obțin trei noi ecuații de echilibru static, dar dacă secțiunea a fost făcută prin partea continuă a barei se introduc și trei necunoscute noi, cele trei eforturi M, N, T din secțiune, astfel încît practic nu se obține nici o ecuație statică suplimentară. Numai dacă secțiunea este făcută printr-o regiune cu legături care conțin mai puțin decît trei necunoscute (cum ar fi o articulație, un reazem simplu) se pot obține ecuații statice suplimentare.

De exemplu, arcul cu trei articulații din fig. 43, *a* se recunoaște ușor că este statie determinat. Dacă este izolat de teren, trebuie introduse cîte două necunoscute în fiecare dintre articulațiile A și B (fig. 43, *b*). În total sînt patru necunoscute (H_A, V_A, H_B, V_B) și trei ecuații de echilibru. Deci, lipsește o ecuație. Dacă se secționează în punctul i (fig. 43, *c*), arcul este despărțit în două, și pentru fiecare dintre părți se pot scrie cîte trei ecuații de echilibru, în total șase ecuații. Dar numărul necunoscutelor este acum șapte, deoarece la cele patru necunoscute din A și B s-au adăugat cele trei din secțiunea i. Deci, deși operația a fost corectă din punctul de vedere al secționării și al exprimării ecuațiilor de echilibru, nu s-a obținut rezultatul necesar.

Secționarea trebuie făcută prin articulația din C (fig. 43, *d*), deoarece se obțin trei ecuații suplimentare și se introduc numai dounecunoscute noi N_c și T_c. În total, deci, șase ecuații (cîte trei pentru fiecare corp) și șase necunoscute (cîte două pentru fiecare dintre articulațiile A, B și C).

CAPITOLUL III

GRINZI DREPTE

§ 13. RELAȚII DIFERENȚIALE LA BARE DREPTE

Dintr-o bară dreaptă a unui sistem se separă un element de lungime foarte mică dx prin două secțiuni foarte apropiate (fig. 44, *a*), bara fiind redusă la axa ei.

Pe fața din stînga vor acționa eforturile N, T, M, iar pe fața din dreapta se vor adăuga creșterile respective dN, dT, dM. Pe intervalul dx se presupune că acționează o sarcină uniform repartizată de direcție constantă $\bar{p}$ aplicată în axa barei. Chiar dacă forțele care se aplică ar fi concentrate, de fapt ele se repartizează totdeauna pe un mic interval și, în consecință, se poate presupune elementul dx mai mic decît distanța de repartizare a forței concentrate, astfel încît ipoteza repartizării uniforme pe lungimea dx să fie valabilă.

În acest caz, forța totală $\bar{p} \cdot dx$ care acționează pe elementul dx se poate descompune în componentele $p_n \cdot dx$ și $p_t \cdot dx$, care acționează în mijlocul elementului dx.

Se va exprima acum echilibrul elementului de bară prin două ecuații de proiecții, pe axă și pe mormală, și printr-o ecuație de momente față de extremitatea din dreapta:

$$\begin{aligned} &-N+N+dN+p_t \cdot dx=0; \\ &+T-(T+dT)-p_n \cdot dx=0; \\ &+M-(M+dM)+Tdx-p_n \frac{dx^2}{2}=0. \end{aligned}$$

În ultima ecuație se neglijează $p_n \frac{dx^2}{2}$ ca un infinit mic de ordinul 2 față de termenii ce rămîn, care sînt infiniți mici de ordinul 1. Ecuațiile de mai sus devin:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -p_t; \\ \frac{dT}{dx} &= -p_n; \\ \frac{dM}{dx} &= T, \end{aligned} \tag{3.1}$$

care exprimă că:

Derivata forței axiale în raport cu x este egală cu sarcina tangențială repartizată din secțiune, dar cu semn schimbat.

Derivata forței tăietoare în raport cu x este egală cu sarcina normală repartizată din secțiune, dar cu semn schimbat.

Derivata momentului încovoietor în raport cu x este egală cu forța tăietoare din secțiune. Această relație ne arată că momentul încovoietor este maxim sau minim în secțiunea în care se anulează forțe tăietoare.

Dacă sarcina $\bar{p}$ nu se aplică în axa grinzii, ci cu o excentricitate e (fig. 44, *b*), ecuațiile de proiecții rămîn neschimbate, iar ecuația de momente

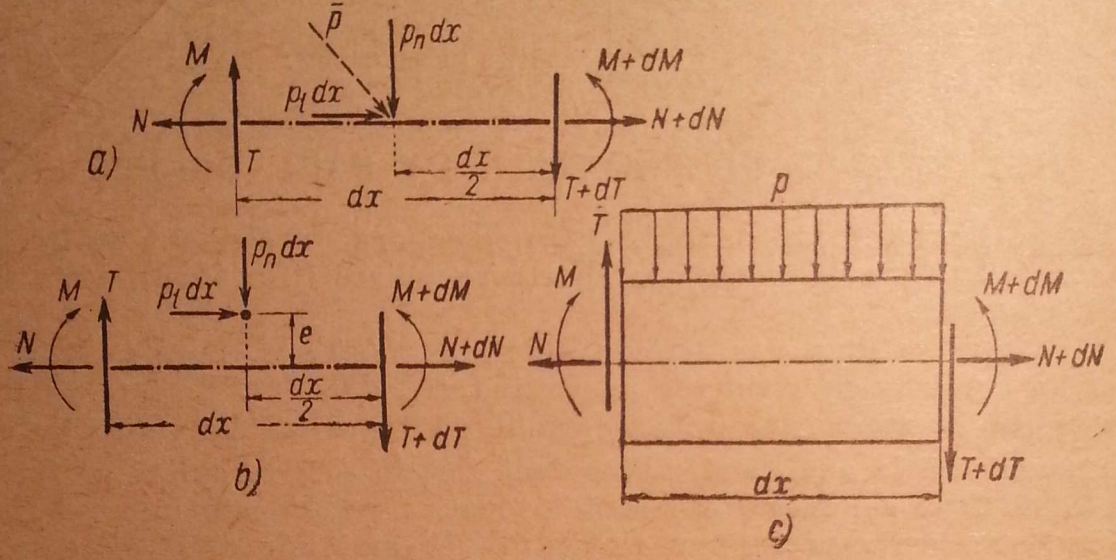


Fig. 44.

față de extremitatea din dreapta se modifică prin apariția momentului dat de excentricitatea forței tangențiale p_t:

$$+ M - (M + dM) + Tdx - p_n \cdot \frac{dx^2}{2} + p_t \cdot e \cdot dx = 0,$$

în care se neglijează $p_n \cdot \frac{dx^2}{2}$. În acest caz, relațiile (3.1) se modifică în felul următor:

$$\frac{dN}{dx} = - p_t;$$

$$\frac{dT}{dx} = - p_n; \qquad (3,1')$$

$$\frac{dM}{dx} = T + p_t \cdot e.$$

Ultima relație arată corespondența dintre variația momentului încovoietor, forța tăietoare din secțiune și momentul dat de excentricitatea forței tangențiale.

Un caz foarte des întîlnit în practică este cel al forțelor normale pe axa grinzii (fig. 44, *c*), cînd $p = p_n$ și $p_t = 0$. Relațiile (3.1) devin:

$$\frac{dN}{dx} = 0; \qquad \frac{dT}{dx} = - p; \qquad \frac{dM}{dx} = T. \qquad (3.2)$$

Prima relație din (3.2) arată că forța axială este constantă în intervalul pe care se aplică numai forțe normale pe bară, iar celelalte două relații au aceeași interpretare ca la (3.1).

Ultimele două relații din (3.2) se mai pot scrie și sub forma:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p. \tag{3.3}$$

Observație. Toate relațiile (3,1), (3,1'), (3,2), sau (3,3) sînt valabile, indiferent dacă sistemul este static determinat sau static nedeterminat, deoarece în obținerea lor nu am făcut nici o restricție de acest gen.

§. 14. GRINDA SIMPLU REZEMATĂ. SARCINI FIXE

Barele drepte solicitate în special la încovoiere se numesc grinzi.

Echilibrul unei grinzi încărcate cu un sistem de forțe în planul ei este asigurat prin trei condiții simple de rezemare în același plan.

În mod obișnuit aceste trei condiții simple de rezemare se realizează printr-o articulație și un reazem simplu (fig. 45, *a*) și, în general, într-o secțiune i apar cele trei eforturi N_i, T_i, M_i.

Un caz simplu, dar de mare aplicație în construcții, îl constituie o grindă orizontală supusă numai la încărcări verticale și în care reazemul simplu are reacțiunea verticală. În acest caz, reacțiunea din articulație va fi de asemenea verticală, adică articulația se va comporta ca un reazem simplu (fig. 45, *b*). În orice secțiune va rezulta $N = 0$, astfel încît eforturile care trebuie determinate sînt numai forțele tăietoare și momentele încovoietoare. O astfel de grindă se numește *grindă simplu rezemată* și va fi analizată mai amănunțit.

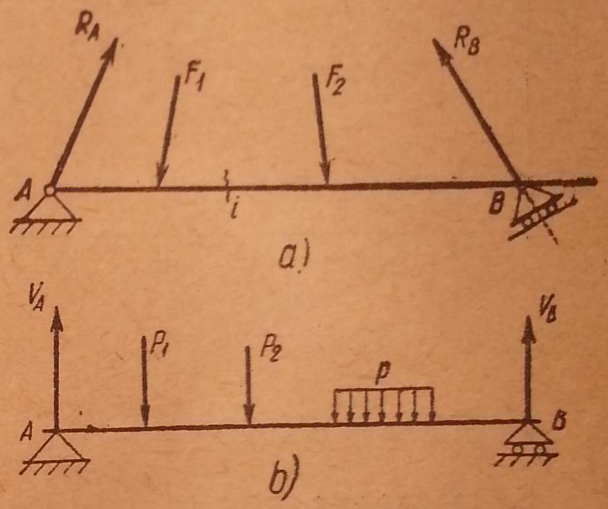


Fig. 45.

A. DIAGRAMELE DE EFORTURI T ȘI M PENTRU SARCINI TRANSMISE DIRECT

a) O singură sarcină concentrată P (fig. 46)

Distanța dintre reazemele A și B se notează cu l și se numește *deschiderea grinzii*.

Distanțele forței concentrate P la reazemele A și B se notează cu a și b, unde, evident, $a + b = l$. O secțiune curentă se reprezintă prin distanțele x și x' de reazemele A, respectiv B, unde $x + x' = l$. Aceste notații vor fi respectate în cele ce urmează.

Reacțiunile sînt:

$$V_A = \frac{Pb}{l} \quad \text{și} \quad V_B = \frac{Pa}{l}.$$

Pentru determinarea diagramelor de eforturi T și M trebuie împărțită grinda în două regiuni: regiunea de la stînga forței și regiunea de la dreapta ei

Prima regiune :

$0 < x < a \quad T_x = V_A = \frac{Pb}{l}$, care reprezintă o valoare constantă;

$M_x = V_A \cdot x = \frac{Pb}{l} \cdot x$, care variază liniar şi are următoarele valori la limitele intervalului:

pentru $x = 0 \qquad M_x = 0$;

pentru $x = a \qquad M_x = \frac{Pa \cdot b}{l}$.

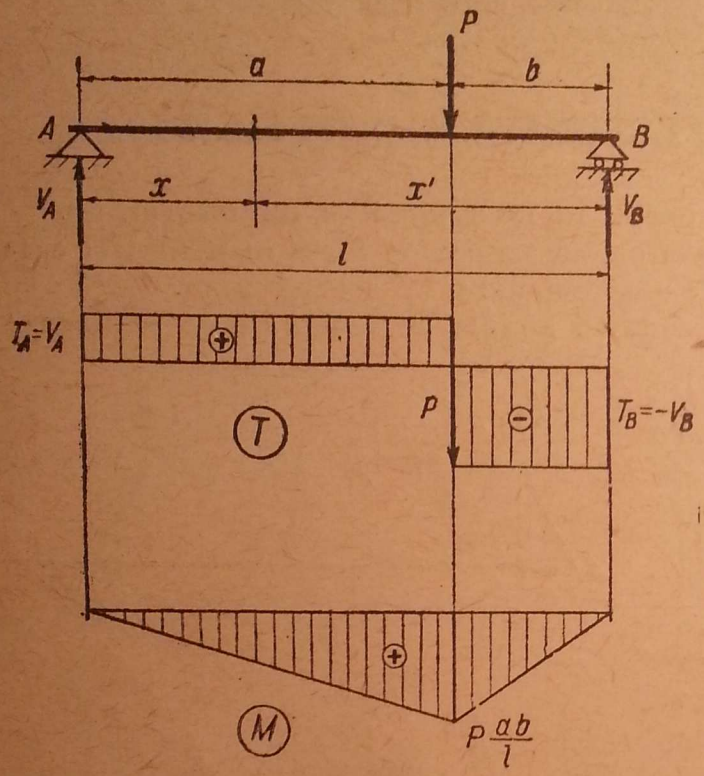


Fig. 46.

A doua regiune :

$a < x < l \quad T_x = V_A - P = -V_B = -\frac{Pa}{l}$, care este constantă;

$M_x = V_A \cdot x - P(x-a) = -(-V_B \cdot x') = V_B \cdot x'$,

care variază liniar şi are valorile extreme:

pentru $x = a \quad (x' = b)$;

$M_x = \frac{Pab}{l}$;

pentru $x = l \quad (x' = 0)$;

$M_x = 0$.

Diagramele sînt reprezentate în fig. 46.

Se recunoaşte uşor că relaţiile (3.2), sînt satisfăcute. În intervalele în care $\frac{dT}{dx} = -p = 0$, T este constant, şi

$\frac{dM}{dx} = T = const.$ deci M variază liniar.

De asemenea, aceleaşi relaţii arată că M este maxim în secţiunea în care T schimbă de semn, adică în dreptul sarcinii concentrate P.

Valoarea momentului încovoietor maxim este:

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}. \tag{3.4}$$

În cazul cînd forţa P acţionează în mijlocul grinzii, $a = b = \frac{l}{2}$ şi

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}. \tag{3.5}$$

b) Grindă simplu rezemată încărcată cu un sistem de sarcini concentrate verticale (fig. 47)

Reacţiunile sînt:

$$V_A = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l} \quad \text{şi} \quad V_B = \frac{\sum_1^n P_i a_i}{l}.$$

Într-o secțiune x_1 forța tăietoare este suma tuturor forțelor din stînga secțiunii, deoarece toate au direcția normală pe axa grinzii:

$$T_{x1} = V_A - \sum_1^{h_1} P_i. \tag{3.6}$$

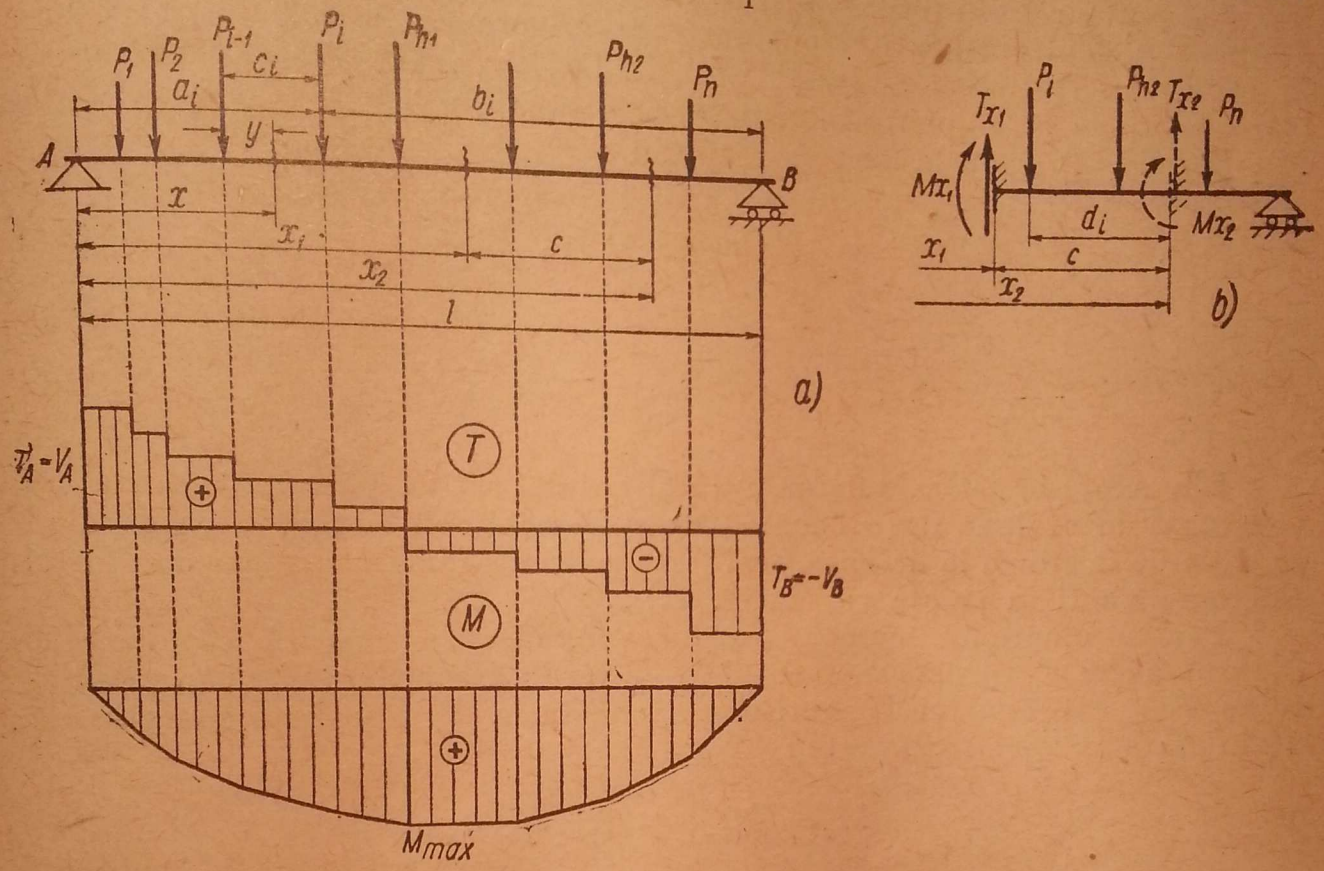


Fig. 47.

Momentul încovoietor în secțiunea x_1 are expresia:

$$M_{x1} = V_A \cdot x_1 - \sum_1^{h_1} P_i (x_1 - a_i). \tag{3.7}$$

Într-o secțiune x_2, la dreapta lui x_1, astfel încît $x_2 = x_1 + c$, T_{x2} și M_{x2} vor fi:

$$T_{x2} = V_A - \sum_1^{h_2} P_i = T_{x1} - \sum_{h_1}^{h_2} P_i; \tag{3.8}$$

$$M_{x2} = V_A \cdot x_2 - \sum_1^{h_2} P_i (x_2 - a_i) = V_A \cdot (x_1 + c) - \sum_1^{h_2} P_i (x_1 + c - a_i) =$$

$$= V_A \cdot x_1 - \sum_1^{h_1} P_i (x_1 - a_i) + V_A \cdot c - c \sum_1^{h_1} P_i - \sum_{h_1}^{h_2} P_i (x_1 + c - a_i) =$$

$$= [V_A \cdot x_1 - \sum_1^{h_1} P_i (x_1 - a_i)] + c [V_A - \sum_1^{h_1} P_i] - \sum_{h_1}^{h_2} P_i (x_1 + c - a_i);$$

$$M_{x2} = M_{x1} + c T_{x1} - \sum_{h_1}^{h_2} P_i d_i, \tag{3.9}$$

în care $d_i = x_1 + c - a_i$ reprezintă distanțele forțelor dintre x_1 și x_2 față de secțiunea x_2.

Relațiile (3.8) și (3.9) arată cum se pot calcula eforturile într-o secțiune, folosindu-se rezultatele din secțiunea precedentă.

Ele puteau fi obținute și direct, deoarece eforturile pe fața din dreapta secțiunii x_1 reprezintă grupul de forțe exterioare din stînga lui x_1, reduse în raport cu secțiunea x_1 la T_{x1} și M_{x1}. Deci, pentru calculul eforturilor într-o secțiune x_2, se poate înlocui toată partea din stînga lui x_1 cu T_{x1} și M_{x1} (fig. 47, *b*) și, în acest caz, rezultă :

$$T_{x2} = T_{x1} - \sum_{h_1}^{h_2} P_i ; \tag{3.8}$$

$$M_{x2} = M_{x1} + T_{x1} \cdot c - \sum_{h_1}^{h_2} P_i \, d_i . \tag{3.9}$$

Din expresia forței tăietoare (3.6) rezultă că ea păstrează o valoare constantă între două forțe consecutive și își schimbă brusc valoarea cînd se trece de la stînga la dreapta unei forțe concentrate. Deci, diagrama forței tăietoare va fi în trepte ca în fig. 47, *a*.

Pentru diagrama momentelor încovoietoare se observă că dacă în dreptul forței P_{i-1} există momentul M_{i-1}, iar la dreapta lui P_{i-1}, forța tăietoare T_{i-1}, expresia lui M_x într-o secțiune între P_{i-1} și forța concentrată P_i în baza relației (3.9), este :

$$M_x = M_{i-1} + T_{i-1} \cdot y ,$$

în care y este distanța de la forța P_{i-1} la secțiunea x.

În această expresie singura variabilă este y, ceea ce arată că între două forțe concentrate, consecutive, momentul încovoietor variază liniar. Dacă se notează cu c_i distanța dintre forțele P_{i-1} și P_i, în dreptul forței P_i (imediat la stînga) rezultă :

$$M_i = M_{i-1} + T_{i-1} \cdot c_i . \tag{3.10}$$

Dacă se trece imediat în dreapta forței P_i, M_i rămîne neschimbat, deoarece forța P_i dă moment nul, avînd braț de pîrghie nul.

Deci, diagrama momentelor încovoietoare va fi o linie poligonală cu vîrfurile în dreptul forțelor și avînd pe reazeme ordonate nule.

Momentul încovoietor maxim va avea loc în secțiunea în care forța tăietoare schimbă de semn, și aceasta se va întîmpla, evident, în dreptul unei forțe.

Diagramele T și M din fig. 47, *a* concretizează cele de mai sus.

c) Încărcarea cu sarcină uniform repartizată pe toată deschiderea (fig. 48)

Reacțiunile sînt :

$$V_A = V_B = \frac{pl}{2} .$$

Eforturile T_x şi M_x într-o secţiune oarecare x sînt: $T_x = V_A - p \cdot x$; variaţie liniară: pentru $x = 0$ $\quad T_A = \frac{pl}{2}$;

$$\text{pentru } x = l \qquad T_B = -\frac{pl}{2}.$$

$$M_A = V_A \cdot x - px \cdot \frac{x}{2} = \frac{pl}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2} = \frac{1}{2} px(l-x) = \frac{1}{2} px \cdot x' \quad (3.11)$$

variază parabolic şi are valoarea maximă la mijlocul grinzii pentru $x = x' = \frac{l}{2}$, unde se anulează forţa tăietoare:

$$M_{max} = \frac{1}{8} pl^2. \qquad (3.12)$$

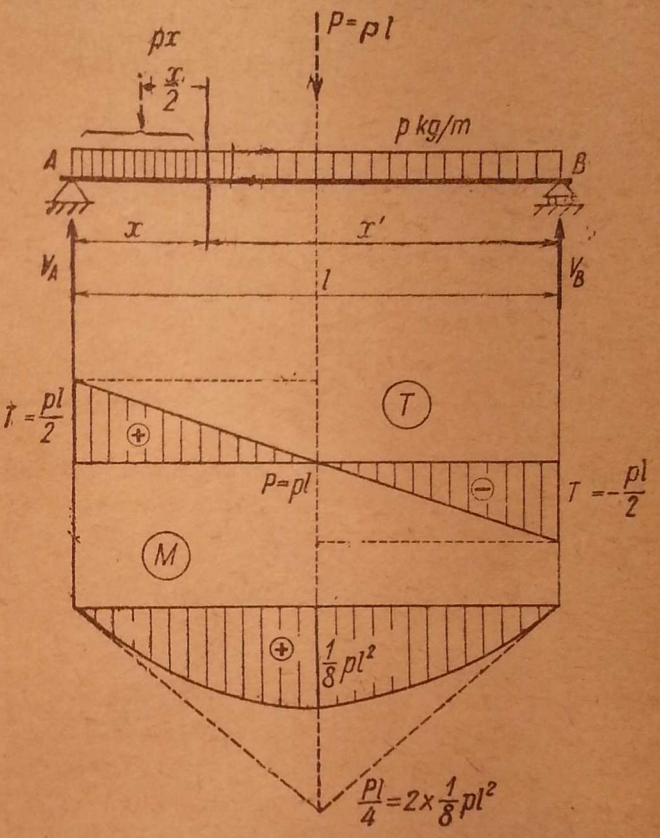


Fig. 48.

În calculele practice se mai utilizează şi formulele care urmează.

Dacă se notează $x = \xi l$ şi $x' = \xi' l$, unde ξ şi ξ' sînt, evident, numere fără dimensiune cu: $\xi + \xi' = 1$, expresia (3.11) devine:

$$M_x = \frac{1}{2} pl^2 \xi \xi'; \quad (3.11')$$

şi dacă din (3.12) se scoate:

$$p = \frac{8 M_{max}}{l^2},$$

relaţia (3.11') devine:

$$M_x = 4 \xi \cdot \xi' \cdot M_{max}. \quad (3.11'')$$

Aceste expresii au avantajul că produsele $4 \xi \cdot \xi'$ se pot efectua pentru un număr de secţiuni pe grindă indiferent de deschidere şi se trec într-o tabelă de unde se multiplică de fiecare dată numai cu $M_{max} = \frac{1}{8} pl^2$ al problemei concrete. Se obţin astfel momentele în secţiunile respective. În tabela 1, grinda este împărţită în 20 de intervale.

Tabela 1

$\frac{\xi}{\xi'}$	$\frac{0,05}{0,95}$	$\frac{0,10}{0,90}$	$\frac{0,15}{0,85}$	$\frac{0,20}{0,80}$	$\frac{0,25}{0,75}$	$\frac{0,30}{0,70}$	$\frac{0,35}{0,65}$	$\frac{0,40}{0,60}$	$\frac{0,45}{0,55}$	$\frac{0,50}{0,50}$
$4 \xi \cdot \xi'$	0,19	0,36	0,51	0,64	0,75	0,84	0,91	0,96	0,99	1,00

Dacă toată sarcina $P = pl$ ar fi fost concentrată în mijlocul grinzii, diagramele T şi M ar fi fost cele reprezentate punctat în fig. 48. Momentul

încovoietor maxim ar fi avut valoarea $\frac{Pl}{4} = \frac{pl^2}{4} = 2 \cdot \frac{1}{8} pl^2$, de două ori mai mare decît în cazul sarcinii uniform distribuite.

Între diagramele trasate şi cele desenate punctat există o anumită corespondenţă. Astfel, forţa tăietoare pe reazemele A şi B este aceeaşi în ambele cazuri. În baza relaţiilor (3.2) rezultă că tangentele pe reazeme la diagramele momentelor vor fi aceleaşi, adică parabola este tangentă pe reazeme, la diagrama triunghiulară punctată. Deci, cele două tangente în reazeme la diagrama parabolică se vor întîlni în dreptul forţei concentrate P, adică în dreptul rezultantei încărcării uniform repartizate.

d) **Încărcarea cu sarcină uniform distribuită pe o porţiune a grinzii** (fig. 49)

Reacţiunile sînt :

$$V_A = \frac{pc \cdot b}{l} \quad \text{şi} \quad V_B = \frac{pc \cdot a}{l}.$$

Pentru expresiile eforturilor T şi M se împarte grinda în trei intervale :

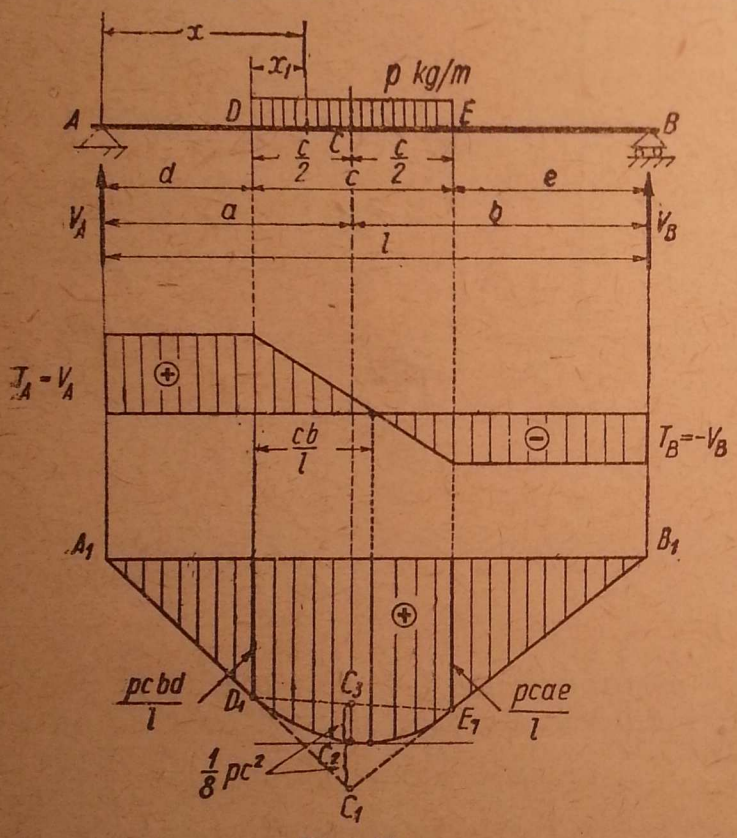


Fig. 49.

Intervalul $A - D$:

$T = V_A$; forţa tăietoare e constantă.

$M = V_A \cdot x = \frac{pcb}{l} \cdot x$ reprezintă o dreaptă cu ordonata zero în dreptul reazemului A şi cu valoarea $M_D = \frac{pcb}{l} \cdot d$, în dreptul secţiunii din D.

Intervalul $D - E$:

$T = V_A - px_1$ variază liniar cu valorile extreme :

$T_D = V_A$ şi

$T_E = -V_B$ (reducerea forţelor s-a făcut de la dreapta).

$M = V_A \cdot x - \frac{1}{2} px_1^2$ variază parabolic ($x = x_1 + d$). Valorile la limitele intervalului :

$$M_D = V_A \cdot d.$$

$M_E = V_B \cdot e$ (reducerea forţelor s-a făcut de la dreapta).

Intervalul $E - B$:

$T = -V_B$, constantă ;

$M = V_B \cdot x'$, variază liniar.

În figură sînt reprezentate diagramele T şi M.

Momentul încovoietor maxim are loc în secţiunea în care se anulează forţa tăietoare, adică în intervalul DE

$T = \frac{pcb}{l} - px_1 = 0$, deci în secţiunea $x_1 = \frac{cb}{l}$.

Momentul încovoietor maxim nu are loc în dreptul mijlocului sarcinii repartizate, decît în cazul particular, cînd $b = \frac{l}{2}$.

Expresia momentului maxim va fi:

$$M_{max} = \frac{pcb}{l}\left(d + \frac{cb}{l}\right) - \frac{1}{2}p\left(\frac{cb}{l}\right)^2.$$

Dacă se fac calculele şi înlocuirile necesare, se obţine:

$$M_{max} = \frac{pcab}{l^2}\left(l - \frac{c}{2}\right).$$

Cîteva observaţii. Forţa tăietoare are aceeaşi valoare, atît la stînga lui D, cît şi infinit vecin la dreapta lui D. Deci, în baza relaţiilor (3.2) diagrama momentelor va avea aceeaşi tangentă, atît la stînga, cît şi imediat la dreapta lui D, adică parabola este tangentă la dreapta care reprezintă diagrama momentelor încovoietoare pe intervalul $A - D$.

Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru punctul E.

Dacă sarcina ar fi fost concentrată în centrul ei de greutate, diagrama momentelor încovoietoare ar fi fost reprezentată de triunghiul $A_1B_1C_1$ avînd valoarea maximă $M = \frac{pcba}{l}$.

Din expresia momentului încovoietor în punctul C pentru încărcarea reală rezultă că $\overline{C_1C_2} = \frac{1}{8}pc^2$; din proprietăţile parabolei rezultă că şi $\overline{C_2C_3} = \frac{1}{8}pc^2$, adică porţiunea de diagramă $D_1C_2E_1C_3D_1$ este aceeaşi ca la o grindă simplu rezemată în D şi E, încărcată cu sarcina uniform, repartizată p.

e) **Încărcare cu sarcina repartizată triunghiular (fig. 50)**

Valoarea încărcării totale este $Q = \frac{1}{2}ql$, iar centrul ei de greutate este la $\frac{l}{3}$ de reazemul B. Reacţiunile sînt:

$$V_A = \frac{Q}{3} = \frac{ql}{6} \text{ şi } V_B = \frac{2}{3}Q = \frac{ql}{3},$$

în care q este intensitatea sarcinii distribuite în secţiunea de pe reazemul B.

Determinarea expresiilor analitice ale eforturilor într-o secţiune curentă x necesită evaluarea sarcinii repartizate la stînga lui x şi momentul ei în raport cu secţiunea x.

În dreptul secţiunii x intensitatea sarcinii este:

$$q_x = q \cdot \frac{x}{l},$$

iar valoarea întregii sarcini distribuite în stînga lui x este:

$$\frac{1}{2}q_x \cdot x = \frac{1}{2}q\frac{x^2}{l}$$

şi are centrul de greutate la $\frac{1}{3}x$ de secţiune.

Expresiile eforturilor în secțiunea x sînt :

$$T_x = V_A - \frac{1}{2} q_x \cdot x = q\frac{l}{6} - \frac{1}{2} q \frac{x^2}{l} = \frac{ql}{6}\left(1 - \frac{3x^2}{l^2}\right) = \frac{Q}{3}(1 - 3\xi^2); \quad (3.13)$$

$$M_x = V_A \cdot x - \frac{1}{2} q_x x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6} x - \frac{1}{6} q \frac{x^3}{l} = \frac{qlx}{6}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) = \frac{Q}{3} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) =$$

$$= \frac{Ql}{3} \xi (1 - \xi^2), \quad (3.14)$$

în care s-a notat $\xi = \frac{x}{l}$.

Se observă că forța tăietoare variază după o parabolă de gradul 2, iar momentul încovoietor, după o parabolă de gradul 3.

Forța tăietoare se anulează pentru secțiunea în care $1 - 3\xi^2 = 0$, adică

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577,$$

sau $x = 0{,}577\, l$.

Momentul încovoietor este maxim în această secțiune și are valoarea :

$$M_{max} = \frac{Ql}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}} Ql = 0{,}1285\, Ql. \quad (3.15)$$

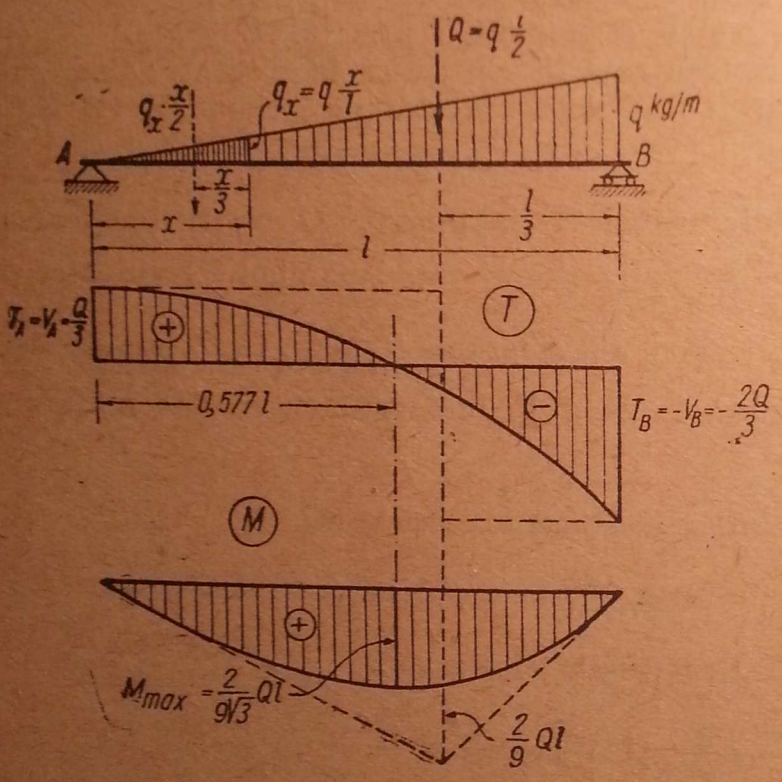


Fig. 50.

Diagramele sînt trasate în fig. 50 și se observă următoarele :

Diagrama forței tăietoare are tangenta în A orizontală, deoarece în baza relațiilor (3.2),

$$\frac{dT}{dx} = -p = -q_x,$$

ori $q_x = 0$ în A.

Curba forțelor tăietoare nu are nici un punct de inflexiune, deoarece este parabolă de gradul 2. De altfel, a doua derivată a forței tăietoare nu se anulează :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{dq_x}{dx} = \frac{q}{l}, \text{ care este o valoare constantă.}$$

Dacă toată sarcina repartizată de-a lungul grinzii $Q = \frac{1}{2} q \cdot l$ s-ar fi aplicat în centrul ei de greutate, diagramele T și M ar fi fost cele desenate punctat.

Forțele tăietoare pe reazem ar fi avut aceleași valori, deci, în baza relațiilor (3.2), diagramele momentelor desenate au aceleași tangente pe reazem. Altfel spus, aceasta înseamnă că tangentele la diagrama momentelor pe reazemele A și B se întîlnesc pe rezultanta sarcinii repartizate.

f) Încărcare repartizată parabolic

Se consideră încărcarea din fig. 51 în care intensitatea sarcinii într-o secțiune x este $q_x = q\frac{x^2}{l^2} = q\xi^2$, unde q este intensitatea sarcinii pe reazemul B.

S-ar putea proceda ca în cazul sarcinii triunghiulare de la exemplul precedent, dar scopul exemplului este altul. Să pornim de la ecuațiile diferențiale (3.2) care, în cazul de față, devin:

$$\frac{dT}{dx} = -q_x \text{ și } \frac{dM}{dx} = T.$$

Dacă se integrează prima relație, se obține:

$$T = -\int q_x\,dx + C_1. \quad (3.16)$$

Dacă se integrează a doua relație, se obține:

$$M = \int T\,dx + C_2; \quad (3.17)$$

cele două constante de integrare C_1 și C_2 vor fi stabilite prin două condiții la limită, și anume: momentele încovoietoare sînt nule pe reazemele A și B.

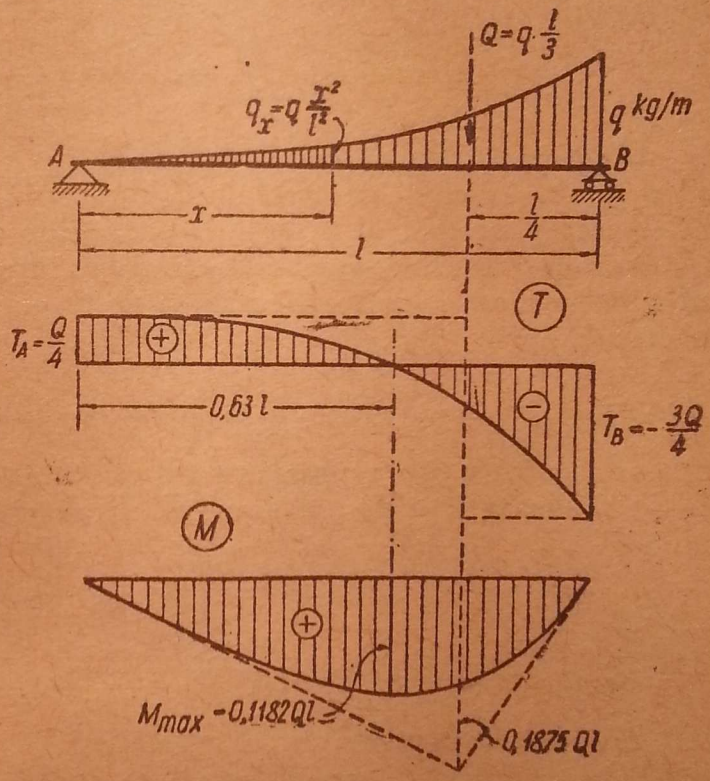


Fig. 51.

Ecuația (3.16) conduce la:

$$T = -\int q\frac{x^2}{l^2}\,dx + C_1 = -\frac{1}{3}q\frac{x^3}{l^2} + C_1, \quad (3.18)$$

iar ecuația (3.17), la:

$$M = \int\left(-\frac{1}{3}q\frac{x^3}{l^2} + C_1\right)dx + C_2 = -\frac{qx^4}{12\,l^2} + C_1x + C_2. \quad (3.19)$$

Din condiția ca pentru $x = 0$ să avem $M = 0$, rezultă $C_2 = 0$, iar din condiția ca pentru $x = l$, $M = 0$ rezultă:

$$C_1 = q\frac{l}{12}.$$

Relațiile (3.18) și (3.19) devin :

$$T = q\frac{l}{12} - q\frac{l}{3}\frac{x^3}{l^3} = \frac{ql}{12}(1 - 4\xi^3) = \frac{Q}{4}(1-4\,\xi^3); \qquad (3.20)$$

$$M = q\frac{l^2}{12}\frac{x}{l} - \frac{ql^2}{12}\cdot\frac{x^4}{l^4} = \frac{ql^2}{12}\xi(1-\xi^3) = \frac{Ql}{4}\cdot\xi\cdot(1-\xi^3), \qquad (3.21)$$

în care $Q = q\frac{l}{3}$ reprezintă sarcina totală de pe grindă.

Forța tăietoare se anulează pentru $\xi = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}63$, adică la $x = 0{,}63 \cdot l$, iar momentul maxim, care are loc în această secțiune, are valoarea :

$$M_{max} = \frac{Ql}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16\sqrt[3]{4}}\,Ql = 0{,}1182\,Ql. \qquad (3.22)$$

Diagramele T și M sînt desenate în fig. 51, și caracteristicile sînt analoge celor de la sarcina triunghiulară.

Acest procedeu al integrării ecuațiilor diferențiale duce repede la rezultate, cînd sarcina variabilă continuu are o expresie algebrică ușor de integrat și cînd nu este necesar să se împartă zona de integrare în multe intervale, prin discontinuități provocate de sarcini concentrate.

g) Încărcare cu cuple

În fig. 52, *a* este reprezentată o grindă încărcată cu un cuplu de moment M la o distanță a de reazemul A. Reacțiunile sînt :

$$V_A = -\frac{M}{l}; \qquad V_B = +\frac{M}{l}.$$

Forța tăietoare $T_x = V_A = -\frac{M}{l}$ este constantă pe toată grinda.

Momentul încovoietor :

Dacă : $x < a$ $\quad M_x = V_A \cdot x = -\frac{M}{l}\cdot x.$

Dacă : $x > a$ $\quad M_x = V_A \cdot x + M = V_B \cdot x' = \frac{M}{l}\cdot x'.$

Diagrama corespunzătoare este alcătuită din două drepte paralele cu un salt în dreptul secțiunii unde se aplică cuplul exterior M.

În cazul cînd M se aplică în capătul A al grinzii, rezultă diagramele de eforturi din fig. 52,*b*.

Dacă la cele două capete ale grinzii ar fi acționat cuplele cu momentele M_1 și M_2, astfel încît în valori absolute $M_2 > M_1$ (fig. 52, *c*), reacțiunile ar fi fost :

$$V_A = -V_B = \frac{M_2 - M_1}{l},$$

de unde :

$$T = \frac{M_2 - M_1}{l}. \qquad (3.23)$$

Forța tăietoare este constantă pe toată deschiderea, iar $M_x = M_1 + V_A\, x$; sau, după înlocuire :

$M_x = M_1 \frac{x'}{l} + M_2 \frac{x}{l}$, rezultat care se poate obține și din suprapunerea efectelor. Se pune întîi M_1 în capătul A al grinzii și se obține : $M'_x = M_1 \frac{x'}{l}$, ca în cazul fig. 52, *b*, apoi se face să acționeze numai M_2 în capătul B, și din diagrama triunghiulară respectivă s-ar fi obținut :

$$M''_x = M_2 \cdot \frac{x}{l}.$$

Suprapunînd cele două încărcări, diagramele de eforturi se suprapun așa cum se vede în fig. 52, *c* și rezultă :

$$M_x = M'_x + M''_x = M_1 \frac{x'}{l} + M_2 \frac{x}{l}. \qquad (3.24)$$

Se va utiliza suprapunerea efectelor, ori de cîte ori se pot folosi rezultate obținute anterior.

Observație. Din determinarea reacțiunilor V_A și V_B rezultă că momentul încovoietor pozitiv pe un reazem descarcă acel reazem și-l încarcă pe cel opus. Invers, momentul încovoietor negativ încarcă reazemul respectiv și-l descarcă pe cel opus.

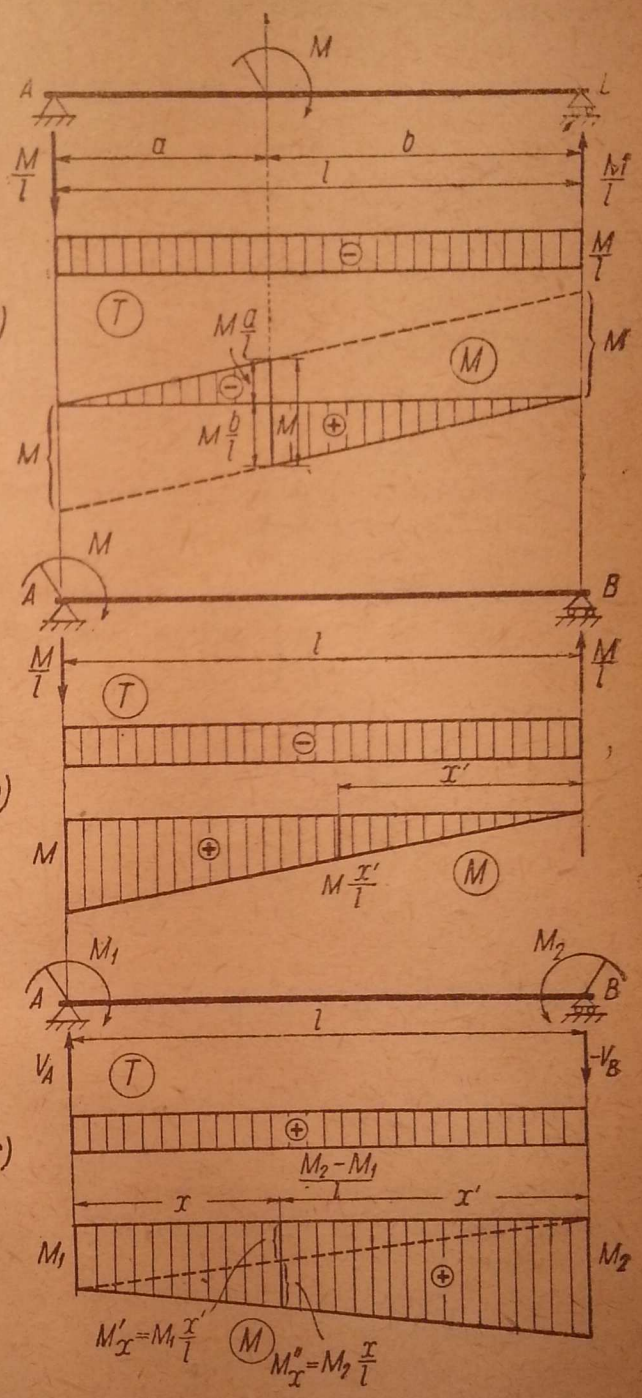


Fig. 52.

B. DIAGRAME DE EFORTURI PE CALE GRAFICĂ PENTRU SARCINI FIXE, TRANSMISE DIRECT

a) Elemente introductive

Diagramele se obțin cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular.

Se amintește că pe această cale momentul rezultantei unui grup de forțe F_1, F_2, F_3 (fig. 53) în raport cu un punct A este dat de expresia :

$$M_A(F_1, F_2, F_3) = m \cdot H_{13}, \qquad (3.25)$$

în care H_{13} este distanța de la polul O la vectorul rezultant R_{13} din poligonul forțelor, numită distanță polară, iar m este segmentul paralel cu R_{13} inter-

ceptat între prima și ultima latură de poligon funicular al grupului de forțe F_1, F_2, F_3, dus prin punctul A.

În adevăr, rezultanta R_{13} a forțelor F_1, F_2, F_3 are direcția și mărimea determinate în poligonul forțelor (fig. 53, *b*) și poziția determinată de intersecția B a laturilor $0'$ și $3'$ din poligonul funicular (fig. 53, *a*).

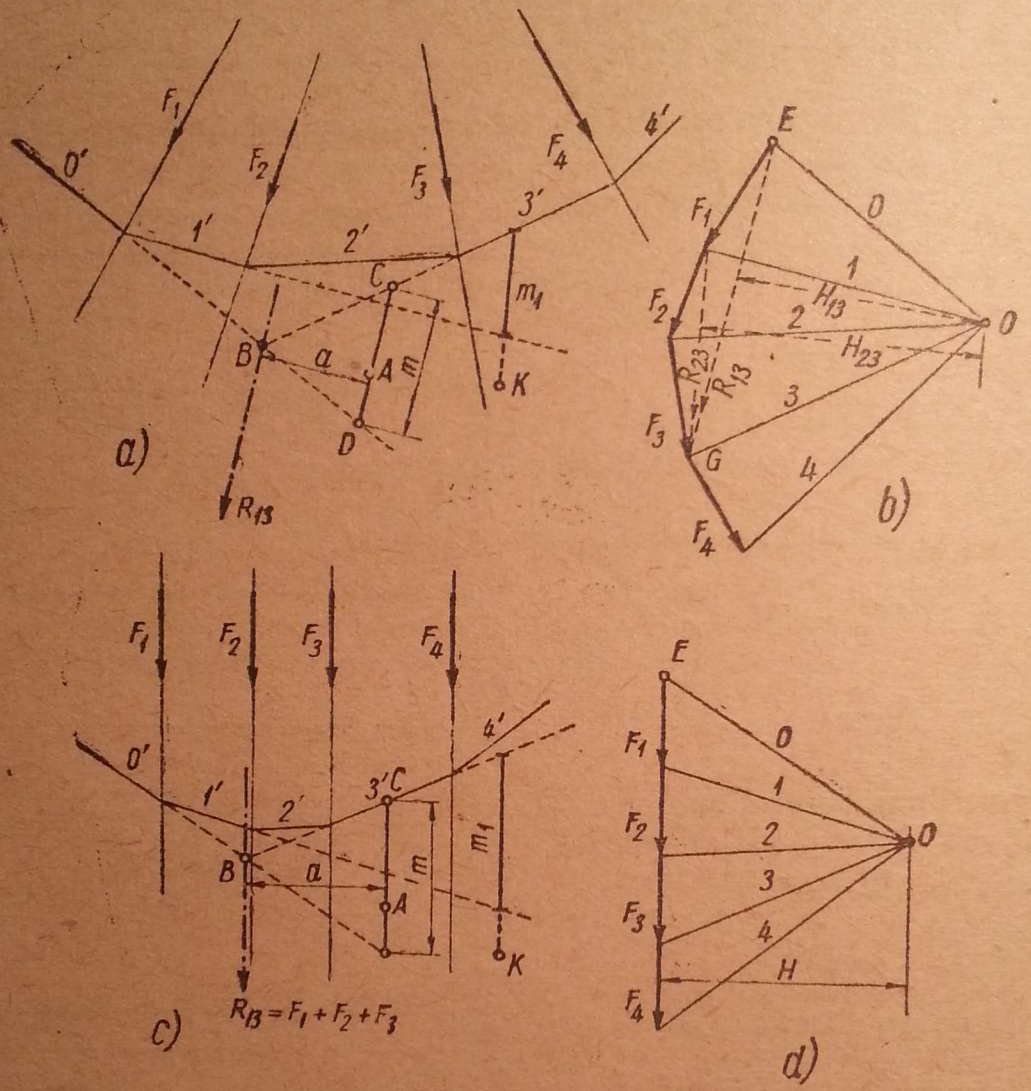


Fig. 53.

Deci, în valoare absolută: $M_A(R_{13}) = R_{13} \cdot a$, în care a este distanța de la punctul A la rezultanta R_{13}. Din triunghiurile asemenea BCD și OEG se obține:

$$\frac{CD}{a} = \frac{EG}{H_{13}} \quad \text{unde} \quad CD = m \quad \text{și} \quad EG = R_{13}.$$

Deci: $R_{13} \cdot a = m \cdot H_{13}$, și ținînd seamă de relația precedentă

$$M_A(R_{13}) = M_A(F_1, F_2 F_3) = m \cdot H_{13}. \tag{3.25}$$

Momentul grupului de forțe F_2 și F_3 în raport cu punctul K este:

$M_K(F_2, F_3) = m_1 H_{23}$, unde m_1 este interceptat între laturile $1'$ și $3'$ și este paralel cu R_{23}.

Se observă că prin trecerea de la M_A la M_K se schimbă atît direcția lui m, cît și direcția și mărimea distanței polare H.

În cazul particular al forțelor paralele, poligonul forțelor se compune dintr-o dreaptă, și distanța polară H rămîne constantă în direcție și în mărime (fig. 53, *d*). De asemenea, segmentele m vor fi toate paralele cu direcția comună a forțelor și perpendiculare pe H.

Expresia momentului forțelor F_1, F_2, F_3 în raport cu punctul A va fi:

$$M = m \cdot H, \tag{3.26}$$

și cînd se trece la alt punct sau la alt grup de forțe se schimbă numai m, astfel încît variația lui m arată chiar variația momentelor (fig. 53, *c*).

Cazul acesta al forțelor paralele are aplicațiile cele mai numeroase.

În expresia (3.26), H, care este forță în poligonul forțelor, se măsoară în unități de forță. Rezultă deci că m trebuie măsurat în unități de lungime, pentru ca produsul să fie moment.

Se poate însă și invers: H să fie măsurat la scara lungimilor, iar m, la scara forțelor.

Cu acestea putem trece la diagramele de eforturi pe cale grafică.

b) Grinda simplu rezemată, încărcată cu sarcini concentrate verticale

Forțele și reacțiunile sînt toate verticale (fig. 54). Se construiește poligonul forțelor, și cu un pol arbitrar O se construiesc razele polare *0*, *1*, *2*, *3*, *4* (fig. 54, *d*) și apoi poligonul funicular *0'*, *1'*, *2'*, *3'*, *4'* (fig. 54, *c*).

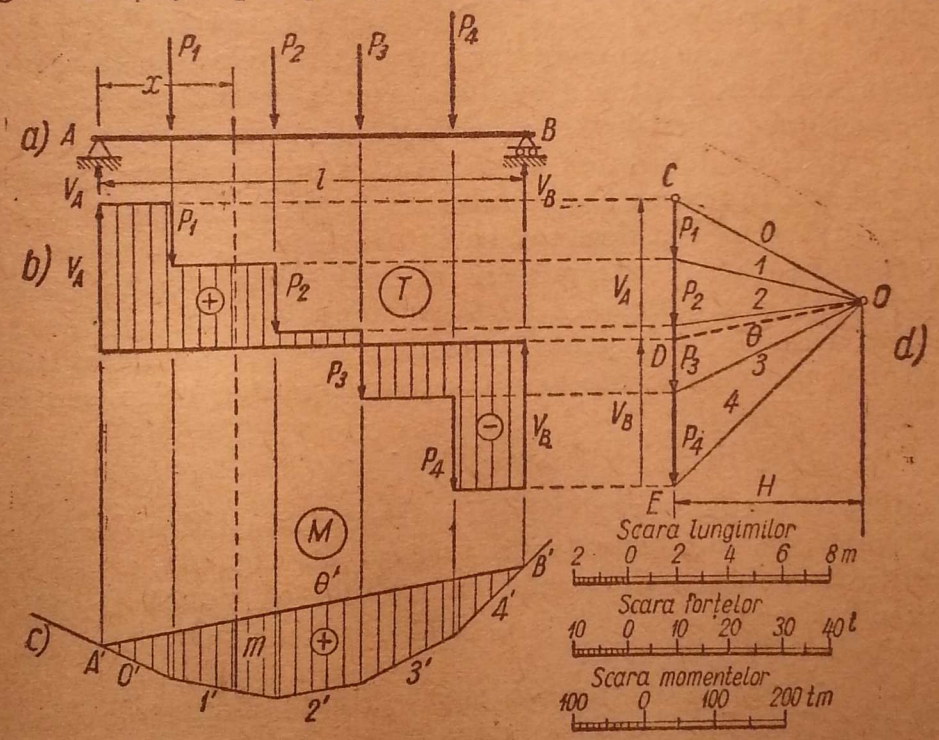


Fig. 54.

Forțele $P_1, \ldots, P_4$ și reacțiunile V_A și V_B alcătuiesc un sistem de forțe în echilibru, astfel încît poligonul de forțe trebuie să fie închis, iar în poligonul funicular prima și ultima latură trebuie să se suprapună. Pînă acum nu am construit prima și ultima latură de poligon funicular, deoarece nu au fost luate în considerație V_A și V_B. Un punct al primei laturi de poligon funicular însă este A', intersecția liniei de acțiune cunoscută a reacțiunii

din A cu latura $0'$; tot astfel se cunoaște punctul B' al ultimei laturi de poligon funicular ca intersecție a liniei de acțiune cunoscută a reacțiunii din B cu latura $4'$. Prima și ultima latură de poligon funicular, care trebuie să constituie o singură dreaptă, are două puncte A' și B' cunoscute, deci va fi tocmai dreapta $A' - B'$, notată cu θ'.

Această dreaptă se numește *linia de închidere a poligonului funicular.*

Din polul O se duce raza polară θ paralelă cu linia de închidere θ', și va rezulta punctul D pe rezultanta poligonului forțelor, care determină cele două reacțiuni verticale $V_A = DC$ și $V_B = ED$, astfel încît poligonul de forțe să fie închis.

În poligonul funicular laturile θ' și $0'$ sînt concurente pe linia de acțiune a lui V_A, deci în poligonul de forțe razele θ, 0 și forța V_A trebuie să formeze un triunghi. Tot astfel, θ, 4 și V_B trebuie să formeze alt triunghi. Astfel se recunoaște care este reacțiunea V_B și care este V_A în poligonul forțelor.

Reacțiunile fiind cunoscute, diagrama forțelor tăietoare se construiește ușor (fig. 54, *b*). Se pornește de la o linie de reper cu reacțiunea V_A și se scad pe rînd forțele $P_1, P_2, \ldots, P_4$, pînă se ajunge pe reazemul B la o forță tăietoare egală cu $- V_B$.

Diagrama momentelor a fost de asemenea construită între timp, deoarece este chiar suprafața cuprinsă între poligonul funicular $0'$, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ și linia de închidere $'$.

În adevăr, într-o secțiune la distanța x de reazemul A, momentul încovoietor M_x este suma momentelor tuturor forțelor de la stînga, și după cele stabilite mai sus, pentru a evalua pe cale grafică pe M_x, trebuie să se ducă prin secțiune o verticală (paralelă la direcția comună a forțelor și a reacțiunilor) și să se determine segmentul m cuprins între prima și ultima latură de poligon funicular al grupului de forțe de la stînga secțiunii.

Prima forță este V_A, deci prima latură este θ', iar ultima latură este latura corespunzătoare extremității ultimei forțe dinaintea secțiunii x. În cazul de față este latura $1'$, deci segmentul m este ordonata din poligonul funicular închis în dreptul secțiunii x. Acest segment m trebuie înmulțit cu distanța polară H, care este constantă pentru orice secțiune. Deci:

$$M_x = m \cdot H. \tag{3.27}$$

H fiind o constantă, variația lui m reprezintă chiar diagrama momentelor încovoietoare, așa cum este arătată în fig. 54, *c*.

Rezultatele construcțiilor grafice trebuie să poată fi citite și interpretate în cifre, pentru a putea fi folosite în calcule. Aceasta se face cu ajutorul scărilor.

Datele sînt lungimile (deschiderea grinzii, distanțele dintre forțe) și forțele. Pentru fiecare se adoptă cîte o scară, în funcție de dimensiunea epurei.

Astfel, se convine ca: 1 cm de pe epură să reprezinte a metri din natură, și
1 cm de pe epură să reprezinte f tone din natură.

Scara pentru momente se stabilește astfel, încît segmentele m măsurate în epură să dea rezultatele direct în tonemetri.

Pentru aceasta se observă că în expresia $M = m \cdot H$, H trebuie măsurat la scara forțelor, iar m, la scara lungimilor, astfel încît, dacă H are în epură

H cm, înseamnă că reprezintă $H \cdot f$ tone în natură, iar dacă m are în epură m cm, înseamnă că reprezintă $m \cdot a$ metri în natură.

Dacă vrem să citim pe M la o scară proprie a momentelor, vom avea: $M = (m \cdot a)$metri $\times$ $(H \cdot f)$ tone $= m \cdot (a \cdot f \cdot H)$ tonemetri. Aceasta înseamnă că 1 cm de pe segmentul m în epură reprezintă $a \cdot f \cdot H$ tonemetri în natură, ceea ce constituie chiar scara momentelor.

De obicei, scările pentru lungimi, forțe și momente se reprezintă grafic în epură.

c) Grinda simplu rezemată, încărcată cu sarcini repartizate

Pentru a aplica procedeul grafic, trebuie să se înlocuiască sarcina repartizată cu un sistem de forțe concentrate. În acest scop, se împarte sarcina într-un număr de tronsoane, iar în intervalul fiecărui tronson se înlocuiește sarcina repartizată cu rezultanta ei.

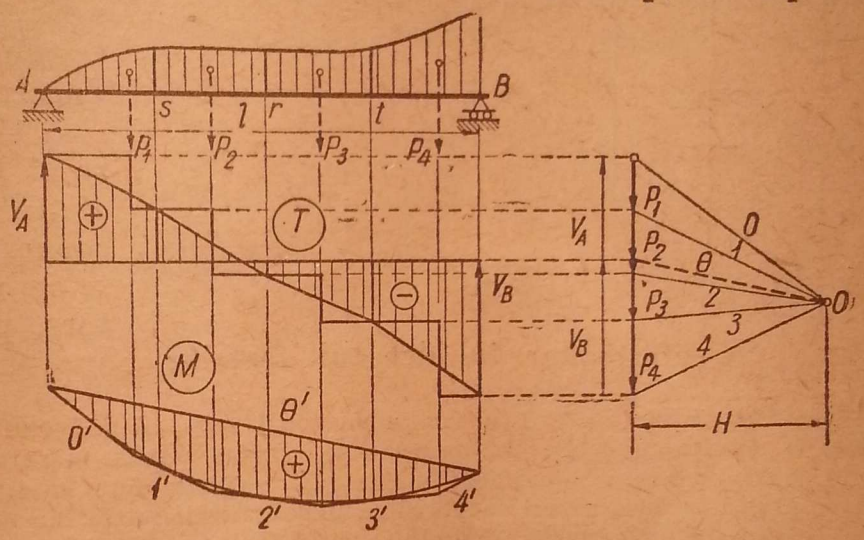


Fig. 55.

Împărțirea în tronsoane se face astfel, încît evaluarea sarcinilor rezultante parțiale și pozițiile acestor rezultante să se facă ușor prin asimilări cu dreptunghiuri, triunghiuri sau, cel mult, trapeze. În modul acesta, problema a fost redusă la cazul precedent și se construiesc poligonul de forțe, poligonul funicular și diagramele de eforturi corespunzătoare, cum se arată în fig. 55.

Să interpretăm rezultatele:

Reacțiunile V_A și V_B sînt cele reale, deoarece concentrarea parțială pe tronsoane a forțelor distribuite, dacă a fost făcută corect, nu modifică mărimea și poziția rezultantei încărcărilor.

Diagramele T și M diferă de cele reale prin faptul că sînt construite pentru un sistem de sarcini concentrate, dar aceste rezultate pot fi îmbunătățite dacă se observă că în dreptul secțiunilor s, r, t de separație între tronsoane, numite rosturi, T și M din diagrame au valori juste.

În adevăr, în dreptul rostului r, de exemplu, forțele reale care se găsesc în stînga lui sînt înlocuite cu un sistem absolut echivalent de forțe concentrate, care vor da deci același T și același M în secțiunea r.

Pentru orice secțiune care nu coincide cu rosturile, această echivalență nu mai există, deoarece sistemul de sarcini concentrate de la stînga cuprinde și sarcini repartizate care se găsesc la dreapta secțiunii, sau nu le cuprinde pe toate cele din stînga.

Deci, numai în dreptul rosturilor, T și M au valori exacte.

Sarcinile repartizate produc diagrame T și M cu variație continuă, astfel încît, prin ordonatele din dreptul rosturilor s, r, t și prin ordonatele de pe reazeme se trag curbe continue, care vor reprezenta o soluție pentru

diagrame mai apropiată decît cea dată inițial de sarcinile concentrate. Pe diagrama momentelor curba reală rămîne înscrisă în poligonul funicular al forțelor concentrate.

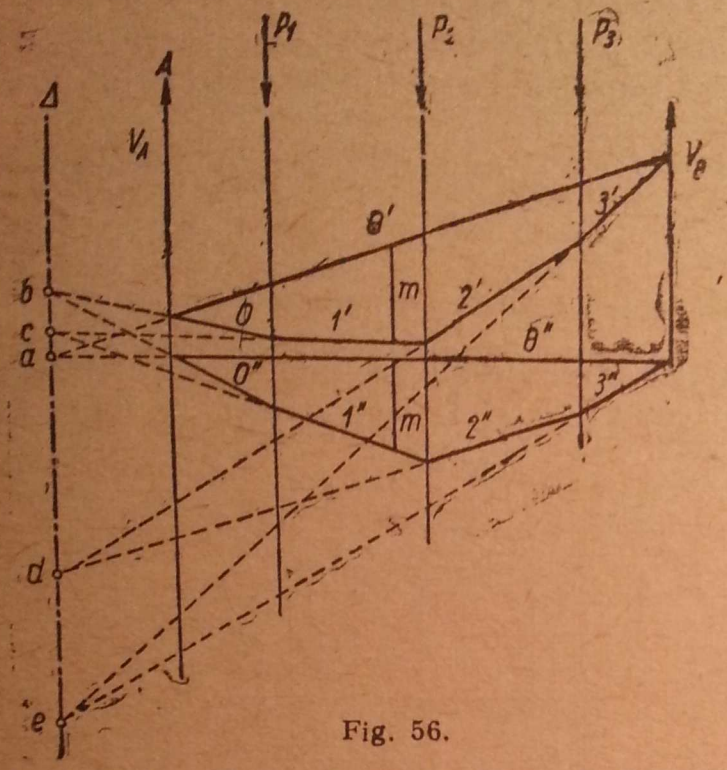


Fig. 56.

Acest procedeu de îmbunătățire a primelor rezultate dovedește că nu este necesar să se împartă sarcina repartizată prin rosturi prea dese, deoarece totdeauna secțiunile din dreptul rosturilor au eforturile just reprezentate. Împărțirea prin rosturi exagerat de dese poate duce mai repede la erori grafice, de determinare a intersecțiilor, de ducere a paralelor etc.

Din cele de mai sus rezultă că dacă afară de sarcini distribuite există și sarcini concentrate, este indicat să se ia rosturi în dreptul acestora, pentru a obține valori juste ale eforturilor în dreptul forțelor concentrate.

Observații. 1. Din modul de construcție al poligonului funicular, linia de închidere θ' rezultă cu o direcție oarecare și, uneori, pentru măsurarea ordonatelor este util ca aceasta să fie adusă la orizontală. Aceasta se poate face în diferite feluri.

Astfel, se duce θ'' orizontală și se măsoară ordonatele din dreptul vîrfurilor poligonului de la această orizontală, trăgîndu-se noul poligon. Dacă nu se face această operație prin măsurări, se poate proceda ca în fig. 56, unde se prelungesc toate laturile de poligon funicular θ', *0'*, *1'*, *2'*, *3'*, pînă întîlnesc o dreaptă Δ paralelă cu forțele în punctele *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, apoi din *a* se duce orizontala care va determina noua linie de închidere θ'' orizontală. Punctul *e* se unește cu punctul de intersecție al lui V_B cu θ'' și se determină astfel latura *3''*, apoi punctul *d* se unește cu punctul de intersecție al lui 3'' cu P_3 etc.

Această construcție se bazează pe proprietatea cunoscută a poligoanelor funiculare : punctele de intersecție ale laturilor corespunzătoare a două poligoane funiculare se găsesc pe o dreaptă paralelă cu dreapta ce trece prin cei doi poli cu care au fost construite cele două poligoane funiculare (dreapta lui Culmann).

În construcția de mai sus, luînd dreapta Δ verticală, înseamnă că noul poligon funicular are aceeași distanță polară *H* ca și primul și, deci, scara ordonatelor *m* este aceeași în ambele diagrame.

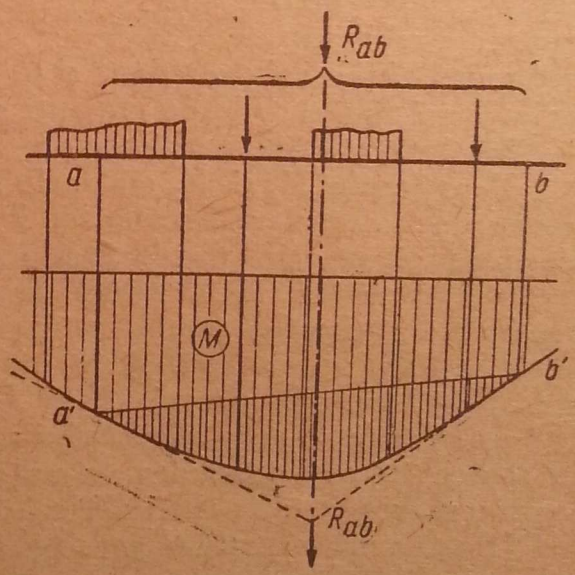


Fig. 57.

Alt procedeu constă în a lua un nou pol O_1 cu o aceeași distanță polară *H* și care să aibă θ_1 orizontală, și apoi, a trage alte raze polare și a construi din nou alt poligon funicular.

2. Din construcțiile grafice cercetate rezultă că, dacă pe un interval *a* — *b* al unei grinzi drepte există un sistem de forțe repartizate sau concentrate, tangentele la diagrama de momente încovoietoare corespunzătoare celor două secțiuni *a* și *b* se întîlnesc pe rezultanta R_{ab} a grupului de forțe dintre *a* și *b* (fig. 57).

3. Diagrama de momente încovoietoare cuprinsă între linia $a'b'$, considerată ca linie de închidere, și poligonul funicular, este chiar diagrama de momente încovoietoare pe o grindă simplu rezemată în a și b și încărcată cu sarcinile din intervalul $a-b$ (fig. 57).

C. SARCINI TRANSMISE INDIRECT. DIAGRAME DE EFORTURI

Uneori forțele nu au punctele de aplicație pe grinda principală, astfel încît efectul lor se transmite prin intermediul lonjeroanelor și al antretoazelor (fig. 58). Partea din grindă cuprinsă între două antretoaze se numește *panou*. Lonjeroanele se consideră simplu rezemate pe antretoaze. Deschiderea lonjeroanelor se notează cu λ.

Grinda principală, antretoazele și lonjeroanele formează un singur solid, geometric nedeformabil din punctul de vedere al mecanicii corpurilor rigide, deci, cînd se izolează acest solid de teren prin introducerea reacțiunilor în locul reazemelor, este indiferent dacă forțele acționează pe grinda principală sau pe lonjeroane. Transmiterea sarcinilor prin antretoaze provoacă numai descompunerea și compunerea acestor forțe în sisteme echivalente de forțe pe același sistem geometric nedeformabil, astfel încît determinarea reacțiunilor se poate face ca și cum sarcinile ar acționa direct pe grinda principală.

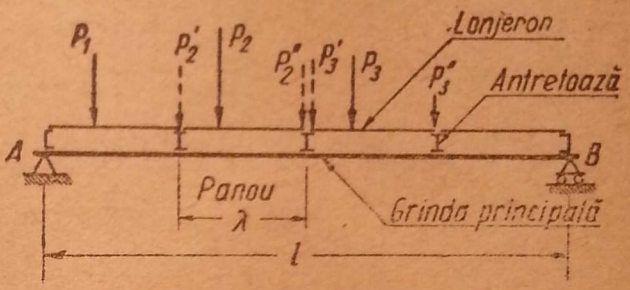


Fig. 58.

Nu se poate trage aceeași concluzie pentru eforturile T și M, deoarece, pentru determinarea lor trebuie exprimat echilibrul unei bucăți de grindă, obținută prin secționarea ei și modul de transmitere al sarcinilor, direct sau prin antretoaze, face ca rezultanta forțelor de la stînga secțiunii să fie, în general, diferită și ca valoare și ca poziție, în cazul în care sarcinile se aplică indirect față de cazul în care sarcinile s-ar aplica direct pe grinda principală.

Totuși, în secțiunile din dreptul antretoazelor se poate trage concluzia că momentele încovoietoare au aceleași valori ca și în cazul transmiterii directe, deoarece sarcina aplicată pe lonjeroane (P_2) se transmite grinzii principale prin componentele ei pe antretoaze (P_2' și P_2''), astfel încît chiar în dreptul antretoazei forțele reale de la stînga secțiunii sînt înlocuite cu un sistem echivalent care rămîne, de asemenea, la stînga secțiunii și care va da deci același moment în raport cu secțiunea de sub antretoază. Este adevărat că aceeași antretoază transmite în aceeași secțiune și sarcini de pe lonjeronul de la dreapta ei (P_3'), dar componenta respectivă P_3' a acestor sarcini nu provoacă moment, avînd braț de pîrghie nul.

Deci, în dreptul antretoazelor momentele încovoietoare sînt aceleași ca și în cazul în care sarcinile s-ar transmite direct. Pe de altă parte, între două antretoaze consecutive momentul încovoietor variază liniar, deoarece nu se aplică nici o sarcină pe grinda principală în intervalul unui panou.

Nu se poate trage o concluzie asemănătoare pentru forța tăietoare, deoarece o secțiune în dreptul antretoazei care transmite sarcina concentrată pe grinda principală nu are sens pentru forța tăietoare, secțiunea trebuind făcută fie imediat la stînga, fie imediat la dreapta antretoazei.

Or, antretoaza transmite sarcini atît de la lonjeronul din stînga, cît și de la cel din dreapta, astfel încît ori unde s-ar face secțiunea, suma forțelor reale de la stînga nu va coincide cu suma forțelor transmise prin antretoaze; ceea ce se poate spune cu anticipație este că forța tăietoare va avea valoare constantă în interiorul unui panou.

Pe baza celor de mai sus se poate construi diagrama momentelor încovoietoare ca în fig. 59, adică se construiește cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular diagrama momentelor încovoietoare pentru

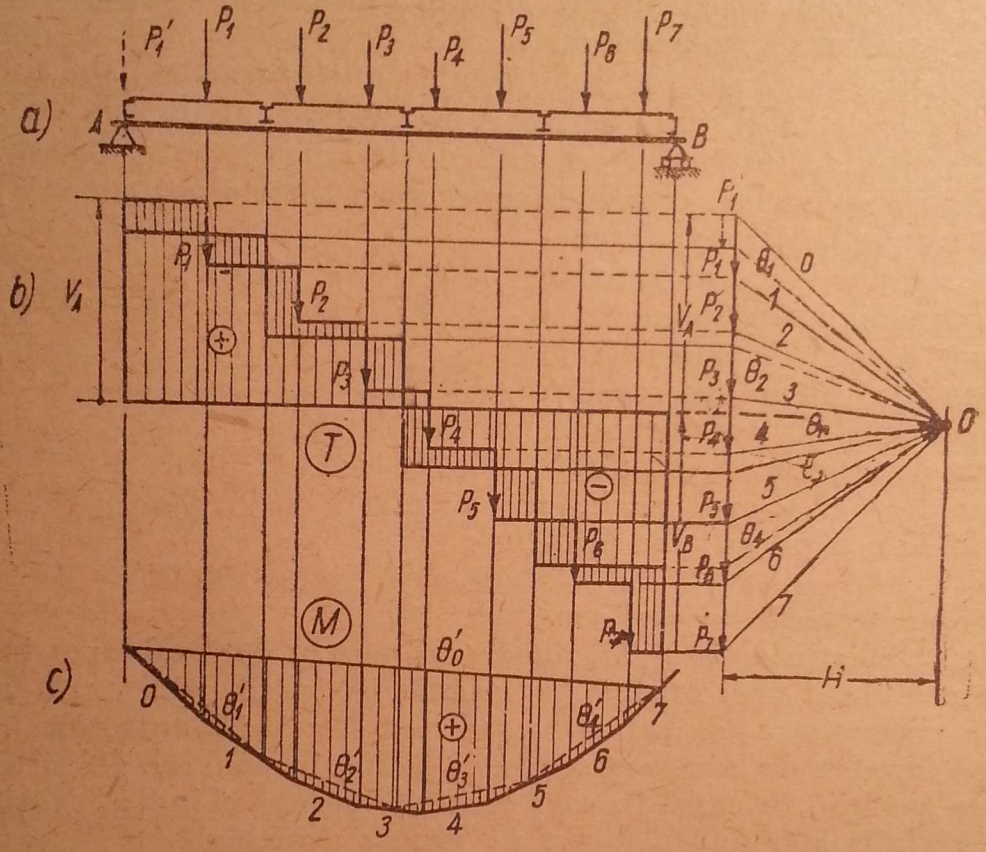


Fig. 59.

sarcini transmise direct (fig. 59, *c*). Din această diagramă sînt valabile numai ordonatele din dreptul antretoazelor, și, apoi, prin dreptele θ_1', θ_2', θ_3' și θ_4', se determină diagrama de momente reală

Se observă că porțiunile care rămîn între laturile θ_1', θ_2', θ_3' etc. și poligonul funicular reprezintă diagramele momentelor încovoietoare din lonjeroane, construite cu aceeași distanță polară H, ca și diagrama generală.

Deci, laturile θ_1', θ_2' etc. sînt liniile de închidere ale poligoanelor funiculare pe fiecare lonjeron, iar paralelele lor θ_1, θ_2 duse din polul O determină pe poligonul forțelor reacțiunile lonjeroanelor, sau, dacă schimbă de sens, componentele pe antretoaze ale sarcinilor lonjeroanelor. Aceasta permite determinarea diagramei forțelor tăietoare. Astfel, în primul panou: $T = V_A - P_1'$, operație care se poate face grafic, dacă se desenează întîi diagrama forțelor tăietoare pentru sarcinile transmise direct și se corectează apoi, prin componentele P_1' etc., determinate în poligonul forțelor așa cum este arătat în fig. 59, *b*.

În diagramă, ca şi în diagrama momentelor, apar astfel trei categorii de forțe tăietoare : forțele tăietoare din ipoteza că sarcinile se transmit direct, forțele tăietoare pe grinda cu sarcini transmise indirect şi forțele tăietoare din lonjeroane.

În concluzie :

Indiferent dacă sarcinile sînt concentrate sau repartizate, diagrama momentelor încovoietoare este un poligon cu vîrfurile în dreptul antretoazelor, deci momentul maxim pe grindă va avea loc neapărat în dreptul unei antretoaze.

Valorile momentelor încovoietoare în cazul sarcinilor transmise indirect pe grinda simplu rezemată sînt mai mici decît în cazul sarcinilor aplicate direct, diferența de momente încovoietoare fiind luată de lonjeroane ; în dreptul antretoazelor momentele sînt aceleaşi.

Să se construiască diagramele de eforturi în cazurile de mai jos :

Aplicația 1 (fig. 60).

$$V_A = \frac{pl}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l}; \qquad V_B = \frac{pl}{2} + \frac{M_2 - M_1}{l};$$

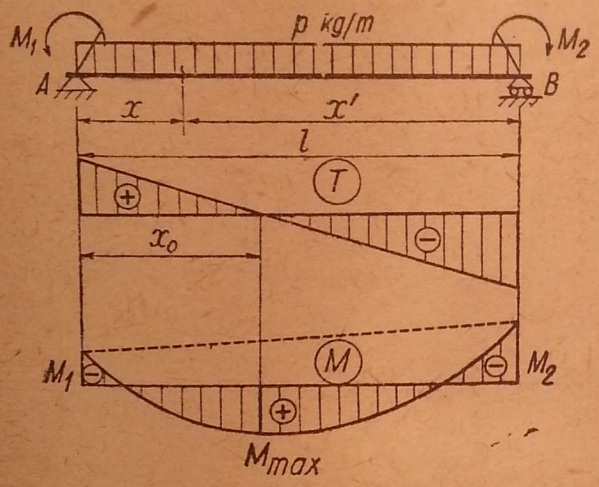


Fig. 60.

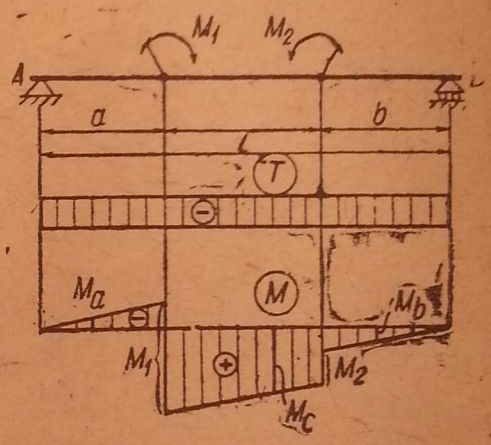


Fig. 61.

$$T = \frac{pl}{2}(1 - 2\xi) - \frac{M_2 - M_1}{l}; \quad T_A = V_A; \quad T_B = -V_B.$$

$$M = \frac{pl^2}{2} \cdot \xi \cdot \xi' - M_1 \xi' - M_2 \xi; \quad \left(\xi = \frac{x}{l}; \ \xi' = \frac{x'}{l}\right);$$

$$x_0 = \frac{T_A}{p}; \quad M_{max} = \frac{T_A^2}{2p} - M_1.$$

Aplicația 2 (fig. 61).

$$M_1 > M_2; \quad V_A = -\frac{M_1 - M_2}{l}; \quad V_B = +\frac{M_1 - M_2}{l}$$

$$T = V_A = -\frac{M_1 - M_2}{l}.$$

$$M_a = -(M_1 - M_2)\xi; \quad M_b = +(M_1 - M_2)\xi'; \quad M_c = M_1 \xi' + M_2 \xi.$$

Aplicația 3 (fig. 62).

$$V_A = -\frac{M_1 + M_2}{l}\ ;\quad V_B = +\frac{M_1 + M_2}{l}\ ;$$

$$T = -\frac{M_1 + M_2}{l}.$$

$$M = M_1\,\xi' - M_2\,\xi.$$

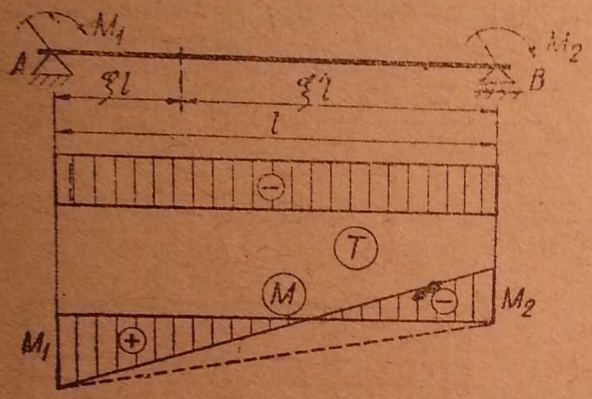


Fig. 62.

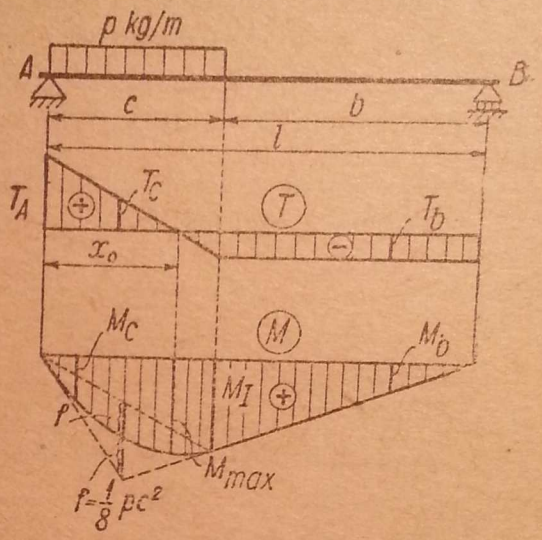


Fig. 63.

Aplicația 4 (fig. 63).

$$V_A = \frac{pc}{2l}(2b + c)\ ;\ V_B = \frac{pc^2}{2l}\ ;\ T_A = V_A\ ;$$

$$T_c = V_A - px\ ;\qquad T_b = -V_B.$$

$$M_I = V_B \cdot b\ ;\quad M_b = M_I\frac{x'}{b}\ ;\quad M_c = V_A \cdot x - \frac{px^2}{2}\ ;$$

$$x_0 = \frac{T_A}{p}\ ;\quad M_{max} = \frac{T_A^2}{2p}.$$

Aplicația 5 (fig. 64).

$$V_A = V_B = \frac{p \cdot c}{2}\ ;\ T_A = V_A = \frac{p \cdot c}{2}\ ;\ T_c = V_A - \frac{pc}{2}\left(\frac{x-a}{c}\right)^2.$$

$$M_I = \frac{p \cdot c \cdot a}{2}\ ;\ M_{II} = M_{max} = \frac{pc^2}{12}\left(3\frac{l}{c} - 2\right);$$

$$M_a = \frac{p \cdot c \cdot x}{2}\ ;\ M_c = V_A\,x - \frac{pc^2}{6}\left(\frac{x-a}{c}\right)^3.$$

Aplicația 6 (fig. 65).

$P =$ încărcare totală.

$$P = \frac{2}{3} pl; \quad V_A = V_B = \frac{pl}{3} = \frac{P}{2};$$

$$T = \frac{pl}{3}(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3).$$

$$M = \frac{pl^2}{3}\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^3);$$

$$M_{max} = \frac{5}{48} pl^2 =$$

$$= \frac{5}{32} Pl = 0,1042\, pl^2 = 0,1563\, Pl.$$

Notă. Se folosesc relațiile: $\frac{dT}{dx} = -p_x$

și $\frac{dM}{dx} = T.$

Aplicația 7 (fig. 66).

Din $\frac{dT}{dx} = -p_x$ și $\frac{dM}{dx} = T$ rezultă:

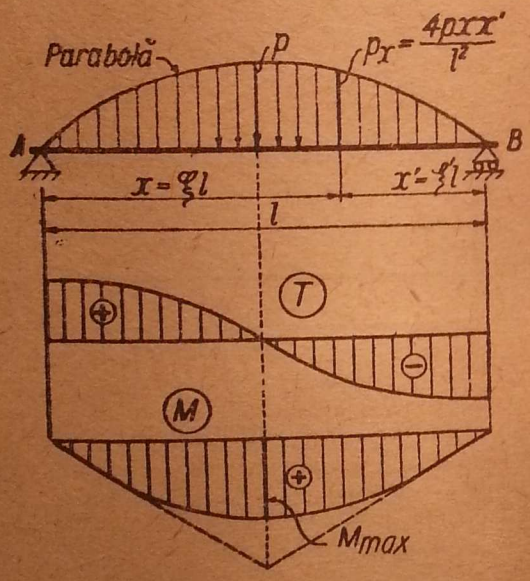


Fig. 65.

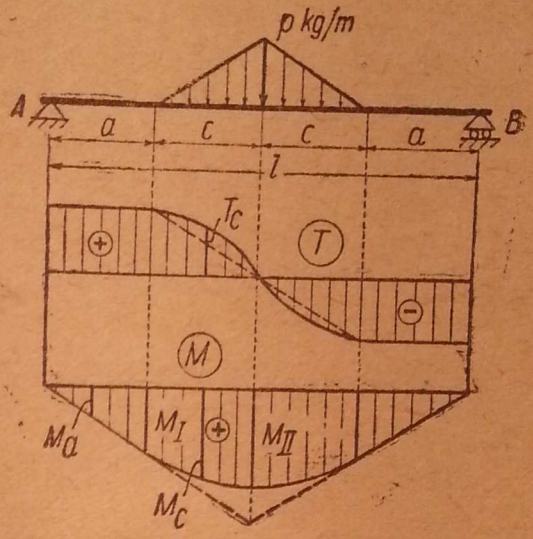


Fig. 64.

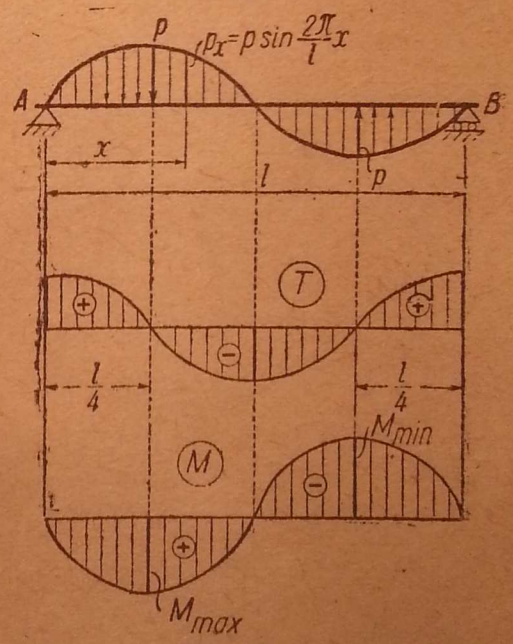


Fig. 66.

$$T = \frac{l}{2\pi} \cdot p \cdot \cos \frac{2\pi}{l} x.$$

$$M = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \cdot p \cdot \sin \frac{2\pi}{l} \cdot x \quad \text{și valorile particulare}$$

$$T_A = + T_B = V_A = -V_B = \frac{pl}{2\pi} = 0,159\, pl.$$

$$M_{max} = -M_{min} = \frac{pl^2}{(2\pi)^2} = 0,0253\, pl^2, \text{ pentru } x = \frac{l}{4}.$$

Aplicația 8 (fig. 67).

Din $\frac{dT}{dx} = -p_x$ și $\frac{dM}{dx} = T$ rezultă:

$$T = \frac{pl}{2}\left[(1-2\xi) - \frac{\alpha}{\pi}\sin 2\pi\xi\right]; \quad T_A = V_A = V_B = \frac{pl}{2}.$$

$$M = \frac{pl^2}{2}\left[\xi\cdot\xi' - \frac{\alpha}{2\pi^2}(1-\cos 2\pi\xi)\right];$$

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8}\left(1 - \frac{4\alpha}{\pi^2}\right), \text{ pentru } x = \frac{l}{2}.$$

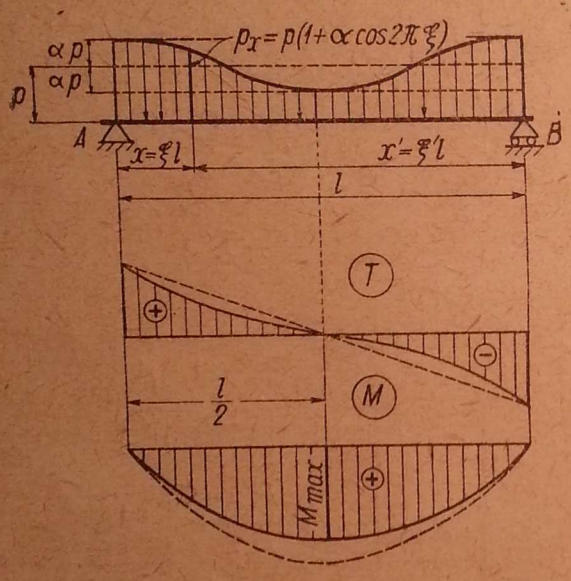


Fig. 67.

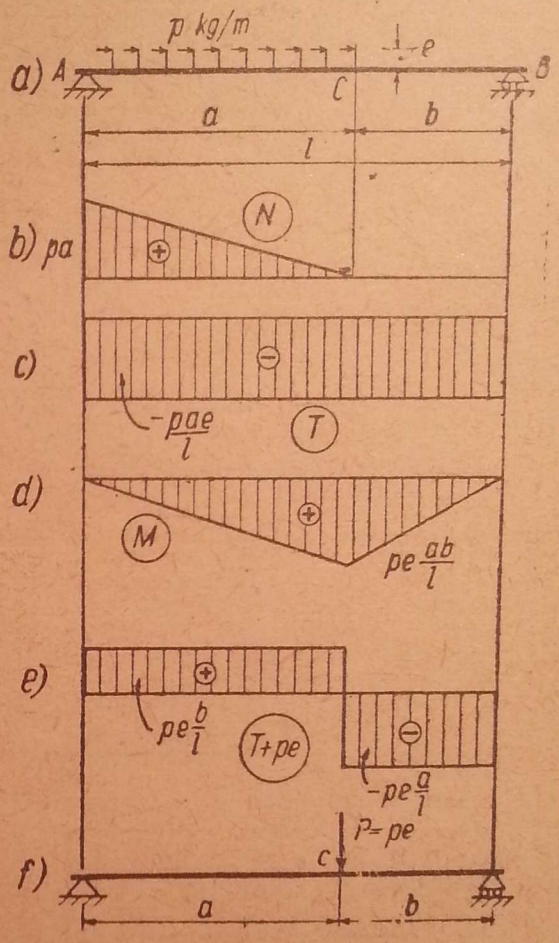


Fig. 68.

Aplicația 9 (fig. 68). Să se construiască și să se interpreteze diagramele de eforturi ale grinzii $A - B$ încărcate pe distanța a cu o sarcină orizontală uniform repartizată p kg/m, la distanța e de axa grinzii.

Indicații. Reacțiunile sînt:

$$V_B = -V_A = \frac{pae}{l}; \quad H_A = pa.$$

Pe intervalul $A - C$:

$$N_x = H_A - px = p(a-x);$$

$$T_x = V_A = -\frac{pae}{l};$$

$$M_x = V_A \cdot x + p \cdot x \cdot e = \frac{pbe}{l} \cdot x.$$

Pe intervalul $C - B$;

$$N_x = 0;$$

$$T_x = - V_B = - \frac{pae}{l};$$

$$M_x = V_B \cdot x' = \frac{pae}{l} \cdot x'.$$

Se observă că sarcina aplicîndu-se cu excentricitate față de axa grinzii, nu mai sînt valabile relațiile diferențiale (3.2), astfel încît pe intervalul $A - C$ trebuie aplicate relațiile generale (3.1') din care rezultă:

$$\frac{dM}{dx} = T + p \cdot e;$$

$$\frac{dT}{dx} = 0;$$

$$\frac{dN}{dx} = p.$$

Pentru a avea corespondența obișnuită între diagramele M și T de la sarcinile aplicate în axa grinzii, va trebui să se construiască o diagramă convențională: $T + pe$ (fig. 68, *e*).

În acest caz, pe intervalul $A - C$ rezultă:

$$T + pe = - \frac{pae}{l} + pe = pe \cdot \frac{b}{l} > 0,$$

iar pe intervalul $C - B$:

$$T + pe = T = - pe \frac{a}{l} < 0.$$

Se observă că diagramele M și $T + pe$ sînt analoge cu cele produse de o sarcină concentrată $P = pe$, aplicată în punctul C al grinzii, adică în punctul unde se termină sarcina repartizată (fig. 68, *f*).

§ 15. GRINDA SIMPLU REZEMATĂ. SARCINI MOBILE

A. LINII DE INFLUENȚĂ PENTRU SARCINI TRANSMISE DIRECT

a) Determinarea liniilor de influență pe cale analitică

Liniile de infuență ale reacțiunilor V_A și V_B. Pe grinda simplu rezemată reprezentată în fig. 69 se va scrie expresia reacțiunii V_A, produsă de sarcina $P = 1$, care se deplasează pe întreaga deschidere.

Dacă $P = 1$ se găsește într-o poziție i la distanța b de reazemul B, rezultă:

$$V_A = \frac{1 \cdot b}{l}.$$

Cînd $P = 1$ se deplasează pe grindă, b variază de la zero la l, și expresia lui V_A reprezintă o dreaptă cu ordonata zero pe reazemul B, și cu ordonata 1, pe reazemul A (fig. 69, *b*).

Fig. 69, *c* reprezintă linia de influență V_B dedusă din expresia

$$V_B = \frac{1 \cdot a}{l}.$$

Linia de influență a forței tăietoare în secțiunea *x*. Dacă $P = 1$ se găsește într-o poziție *i* la dreapta secțiunii *x*, forța tăietoare din secțiunea *x* are expresia :

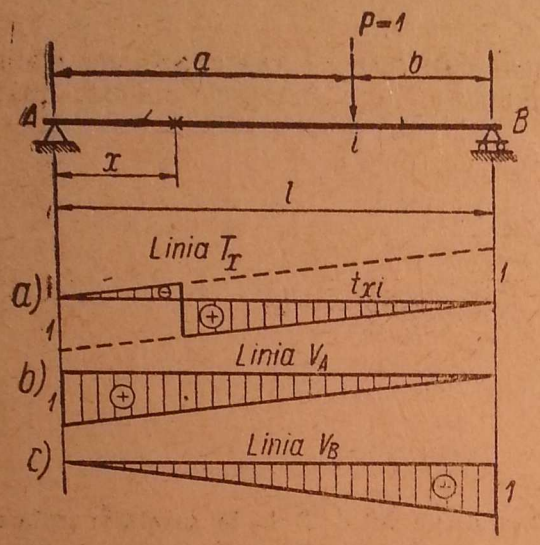


Fig. 69.

$$T_x = \frac{1 \cdot b}{l}, \qquad (3.28)$$

iar dacă $P = 1$ se găsește la stînga secțiunii *x*, rezultă :

$$T_x = \frac{b}{l} - 1 = -\frac{a}{l}. \qquad (3.28')$$

Formulele (3.28) și (3.28′) reprezintă două drepte paralele, din care, dacă se păstrează numai porțiunile în care sînt valabile cele două expresii, se obține linia de influență a forței tăietoare din fig. 69, *a* (linia T_x).

Linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea *x*. Cînd $P = 1$ se găsește în poziția *i* la dreapta secțiunii *x* :

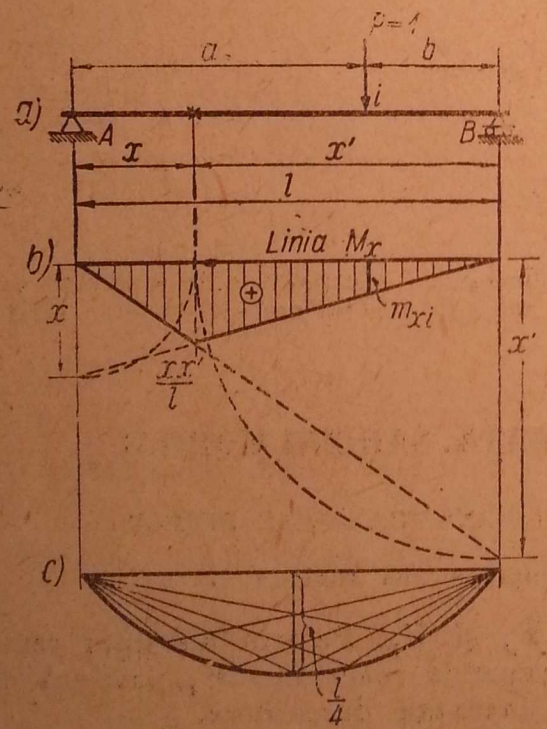


Fig. 70.

$$M_x = \frac{b}{l} \cdot x, \qquad (3.29)$$

iar cînd se găsește la stînga secțiunii *x*,

$$M_x = \frac{a}{l} \cdot x'. \qquad (3.29')$$

Cele două expresii reprezintă două drepte care se întîlnesc în dreptul secțiunii *x*.

Fig. 70 reprezintă linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea *x* (linia M_x); dacă s-ar admite că expresia (3.29) este valabilă pe toată grinda, s-ar obține pentru $b = l$ ordonata $m_{xA} = x$.

Tot astfel, pe reazemul *B* s-ar obține din (3.29′) ordonata : $m_{xB} = x'$, care indică descrierea a cîte un sfert de cerc (fig. 70, *b*).

Linia de influență este un triunghi cu vîrful în dreptul secțiunii *x*, unde are loc ordonata maximă cu valoarea

$$m_{xx} = \frac{x \cdot x'}{l}.$$

Dacă am reprezenta liniile de influență pentru toate secțiunile x de pe grindă, vîrful triunghiului ar descrie parabola $\frac{xx'}{l}$ cu ordonata maximă la mijlocul grinzii egală cu $\frac{l}{4}$ (fig. 70, *c*).

b) Determinarea liniilor T_x și M_x prin deplasări virtuale

Linia de influență T_x. Pentru aceasta trebuie suprimată în secțiunea x legătura simplă corespunzătoare forței tăietoare, adică trebuie să se permită celor două părți ale grinzii să se deplaseze una față de alta în secțiunea x, numai după direcția normalei. Aceasta are loc dacă în secțiunea x se introduce sistemul de bare din fig. 71, *b*. Cum se vede în figură, acest sistem nu permite depărtarea celor două fețe după axa grinzii, și nici rotirea unei fețe față de cealaltă.

Ele se pot deplasa însă, una față de alta, după direcția forței tăietoare, rămînînd mereu paralele (fig. 71, *c*). Pendulele se consideră de o lungime infinit mică, iar deplasarea după direcția forței tăietoare, de asemenea, infinit mică.

Dacă se dă o deplasare, astfel încît cele două forțe T_x să se deplaseze cu cantitatea 1 iar lucrul mecanic $T_x \cdot 1$ să fie negativ, deci deplasarea fie cărei părți să fie în sens contrar forței T_x respective, epura deplasărilor pe verticală (fig. 71, *d*) reprezintă chiar linia de influență T_x. Semnul rezultă automat: partea care s-a lăsat în jos are semnul plus, iar partea care s-a ridicat are semnul minus.

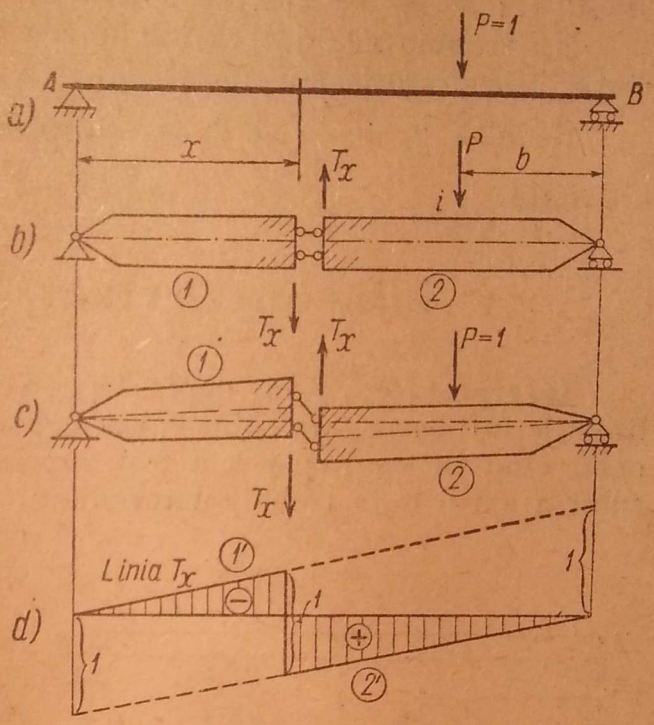


Fig. 71.

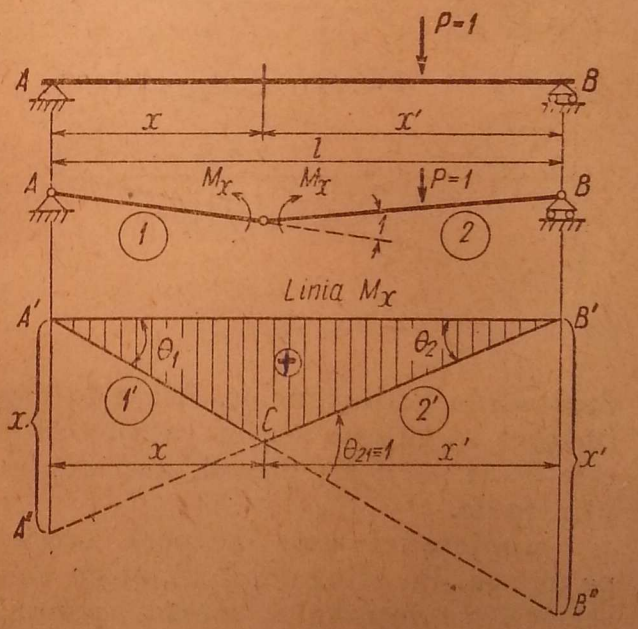


Fig. 72.

Scara rezultă din faptul că cele două fețe s-au depărtat cu cantitatea 1. Dacă se prelungesc pînă la capetele opuse, cele două ramuri, se găsesc ordonatele 1 și pe reazeme.

Linia de influență M_x. Se suprimă în secțiunea x legătura corespunzătoare momentului încovoietor, adică se introduce acolo o articulație și perechea de momente M_x. Sistemul s-a transformat într-un mecanism cu un grad de libertate și se dă deplasarea corespunzătoare astfel încît unghiul corespunzător momentului M_x să fie 1 și de sens contrar cu M_x. Diagrama deplasărilor pe verticală reprezintă chiar linia de influență M_x (fig. 72).

Se observă că $\theta_{21} = 1$ roteşte în sens invers lui M_x de pe corpul 2, cînd grinda se lasă în jos, deci ordonatele sînt pozitive. Scara rezultă imediat. În triunghiul $B'B''C$: $B'B'' = x' \cdot \theta_{21} = x' \cdot 1 = x'$, iar în triunghiul $A'A''C$: $A'A'' = x \cdot \theta_{21} = x \cdot 1 = x$.

Nu trebuie neglijat că unghiurile θ sînt infinit mici, deşi pentru uşurinţa interpretării s-a notat $\theta_{21} = 1$ (§ 11).

Rezultă $\theta_1 = \frac{x'}{l}$ şi $\theta_2 = \frac{x}{l}$, şi cu acestea se poate calcula orice ordonată.

B. LINII DE INFLUENŢĂ PENTRU SARCINI TRANSMISE INDIRECT

Interpretarea prin deplasări virtuale este mai intuitivă, deoarece linia de influenţă este chiar epura deplasărilor pe verticală a liniei de încărcare, cînd în secţiunea x a fost suprimată legătura corespunzătoare efortului a cărui linie trebuie determinată şi s-a dat deplasarea virtuală egală cu unitatea în secţiunea x, de sens contrar efortului.

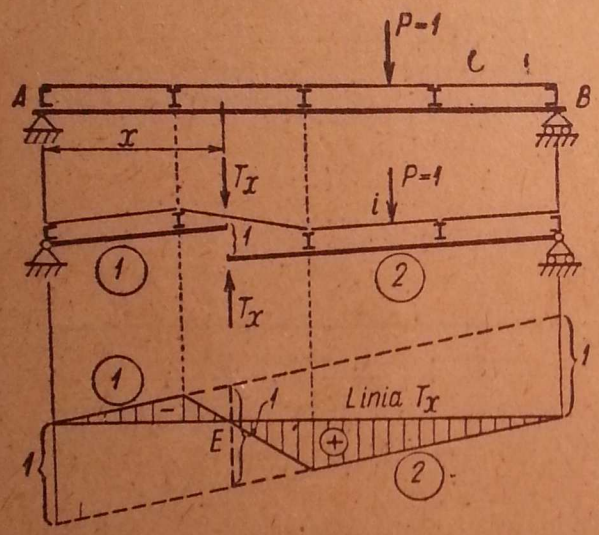


Fig. 73.

Deci, situaţia va fi aceeaşi cu cea de la sarcini transmise direct, pentru deplasări virtuale şi scara liniei de influenţă, cu singura deosebire că pentru a avea efectiv ordonatele liniei de influenţă, trebuie să se urmărească deplasările părţilor de construcţie pe care se aplică sarcina.

Astfel, pentru linia forţei tăietoare în fig. 73 se introduce acelaşi mecanism în secţiunea x, se dă aceeaşi deplasare virtuală şi va rezulta aceeaşi diagramă a deplasărilor părţilor grinzii principale, cu aceeaşi scară ca în cazul fig. 71, dar după aceea trebuie corectată epura deplasărilor, urmărind deplasările lonjeroanelor. Afară de lonjeronul care acoperă panoul secţionat (în care se găseşte secţiunea x), toţi ceilalţi sînt solidari cu cîte una dintre cele două părţi ale grinzii, deci deplasările lor vor fi aceleaşi cu ale grinzii principale.

Lonjeronul care acoperă secţiunea x rămîne însă cu un capăt pe partea din stînga grinzii, şi cu celălalt, pe partea din dreapta. În consecinţă, pe intervalul acestui panou, deplasările lonjeronului vor fi determinate de dreapta care are capătul din stînga pe partea din stînga, şi capătul din dreapta, pe partea din dreapta grinzii principale, aşa cum se vede în figură. Pe restul grinzii, ordonatele sînt aceleaşi ca la sarcinile transmise direct.

Pentru linia de influenţă a momentului încovoietor în secţiunea x este valabilă aceeaşi observaţie, şi operaţia este făcută în fig. 74.

Lonjeronul din panoul unde se găseşte secţiunea x rămîne după deplasare cu un capăt pe partea din stînga, şi cu celălalt capăt, pe partea din dreapta grinzii principale. Linia de influenţă care trebuie determinată

este a momentului încovoietor în secțiunea x a grinzii principale, deci unghiul $\theta_{21} = 1$ trebuie introdus între ramurile grinzii principale, deoarece numai astfel se poate determina scara.

Deci liniile de influență T_x și M_x, în cazul sarcinilor transmise indirect, se obțin din aceleași linii T_x și M_x, din cazul sarcinilor transmise direct, corectate însă printr-o dreaptă pe intervalul panoului în care se găsește secțiunea.

Se observă din fig. 73 că linia de influență T_x este aceeași pentru orice secțiune x în interiorul aceluiași panou, ceea ce nu este valabil pentru linia M_x (fig. 74).

Punctul E unde se anulează linia de influență a forței tăietoare, care este aceeași pentru orice secțiune din același panou, se numește punct limită al forței tăietoare în panoul respectiv.

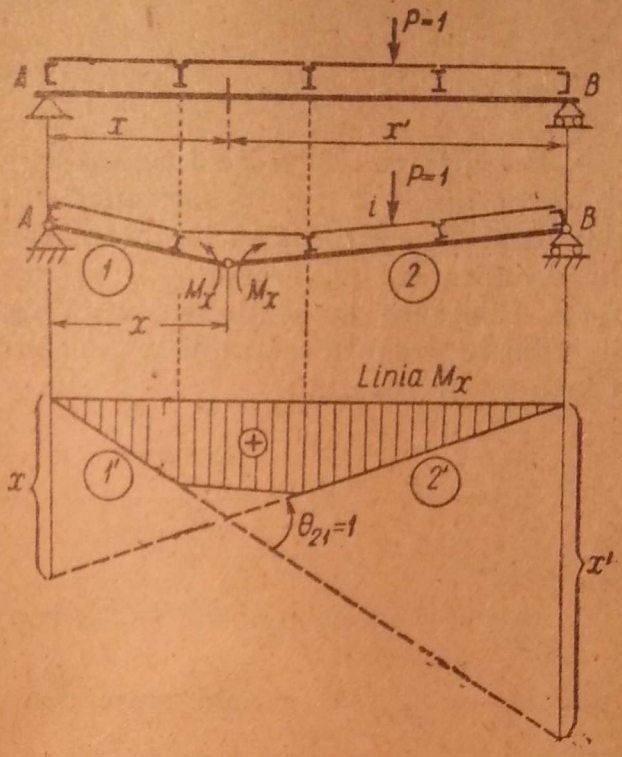


Fig. 74

Aceleași rezultate se pot obține și pe cale analitică, prin calcule elementare.

C. FORȚA TĂIETOARE MAXIMĂ

a) Sarcini directe. Soluție analitică

Se presupune că pe o grindă simplu rezemată înaintează de la dreapta spre stînga un convoi de forțe concentrate. Din suprapunerea efectelor în secțiunea x se poate scrie :

$$T_x = t_{x1} \cdot P_1 + t_{x2} \cdot P_2 + \\ + t_{x3} \cdot P_3 + \dots$$

ceea ce arată că pentru a obține T_x cît mai mare, trebuie încărcată numai regiunea pozitivă a liniei de influență, iar ordonatele cu care se înmulțesc forțele să fie cît mai mari. Aceasta înseamnă că prima forță a convoiului va fi așezată imediat în dreapta secțiunii x. Se obține astfel $T_{x\,max}$ (fig. 75).

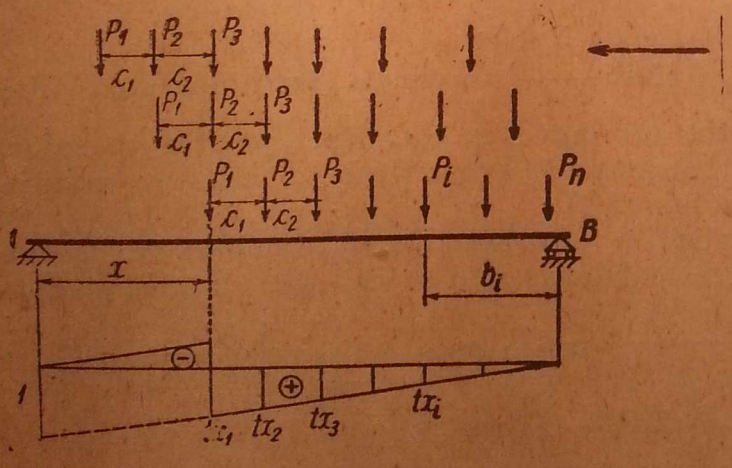


Fig. 75

În acest caz valoarea forței tăietoare se poate calcula fără să se mai țină seamă de linia de influență, forța tăietoare fiind chiar reacțiunea V_A:

$$T_x = V_A = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l}.$$

Dacă forța P_1 trece imediat în stînga secțiunii, valoarea ei se scade din reacțiunea V_A, și în secțiunea x se obține o forță tăietoare mai mică; dar dacă P_1 continuă să înainteze spre stînga, pînă cînd P_2 ajunge imediat în dreapta lui x, crește și reacțiunea, astfel încît se poate întîmpla ca forța tăietoare în secțiunea x să fie mai mare. Astfel: dacă P_2 a ajuns imediat în dreapta secțiunii x, tot convoiul s-a deplasat spre stînga cu distanța c_1 și rezultă:

$$T'_x = V'_A - P_1 = \frac{\sum_1^n P_i (b_i + c_1)}{l} - P_1 = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l} + \frac{c_1}{l}\sum_1^n P_i - P_1$$

sau

$$T'_x = T_x + \frac{c_1}{l}\sum_1^n P_i - P_1;$$

pentru ca T'_x să fie mai mare decît T_x, trebuie ca $\frac{c_1}{l}\sum_1^n P_i > P_1$

sau

$$\frac{P_1}{c_1} < \frac{\sum_1^n P_i}{l}. \qquad (3.30)$$

Aceasta se întîmplă cînd P_1 are valoare mică în raport cu celelalte forțe.

În calculele de mai sus $\sum_1^n P_i$ reprezintă toate forțele care intră pe grindă și, deoarece suma nu a fost schimbată, înseamnă că prin deplasarea convoiului nu a intrat o altă forță pe grindă.

Dacă inegalitatea (3.30) este satisfăcută pentru o secțiune x, cu atît mai mult va fi satisfăcută pentru toate secțiunile de la stînga lui x, deoarece $\frac{P_1}{c_1}$ rămîne constant, pe cînd $\frac{\sum_1^n P_i}{l}$ crește prin intrarea altor forțe pe grindă, sau cel puțin rămîne constant. Deci, poziția convoiului cu forța P_2 în secțiune va fi cel puțin poziția care dă forța tăietoare maximă în toate secțiunile din stînga lui x.

Pentru a verifica dacă poziția convoiului cu P_3 imediat în dreapta lui x nu dă $T_{x\,max}$, se repetă calculele de mai sus în această nouă poziție:

$$T''_x = V''_A - P_1 - P_2 = \frac{\Sigma P_i (b_i + c_1 + c_2)}{l} - P_1 - P_2 = \left[\frac{\Sigma P_i (b_i + c_1)}{l} - P_1\right] + \frac{c_2}{l}\Sigma P_i - P_2 \text{ sau:}$$

$$T''_x = T'_x + \frac{c_2}{l}\sum_1^n P_i - P_2 = T'_x + c_2 \cdot \left[\frac{\sum_1^n P_i}{l} - \frac{P_2}{c_2}\right].$$

Pentru ca: $T''_x > T'_x$, **trebuie ca:**

$$\frac{P_2}{c_2} < \frac{\sum_1^n P_i}{l}. \tag{3.31}$$

În acest caz, forța P_3 în secțiune dă valoarea $T_{x\,max}$. Condiția exprimată de relația (3.31) trebuie satisfăcută concomitent cu relația (3.30).

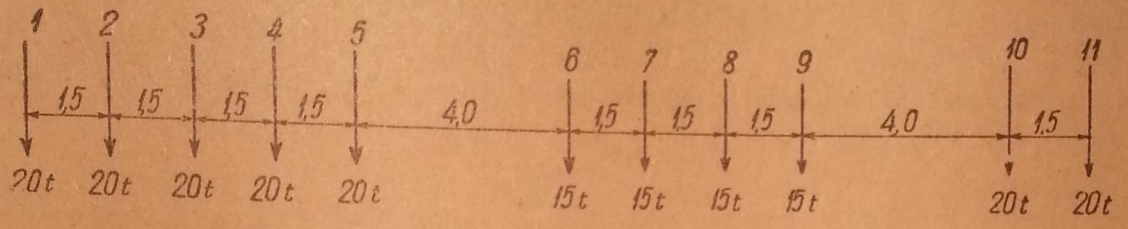


Fig. 76.

Aplicația 10. Pentru o grindă cu deschiderea $l=15$ m să se afle $V_{A\,max}$ și $T_{x\,max}$, unde $x=5$ m, convoiul fiind cel din fig. 76.

Rezolvare. Pentru sistematizarea calculelor se alcătuiește tabela 2, în care coloanele reprezintă:

1. Numărul de ordine al forței P.
2. Mărimea fiecărei forțe P.
3. Distanța dintre forțele consecutive, c.
4. Distanța de la forța considerată pînă la prima forță, d.
5. Suma forțelor din stînga, inclusiv forța considerată.
6. Momentul tuturor forțelor de la stînga, în raport cu cea considerată.

Acesta din urmă se calculează cu relația de recurență:

$$M_i = M_{i-1} + c_i \sum_1^{i-1} P_i.$$

Tabela 2

1 Nr.	2 P tone	3 c metri	4 d metri	5 ΣP tone	6 M tm
1	20	0	0	20	0
2	20	1,5	1,5	40	30
3	20	1,5	3,0	60	90
4	20	1,5	4,5	80	180
5	20	1,5	6,0	100	300
6	15	4,0	10,0	115	700
7	15	1,5	11,5	130	872,5
8	15	1,5	13,0	145	1 067,5
9	15	1,5	14,5	160	1 285
10	20	4,0	18,5	180	1 925
11	20	1,5	20,0	200	2195

Lungimea maximă de convoi care poate intra pe grindă este de 14,5 m. Cînd P_1 se aplică pe reazemul A, distanța de la ultima forță P_9 pînă la reazemul B este:

$$b_9 = 15 - 14{,}5 = 0{,}5 \text{ m}.$$

Momentul tuturor forțelor de pe grindă în raport cu reazemul B este:

$$M_B = M_9 + b_9 \sum_1^9 P_i = 1\,285 + 0{,}5 \cdot 160 = 1\,365 \text{ tm}.$$

Reacțiunea maximă pe reazemul A va fi:

$$V_{A\,max} = \frac{M_B}{l} = \frac{1\,365}{15} = 91 \text{ t.}$$

Forța tăietoare maximă în secțiunea $x = 5$ m ($x' = 10$) se determină astfel: Lungimea maximă de convoi care intră în $x' = 10$ m este 10 m (forțele $P_1, \ldots, P_6$). Forța P_6 se aplică pe reazemul B.

Deci
$$T_x = V_A = \frac{M_6}{l} = \frac{700}{15} = 46{,}67 \text{ t.}$$

Pentru a vedea dacă nu trebuie deplasat convoiul spre stînga, astfel încît P_2 să ajungă în secțiune, se verifică relația (3.30):

$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}33 \quad \text{și} \quad \frac{\sum_1^6 P_i}{l} = \frac{115}{15} = 7{,}67.$$

Deoarece $13{,}3 > 7{,}67$, înseamnă că nu trebuie deplasat convoiul spre stînga.

Deci, $T = 46{,}67$ t este forța tăietoare maximă în secțiunea $x = 5$ m și este dată de poziția convoiului cu P_1 în secțiune.

Este ușor de observat că și pentru toate secțiunile de la stînga, tot P_1 în secțiune dă T_{max}, deoarece la limită, cînd secțiunea ajunge lîngă reazemul A, pe grindă încap maximum 160 t și, deci:

$$\frac{\sum_1^9 P_i}{l} = \frac{160}{15} = 10{,}67;$$

însă
$$13{,}3 > 10{,}67.$$

Aplicația 11. Pe grinda cu $l = 20$ m să se afle V_{Amax} și T_{max} în secțiunea $x = 5$ m, pentru convoiul din fig. 77.

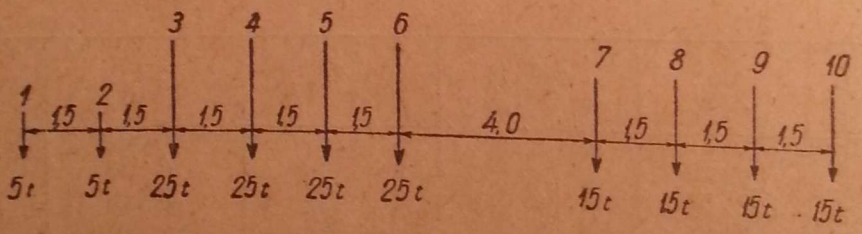


Fig. 77.

Rezolvare. Se alcătuiește tabela 3 ca și cea din problema precedentă, și se constată că pe grindă încape întregul convoi. Punînd P_1 în A, distanța de la ultima forță pînă la reazemul B rămîne:

$$b_{10} = 20 - 16 = 4 \text{ m.}$$

Momentul sistemului de forțe în raport cu reazemul B este:

$$M_B = M_{10} + b_{10} \cdot \sum_1^{10} P_i = 1\,371 + 4 \cdot 170 = 2\,051 \text{ tm}$$

și:

$$V_A = \frac{M_B}{l} = \frac{2\,051}{20} = 102{,}55 \text{ t.}$$

Tabela 3

Nr.	P	c	d	ΣP	M
1	5	0	0	5	0
2	5	1,5	1,5	10	7,5
3	25	1,5	3,0	35	22,5
4	25	1,5	4,5	60	75,0
5	25	1,5	6,0	85	165,0
6	25	1,5	7,5	110	292,5
7	15	4,0	11,5	125	732,5
8	15	1,5	13,0	140	929,5
9	15	1,5	14,5	155	1 139,5
10	15	1,5	16,0	170	1 371,0

Verificînd relația (3.30) se găsește:

$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{5}{1,5} = 3,33; \qquad \frac{\overset{10}{\underset{1}{\Sigma}} P_i}{l} = \frac{170}{20} = 8,5; \quad 3,33 < 8,5.$$

Deci, convoiul trebuie deplasat spre stînga, încercînd cu P_2 pe reazem.

Să verificăm și relația (3.31). Trebuie să se observe însă că P_1 a ieșit afară de pe grindă și, deci, $\overset{10}{\underset{2}{\Sigma}} P_i = 170 - 5 = 165$ t.

Deci:

$$\frac{P_2}{c_2} = \frac{5}{1,5} = 3,33; \qquad \frac{\overset{10}{\underset{2}{\Sigma}} P_i}{l} = \frac{165}{20} = 8,25; \quad 3,33 < 8,25.$$

Convoiul trebuie deplasat mai spre stînga, cu P_3 pe reazemul A.

Să vedem dacă nu trebuie deplasat și mai spre stînga. În acest caz iese și P_2 afară de pe grindă și, deci, $\overset{10}{\underset{3}{\Sigma}} P_i = 165 - 5 = 160$ t:

$$\frac{P_3}{c_3} = \frac{25}{1,5} = 16,7; \qquad \frac{\overset{10}{\underset{3}{\Sigma}} P_i}{l} = \frac{160}{20} = 8; \quad 16,7 > 8.$$

Convoiul nu mai trebuie deplasat spre stînga. Poziția de maxim este deci cu P_3 pe reazem și

$$V_{A\,max} = \frac{M_B}{l}, \text{ unde } M_B \text{ are expresia:}$$

$$M_B = M_{10} + b_{10} \cdot \overset{10}{\underset{1}{\Sigma}} P_i - M_3 - l \overset{2}{\underset{1}{\Sigma}} P_i.$$

În cazul de față $b_{10} = 7$ m; s-a ținut seamă că P_1 și P_2 ies afară de pe grindă. Deci:

$$M_B = 1\,371 + 7 \cdot 170 - 22,5 - 20 \cdot 10 = 2\,339,5 \text{ tm};$$

$$V_{A\,max} = \frac{2\,339,5}{20} = 116,975 \text{ t}.$$

Se observă că, deși au ieșit forțe afară de pe grindă, V_A este mai mare decît în cazul cînd P_1 era pe reazem, deoarece forțele mari s-au apropiat de reazem.

Pentru cazul cînd P_1 se aplică în secțiunea $x = 5$ m, pe grindă intră nouă forțe și $b_9 = 15 - 14{,}5 = 0{,}5$ m.

$$M_B = M_9 + b_9 \sum_1^9 P_i = 1\,139{,}5 + 0{,}5 \cdot 155 = 1\,217 \text{ tm};$$

$$T_x = V_A = \frac{M_B}{l} = \frac{1\,217}{20} = 60{,}85 \text{ t}, \text{ însă această poziție nu dă pe } T_{max}.$$

În adevăr: $\dfrac{P_1}{c_1} = 3{,}33$ și $\dfrac{\sum_1^9 P_i}{l} = \dfrac{155}{20} = 7{,}75$; $3{,}33 < 7{,}55$,

deci convoiul trebuie deplasat cu P_2 în secțiune.

Să verificăm și relația (3.31). Acum intră și P_{10} pe grindă:

$$\frac{P_2}{c_2} = 3{,}33 \text{ și } \frac{\sum_1^{10} P_i}{l} = \frac{170}{20} = 8{,}5; \quad 3{,}33 < 8{,}5.$$

Deci, convoiul trebuie deplasat cu P_3 în secțiune.

Să vedem dacă nu trebuie pus P_4 în secțiune:

$$\frac{P_3}{c_3} = \frac{25}{1{,}5} = 16{,}67 \text{ și } \frac{\sum_1^{10} P_i}{l} = 8{,}5; \quad 16{,}67 > 8{,}5,$$

deci, poziția nu este bună.

Poziția de maxim este dată de P_3 în secțiune. În acest caz, distanța de la ultima forță la reazemul B este:

$$b_{10} = 15 - (16{,}0 - 3{,}0) = 2 \text{ m}, \text{ și}$$

$$M_B = M_{10} + b_{10} \sum_1^{10} P_i = 1\,371 + 2 \cdot 170 = 1\,711 \text{ tm};$$

$$T_{x\,max} = V_A - P_1 - P_2 = \frac{1\,711}{20} - 10 = 85{,}55 - 10 = 75{,}55 \text{ t}.$$

b) Sarcini directe. Soluție grafică

S-a văzut că, în general, $T_{x\,max}$ se obține cînd prima forță se aplică în secțiunea x și, în acest caz, forța tăietoare din secțiune este chiar reacțiunea din A, pentru această poziție a convoiului:

$$T_{max} = V_A = \frac{\sum P_i b_i}{l}.$$

Pe cale grafică $\sum P_i b_i$ se obține dacă se construiește un poligon de forțe și unul funicular pentru forțele care acționează grinda. Segmentul vertical m (fig. 78, *a*) din dreptul reazemului B, interceptat între prima și ultima latură de poligon funicular care acționează grinda, multiplicat cu distanța polară H (fig. 78, *b*) reprezintă $\sum P_i b_i$, adică momentul tuturor forțelor de pe grindă în raport cu reazemul B. $\sum P_i b_i = mH$.

Deci:

$$V_A = \frac{\sum P_i b_i}{l} = \frac{mH}{l}.$$

Dacă se alege distanța polară $H = l$, atunci : $V_A = m$, unde m se măsoară la scara forțelor.

Pentru o altă secțiune x_1, ar trebui construit un alt poligon funicular, pentru a găsi o altă valoare m_1. Se poate evita aceasta, dacă se întoarce convoiul cap la cap și se așază P_1 în dreptul reazemului B și restul forțelor P_2, P_3, . . . , în ordine succesivă, de această dată de la dreapta spre stînga (fig. 79). Poligonul forțelor se așază pe verticala reazemului A și cu $A'B' = l$; ca distanță polară se construiește poligonul funicular pentru noua poziție inversată a convoiului. Segmentul m, care trebuie măsurat acum în dreptul secțiunii x, reprezintă valoarea reacțiunii din A pentru poziția reală a convoiului cu P_1 în secțiunea x. Dacă se deplasează convoiul real cu P_1 în altă secțiune x_1, ordonata poligonului funicular în dreptul acelei secțiuni indică direct valoarea reacțiunii din A, pentru noua poziție a convoiului. Poligonul funicular astfel construit reprezintă variația reacțiunii din A, cînd convoiul se deplasează de la dreapta spre stînga, și de aceea se mai numește și *poligonul A*.

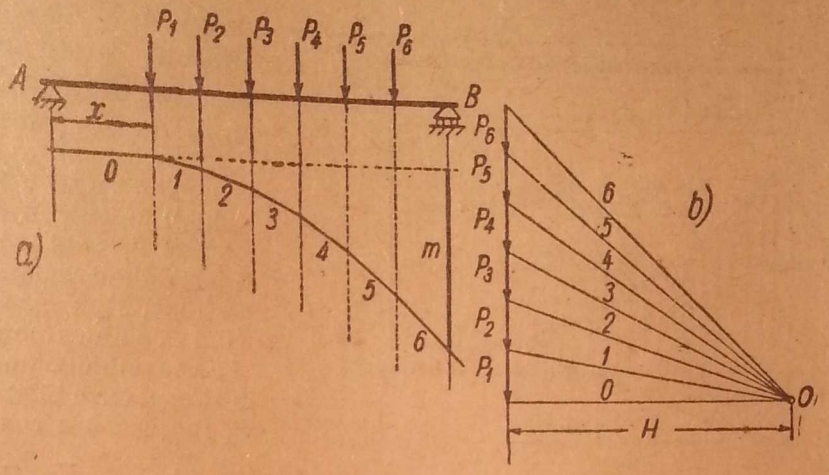


Fig. 78.

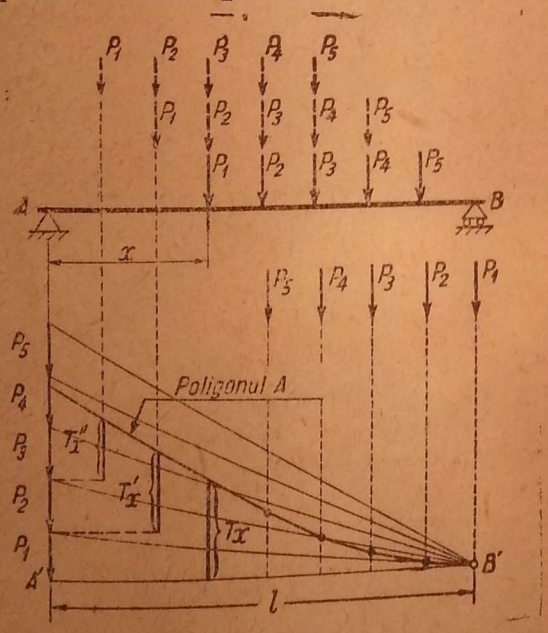


Fig. 79.

S-a presupus că T_x este maxim, cînd P_1 se aplică în secțiunea x, și atunci T_x este chiar reacțiunea din A. Deci, ordonata în dreptul secțiunii, măsurată la scara forțelor (fig. 79), este T_x. Pentru a vedea dacă P_2 în secțiune nu dă o forță tăietoare mai mare, se deplasează convoiul cu P_2 în secțiune și, în acest caz : $T'_x = V'_A - P_1$, deci în dreptul lui P_1 se măsoară ordonata și se scade P_1, așa cum se vede în fig. 79, unde apare T'_x. De asemenea, se încearcă cu P_3 în secțiune și se obține T''_x. Prin măsurare rezultă care este mai mare.

Cînd convoiul este format dintr-o sarcină uniform repartizată care înaintează de la dreapta la stînga, poligonul A devine o parabolă :

$$T_{x\,max} = P\,\frac{(l-x)^2}{2\,l}.$$

Dacă peste această curbă se suprapune și diagrama forțelor tăietoare date de sarcina permanentă uniform distribuită g, se obține diagrama

forțelor tăietoare maxime totale din încărcări permanente și mobile. cum se vede în fig. 80.

În mod analog se procedează cînd convoiul înaintează de la stînga la dreapta. Pentru a nu repeta inutil calculul și construcția grafică, se poate înlocui x cu x' și se poate schimba semnul diagramei ; în acest caz se obțin valorile forței tăietoare minime.

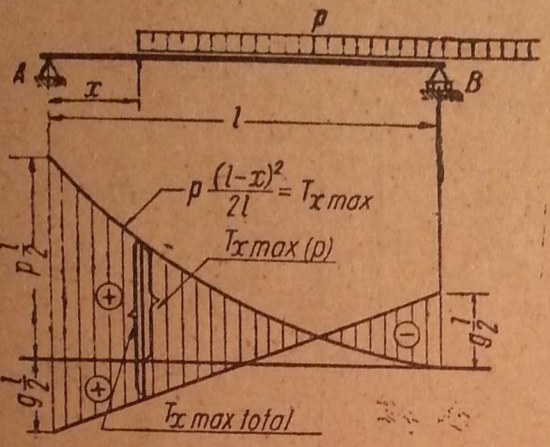


Fig. 80.

Observație. În timpul trecerii convoiului pe grindă, în secțiunea x forța tăietoare variază în felul următor : cînd prima forță P_1 a convoiului înaintează de pe reazemul B spre secțiune, T_x crește pînă ajunge la o valoare T_1, cînd P_1 a ajuns imediat la dreapta lui x (poziția *1* a convoiului). Imediat ce sarcina P_1 a trecut în stînga, forța tăietoare scade brusc cu valoarea P_1 (poziția *2* a convoiului) și ajunge la valoarea $T_1' = T_1 - P_1$.

Apoi, T_x în cepe să crească din nou pînă cînd P_2 ajunge în dreapta secțiunii x. Dacă se reprezintă T_x în dreptul lui P_1, rezultă astfel valoarea T_2. Imediat ce P_2 a trecut în stînga lui x, T_x scade la valoarea : $T_2' = T_2 - P_2$ și așa mai departe. În dreptul secțiunii x rezultă salturi de forță tăietoare, de cîte ori o forță trece peste secțiune, așa cum se arată în fig. 81. Valoarea lui T_x este reprezentată mereu în dreptul lui P_1, și diagrama se întinde, bineînțeles, și în afara reazemului A, pînă cînd ultima sarcină a ieșit de pe grindă.

c) Sarcini indirecte. Soluție analitică

Se încarcă cu sarcini porțiunea pozitivă a liniei de influență (fig. 82). Deoarece linia de influență a forței tăietoare este aceeași pentru orice secțiune din panou, rezultă că forța tăietoare maximă va fi aceeași pe tot panoul, astfel încît în loc să se vorbească de forța tăietoare într-o secțiune, se vorbește de forța tăietoare din panou.

Dacă se aplică P_1 în E, rezultă :

$$T_x = V_A = \frac{\sum_1^n P_i\, b_i}{l}.$$

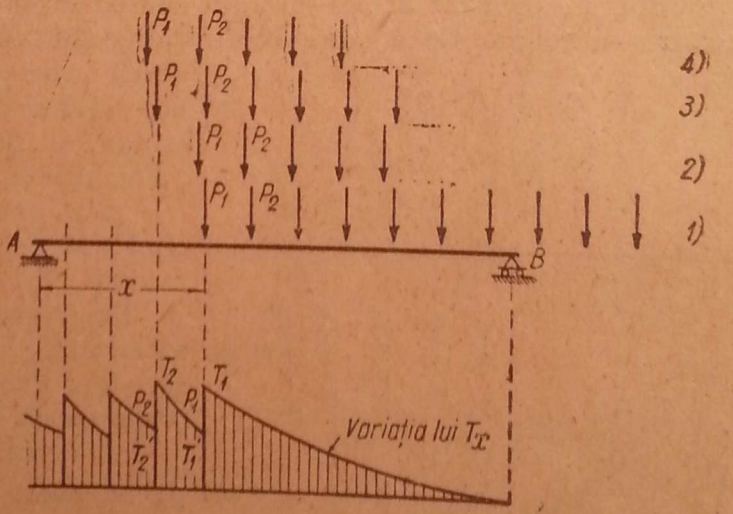


Fig. 81.

Dacă se deplasează convoiul astfel, încît P_2 să ajungă în E, P_1 intră în panou. Notînd cu P_D' componenta lui P pe antretoaza din D, rezultă :

$$T_x' = V_A' - P_D' = \frac{\sum_1^n P_i(b_i + c_1)}{l} - \frac{P_1 \cdot c_1}{\lambda} = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l} + \frac{c_1}{l}\sum_1^n P_i - \frac{c_1}{\lambda} P_1$$

sau :

$$T_x' = T_x + c_1\left(\frac{\sum_1^n P_i}{l} - \frac{P_1}{\lambda}\right).$$

Deci, $T'_x > T_x$, dacă :

$$\frac{P_1}{\lambda} < \frac{\sum_1^n P_i}{l}. \qquad (3.32)$$

Dacă se deplasează convoiul mai la stînga, astfel încît P_3 să ajungă în E, iar P_1 şi P_2 să rămînă în panoul $D-E$ şi se notează cu P''_D componenta forţelor P_1 şi P_2 pe antretoaza din D, rezultă :

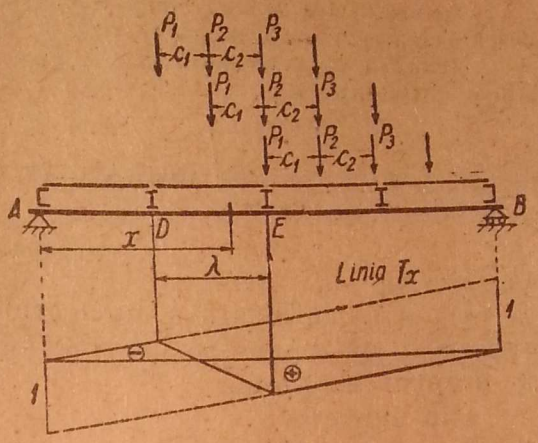


Fig. 82.

$$T''_x = V''_A - P''_D = \frac{\sum_1^n P_i (b_i + c_1 + c_2)}{l} - \frac{P_1 (c_1 + c_2) + P_2 c_2}{\lambda}$$

sau, după transformări :

$$T''_x = T'_x + c_2 \left(\frac{\sum_1^n P_i}{l} - \frac{P_1 + P_2}{\lambda} \right).$$

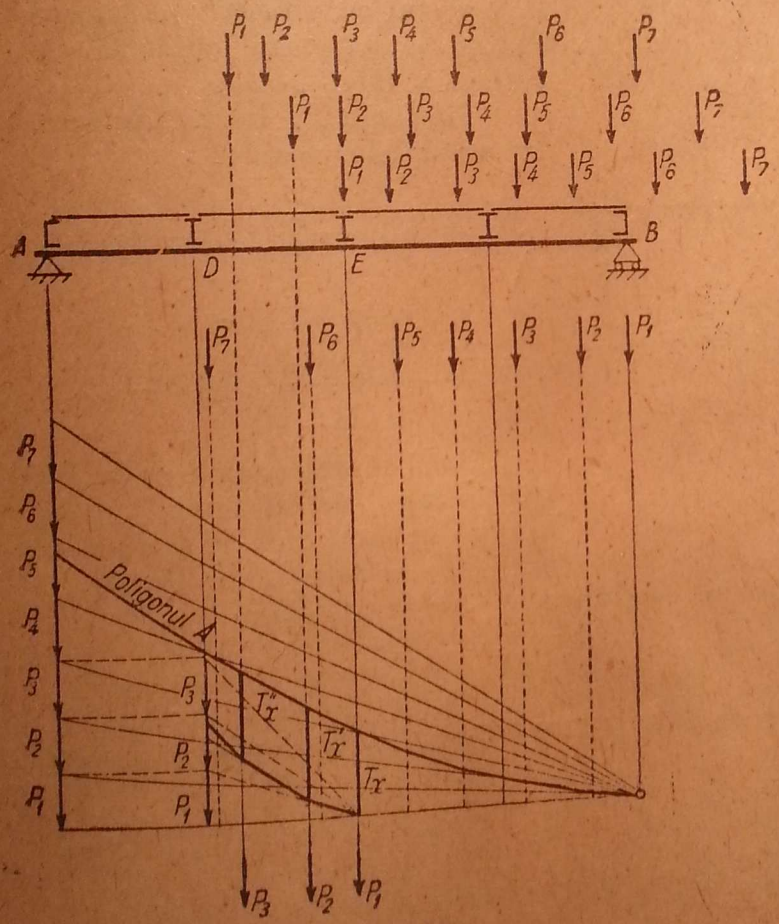


Fig. 83.

Deci, $T''_x > T'_x$ dacă :

$$\frac{P_1 + P_2}{\lambda} < \frac{\sum_1^n P_i}{l}. \qquad (3.32')$$

Relaţiile (3.32) şi (3.32′) arată cum trebuie deplasat convoiul pentru a obţine forţa tăietoare maximă în panou.

Pentru panourile de la stînga panoului considerat, se trag aceleaşi concluzii ca la sarcinile transmise direct asupra poziţiei convoiului pentru T_{max}.

d) Sarcini indirecte. Soluţie grafică

Se foloseşte, de asemenea, poligonul A, ca şi la sarcinile transmise direct (fig. 83).

Dacă P_1 se aplică în E, T_x se măsoară direct ca ordonată a poligonului A în dreptul lui E.

Dacă P_2 este în E, atunci, din : $T'_x = V'_A - P'_D$ rezultă că din ordonata poligonului A în dreptul lui P_1 trebuie să se scadă componenta P'_D din D a sarcinii P_1 care intră în panou, iar dacă P_3 este în E, din $T''_x = V''_A - P''_D$ rezultă că trebuie să se scadă componenta P''_D a forţelor P_1 şi P_2 din ordonata în dreptul lui P_1.

Aceste scăderi se fac cu un nou poligon A, pentru forțele P_1 și P_2, pentru o grindă avînd deschid erea panoului așa cum se vede în fig. 83.

Valoarea T_{max} obținută pentru P_1, P_2 sau P_3, în E, este valabilă pe tot panoul din stînga antretoazei E.

D. MOMENTE ÎNCOVOIETOARE MAXIME

a) Soluție analitică

Linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea x este pozitivă pe toată deschiderea, avînd forma unui triunghi cu ordonata maximă în dreptul secțiunii.

Din expresia :

$$M_x = m_{x1} \cdot P_1 + m_{x2} \cdot P_2 + \ldots + m_{xi} \cdot P_i + \ldots + m_{xn} \cdot P_n$$

rezultă că, pentru a obține momentul încovoietor maxim, trebuie așezate cît mai multe forțe pe grindă, astfel încît cele mai mari să fie în dreptul ordonatelor mari, una dintre ele acționînd chiar în secțiunea x (fig. 84).

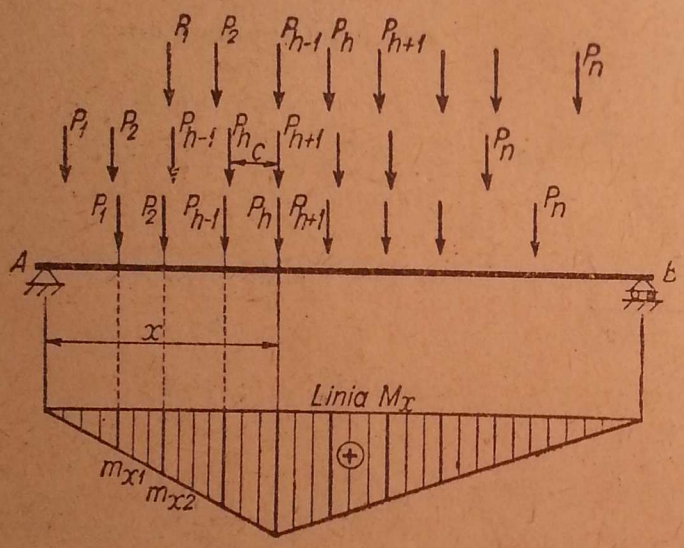


Fig. 84.

Fie forța P_h în secțiunea x. În acest caz, rezultă :

$$M_x = V_A\, x - \sum_1^h P_i\,(x - a_i) =$$

$$= \frac{\sum_1^n P_i\, b_i}{l} \cdot x - \sum_1^h P_i\,(x - a_i).$$

Dacă se deplasează convoiul spre stînga, astfel încît P_{h+1} să ajungă în secțiunea x, și dacă se notează cu c distanța dintre P_h și P_{h+1}, momentul încovoietor în secțiunea x are expresia :

$$M'_x = V'_A \cdot x - \sum_1^h P_i\,(x - a_i + c) = \frac{\sum_1^n P_i(b_i + c)}{l}\, x - \sum_1^h P_i(x - a_i) - c\sum_1^h P_i =$$

$$= \frac{\sum_1^n P_i\, b_i}{l}\, x - \sum_1^h P_i\,(x - a_i) + \frac{cx}{l}\sum_1^n P_i - c\sum_1^h P_i,$$

sau :

$$M'_x = Mx + c \cdot x\left(\frac{\sum_1^n P_i}{l} - \frac{\sum_1^h P_i}{x}\right).$$

Pentru ca M_x' să fie mai mare decît M_x trebuie ca:

$$\frac{\sum_1^n P_i}{l} > \frac{\sum_1^h P_i}{x}.$$

Dacă inegalitatea are sensul schimbat, înseamnă că nu trebuie deplasat convoiul spre stînga.

Să vedem dacă nu trebuie deplasat spre dreapta.

Pentru aceasta se face același raționament ca mai sus, presupunînd că se evaluează momentele încovoietoare de la dreapta și rezultă că M_x'', produs de poziția convoiului cu P_{h-1} în secțiunea x, este mai mare decît M_x, cînd

$$\frac{\sum_1^n P_i}{l} > \frac{\sum_h^n P_i}{x'}.$$

Dacă inegalitatea are sensul schimbat, înseamnă că nu trebuie deplasat convoiul spre dreapta și, în acest caz, deoarece condiția precedentă spune că nu trebuie deplasat spre stînga, înseamnă că poziția cu forța P_h în secțiune este poziția de $M_{x\,max}$.

În aceste deplasări spre dreapta și spre stînga s-a presupus că $\sum_1^n P_i$ nu se schimbă.

Dacă se notează:

$$\frac{\sum_1^n P_i}{l} = p, \quad \frac{\sum_1^h P_i}{x} = p_x \text{ și } \frac{\sum_h^n P_i}{x'} = p_x',$$

unde în ambele sume $\sum_1^h P_i$ și $\sum_h^n P_i$ intră forța P_h inclusiv, discuția de mai sus se poate concretiza în relațiile

$$\begin{aligned} &p_x > p > p_x' \\ &p_x < p < p_x' \\ &p_x > p < p_x'. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dacă este satisfăcută prima relație (3.33), convoiul trebuie deplasat în sensul vîrfului inegalității, adică spre dreapta.

Dacă este satisfăcută a doua relație, convoiul trebuie deplasat de asemenea în sensul vîrfului inegalității, adică spre stînga.

Dacă este satisfăcută a treia relație, cele două vîrfuri ale inegalităților dau indicații opuse, deci convoiul trebuie să stea pe loc.

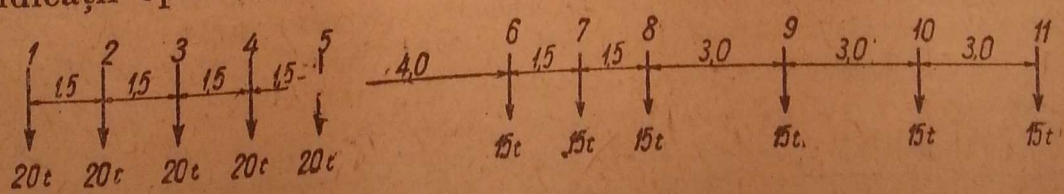


Fig. 85.

Aplicația 12 [1]). Pe grinda cu $l = 20$ m, încărcată cu convoiul din fig. 85, să se determine M_{max} în secțiunea $x = 5$ m ($x' = 15$ m).

[1]) Din *Gh. Em. Filipescu*, Statica Construcțiilor și Rezistența materialelor, pag. 121.

Se alcătuieşte tabela 4 după modelul de la aplicaţia 10.

Tabela 4

Nr.	P	c	d	ΣP_i	M
1	20	0	0	20	0
2	20	1,5	1,5	40	30
3	20	1,5	3,0	60	90
4	20	1,5	4,5	80	180
5	20	1,5	6,0	100	300
6	15	4,0	10,0	115	700
7	15	1,5	11,5	130	872,5
8	15	1,5	13,0	145	1 067,5
9	15	3,0	16,0	160	1 502,5
10	15	3,0	19,0	175	1 982,5
11	15	3,0	22,0	190	2 507,5

Pe grindă încap zece forţe cu $d = 19$ m. Se aşază P_4 în secţiunea x, şi folosim relaţiile (3.33) :

$$p = \frac{\overset{10}{\underset{1}{\Sigma}} P_i}{l} = \frac{175}{20} = 8{,}75;$$

$$p_x = \frac{\overset{5}{\underset{1}{\Sigma}} P_i}{x} = \frac{80}{5} = 16;$$

$$p'_x = \frac{\overset{10}{\underset{4}{\Sigma}} P_i}{15} = \frac{175 - 60}{15} = 7{,}67.$$

Rezultă :

$p_x \quad p \quad p'_x$

$16 > 8{,}75 > 7{,}67$, deci convoiul trebuie deplasat spre dreapta.

Punem P_3 în secţiunea x; în acest caz încap numai nouă forţe pe grindă. Folosim din nou relaţiile (3.33) :

$$p = \frac{\overset{9}{\underset{1}{\Sigma}} P_i}{l} = \frac{160}{20} = 8; \quad p_x = \frac{\overset{3}{\underset{1}{\Sigma}} P_i}{x} = \frac{60}{5} = 12; \quad p'_x = \frac{\overset{9}{\underset{3}{\Sigma}} P_i}{x'} = \frac{120}{15} = 8.$$

Deci :

$p_x \quad p \quad p'_x$

$12 > 8 = 8$. Poziţia cu P_3 în secţiune este o poziţie de maxim, dar semnul de egalitate nu dă o indicaţie precisă dacă nu mai trebuie deplasat odată spre dreapta.

Punem P_2 în secţiunea x şi intră de asemenea nouă forţe pe grindă. Relaţiile (3.33) devin :

$$p = 8; \quad p_x = \frac{\overset{2}{\underset{1}{\Sigma}} P_i}{x} = \frac{40}{5} = 8; \quad p'_x = \frac{\overset{9}{\underset{2}{\Sigma}} P_i}{x'} = \frac{140}{15} = 9{,}33.$$

Deci :

$p_x \quad p \quad p'_x$

$8 = 8 < 9{,}33$. Deci ipoteza cu P_2 în secţiune este, de asemenea, o poziţie de maxim, dar din cauza semnului egalităţii ar trebui deplasat convoiul spre stînga. În acest caz se obţine poziţia cu P_3 în secţiune de care ne-am ocupat.

Rezultă, deci, că trebuie să se calculeze M_x în ambele ipoteze : cu P_2 în secțiune și cu P_3 în secțiune.

Cînd P_2 este în secțiune, rezultă :

$$V_A = \frac{M_B}{l} = \frac{1\,502{,}5 + 160 \cdot 0{,}5}{20} = \frac{1\,582{,}5}{20} = 79{,}125\,\text{t} \quad \text{și}$$

$$M_x = 79{,}125 \cdot 5 - 30 = 365{,}625 \text{ tm.}$$

Cînd P_3 este în secțiune :

$$V_A = \frac{1\,502{,}5 + 160 \cdot 2}{20} = \frac{1\,822{,}5}{20} = 91{,}125\,\text{t} \quad \text{și}$$

$$M_x = 91{,}125 \cdot 5 - 90 = 365{,}625 \text{ tm, deci aceeași valoare în ambele poziții}$$

b) **Soluție grafică**

Soluția se obține cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular. Pentru o poziție a convoiului pe grindă se construiesc poligonul

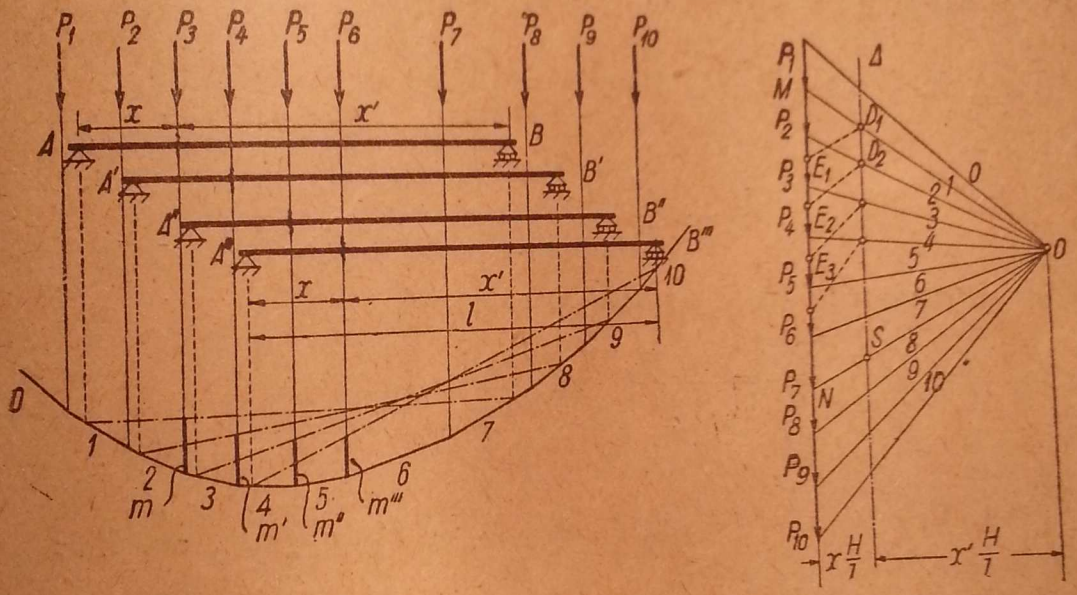


Fig. 86.

de forțe și poligonul funicular, și se duce linia de închidere, iar segmentul m, măsurat în dreptul secțiunii x, multiplicat cu distanța polară H, reprezintă valoarea momentului încovoietor în secțiunea x. Dacă se deplasează convoiul pentru a aduce altă forță în dreptul secțiunii x, ar trebui construit alt poligon funicular. Pentru a evita repetarea construcției poligonului funicular, se face interpretarea următoare : în loc să se deplaseze convoiul pe grindă, se menține convoiul pe loc și se deplasează grinda sub convoi. În acest caz se construiește poligonul funicular pentru convoiul dat și se deplasează grinda, astfel încît să se aducă secțiunea x în dreptul unei forțe. În această poziție a grinzii se trage linia de închidere și se măsoară segmentul m. Apoi se deplasează grinda, astfel încît secțiunea x să ajungă în dreptul altei forțe, se trage o altă linie de închidere și se măsoară alt segment m' (fig. 86).

Pentru a evita compararea prea multor segmente m între ele, este util să se cunoască un criteriu pentru alegerea forței care trebuie aplicată

în secțiunea x. Acesta se obține prin interpretarea grafică a relațiilor (3.33). Se împarte distanța polară H în părți proporționale cu x și x' și se duce dreapta Δ paralelă cu poligonul forțelor. Să presupunem că în dreptul secțiunii x acționează forța P_3, și în acest caz intră pe grindă forțele P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 și P_7. Din D_1, unde dreapta Δ întîlnește prima rază polară a grupului de forțe care intră pe grindă (raza *1*), se duce paralela la ultima rază polară a grupului de forțe care intră pe grindă, adică la raza 7. Această dreaptă întîlnește poligonul forțelor în E_1.

Dacă punctul E_1 se găsește pe forța P_3 care acționează în secțiunea x, poziția convoiului este poziția de moment maxim în secțiunea x.

În adevăr, din triunghiurile $D_1 E_1 M$ și OMN rezultă :

$$\frac{MN}{H} = \frac{ME_1}{x \cdot \frac{H}{l}} \quad \text{sau} \quad \frac{MN}{l} = \frac{ME_1}{x} .$$

Dar $MN = P_2 + P_3 + \ldots + P_7 = \sum_1^n P_i$ și

$ME_1 < P_2 + P_3 = \sum_1^h P_i$; rezultă deci că :

$$\frac{\sum_1^n P_i}{l} < \frac{\sum_1^h P_i}{x}, \quad \text{sau} \quad p < p_x.$$

Din triunghiurile OD_1S și OMN rezultă :

$$\frac{MN}{H} = \frac{D_1S}{x' \cdot \frac{H}{l}} \quad \text{sau} \quad \frac{MN}{l} = \frac{D_1S}{x'},$$

și deoarece $D_1S = E_1N < P_3 + P_4 + \ldots + P_7 = \sum_h^n P_i$, rezultă :

$$\frac{\sum_1^n P_i}{l} < \frac{\sum_h^n P_i}{x'} \quad \text{sau} \quad p < p'_x .$$

Ambele rezultate se pot strînge în relația :

$p_x > p < p'_x$, care, potrivit relațiilor (3.33), arată că poziția cu P_3 în secțiune este o poziție de moment maxim.

Se duce apoi linia de închidere pentru această poziție a grinzii față de convoi și se măsoară segmentul m. Punînd secțiunea x în dreptul forței P_4, se poate întîmpla ca și această forță să îndeplinească condiția de maxim, adică paralela din D_2, la ultima rază polară a forțelor care intră pe grindă să taie forța P_4. Deci, și această poziție este o poziție de moment maxim care determină un nou segment m'. Tot astfel și P_5 în secțiunea x dă o poziție de maxim și un nou segment m''. Adevărata valoare $M_{x\,max}$ se obține din compararea segmentelor m, m', m''.

Faptul că mai multe forțe îndeplinesc condiția de maxim se explică prin aceea că, în timpul deplasării, unele forțe intră și altele ies de pe grindă, astfel încît sistemul de sarcini de pe grindă nu este același în toate ipotezele.

Nu există o problemă specială a momentului maxim pentru sarcini transmise indirect, deoarece momentele în dreptul antretoazelor sînt egale cu cele de la sarcini transmise direct şi, deci, secţiunile x se vor face numai în dreptul antretoazelor, în dreptul cărora trebuie căutat şi momentul maxim pe grindă.

E. CALCULUL EFORTURILOR CU AJUTORUL SARCINILOR ECHIVALENTE

Sarcină echivalentă sau, mai simplu, echivalent, se numeşte sarcina uniform distribuită pe grindă, care produce într-o secţiune acelaşi efort (forţă tăietoare, sau moment încovoietor) ca şi convoiul de sarcini concentrate.

Pe baza suprapunerii liniare a efectelor, un efort S_x într-o secţiune x poate fi pus sub forma :

$$S_x = \Sigma P_i \eta_{xi} = P_1 \eta_{x1} + P_2 \eta_{x2} + \cdots \tag{3.34}$$

în care η_{x1}, η_{x2}, ... reprezintă ordonatele liniei de influenţă a efortului S_x în dreptul sarcinilor P_1, P_2 etc.

În cazul sarcinii uniform repartizate ω_x, rezultă :

$$S_x = \omega_x \cdot \Omega_x, \tag{3.35}$$

în care Ω_x este suprafaţa liniei de influenţă, iar

ω_x — sarcina echivalentă, ambele corespunzătoare secţiunii x.

Din cele două expresii (3.34) şi (3.35) ale efortului S_x rezultă :

$$\omega_x = \frac{\Sigma P_i \eta_{xi}}{\Omega_x} . \tag{3.36}$$

Valoarea sarcinii echivalente depinde deci de secţiunea x, de forma liniei de influenţă şi de tipul convoiului.

Pentru linii de influenţă afine, în care ordonatele uneia se pot obţine din ale alteia, prin simpla multiplicare cu un acelaşi coeficient, sarcinile echivalente au aceeaşi valoare, deoarece coeficientul apare şi la numărătorul şi la numitorul expresiei (3.36) şi se simplifică.

Aceasta permite să se întocmească tabele de sarcini echivalente pentru deschideri determinate şi diferite convoaie de sarcini concentrate şi să se utilizeze aceste tabele la calculul forţelor tăietoare şi al momentelor încovoietoare, la grinzile de poduri care au linii de influenţă afine.

De obicei, se întocmesc astfel de tabele pentru linii de influenţă triunghiulare cu vîrful pe reazem, la sfertul şi la mijlocul deschiderii, iar pentru vîrfuri de triunghuri în alte secţiuni se interpolează între datele tabelelor.

Aceste tabele se găsesc în tratatele de poduri şi nu ne ocupăm de ele aici.

Aplicaţia 13. Să se găsească sarcina echivalentă pentru momentul încovoietor în dreptul secţiunii $x = 5$ m, la o grindă de 20 m deschidere, acţionată de convoiul din aplicaţia 12.

În aplicaţia 12 s-a obţinut M_{max} în secţiunea $x = 5$ m de la sfertul deschiderii pentru convoiul dat : $M_{0,25} = 365{,}625$ tm.

Suprafaţa liniei de influenţă a momentului încovoietor de la sfertul deschiderii este :

$$\Omega_{0,25} = \frac{1}{2} l \cdot m_{xx} \quad \text{unde} \quad m_{xx} = \frac{xx'}{l} = \frac{3}{16} l,$$

deci :
$$\Omega_{0,25} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{3}{16} l = \frac{3}{32} l^2 = \frac{3}{32} 20^2 = 37{,}5 \text{ m}^2.$$

În baza expresiei (3.36) se găseşte sarcina echivalentă :

$$\omega_{0,25} = \frac{M_{0,25}}{\Omega_{0,25}} = \frac{365{,}625}{37{,}5} = 9{,}75 \text{ t/m}.$$

F. MOMENT ÎNCOVOIETOR MAXIMUM MAXIMORUM

Pînă acum s-a considerat o secțiune x fixă pe grindă, și în dreptul ei s-a căutat poziția convoiului, care dădea momentul maxim. În cazul însă cînd sarcinile se aplică direct pe grindă, se pune problema ca dintre toate secțiunile x ale grinzii să se determine cea în care are loc momentul cel mai mare de pe grindă.

În cele ce urmează trebuie deci determinate atît poziția convoiului, cît și secțiunea în care se produce cel mai mare moment încovoietor posibil pe grindă pentru un convoi dat. Acest moment se numește moment maximum maximorum.

În cazul cînd o singură sarcină acționează pe grindă, momentul maxim are loc în dreptul ei cu valoarea:

$$M = P\,\frac{ab}{l},$$

iar momentul maximum maximorum va avea loc, evident, pentru poziția forței în mijlocul grinzii $\left(a = b = \frac{l}{2}\right)$ avînd expresia:

$$M = \frac{Pl}{4}.$$

În cazul general, cînd un convoi de n forțe circulă pe grindă, acesta va avea o rezultantă R, care se găsește la distanțele a_r și b_r de reazeme. Cînd se deplasează convoiul, a_r și b_r variază, dar $a_r + b_r = l$ (fig. 87).

Momentul maxim trebuie să se producă în dreptul unei sarcini. Să determinăm momentul în dreptul forței P_h, care se găsește la distanța c în stînga rezultantei. Rezultă:

$$M = V_A\,(a_r - c) - \sum_1^{h-1} P_i\,d_i.$$

Deoarece $V_A = \frac{R \cdot b_r}{l} = \frac{R(l - a_r)}{l}$, se mai poate scrie:

$$M = \frac{R(l - a_r)\,(a_r - c)}{l} - \sum_1^{h-1} P_i\,d_i.$$

Dacă se deplasează convoiul la dreapta și la stînga, și se determină momentul încovoietor în dreptul aceleiași forțe P_h, se observă că în expresia lui M numai a_r este variabil.

M_{max} va avea loc pentru $\frac{dM}{da_r} = 0$

$$\frac{dM}{da_r} = \frac{R}{l}\,(l - a_r - a_r + c) = 0 \text{ atunci cînd}$$

$$a_r = \frac{l + c}{2},$$

care se interpretează astfel: dacă P_h în secțiune provoacă momentul maximum maximorum, acesta are loc pentru poziția convoiului, în care mij-

locul grinzii împarte în două părți egale distanța c, dintre rezultanta convoiului de pe grindă și forța P_h în dreptul căreia s-a presupus că se produce momentul maximum maximorum (fig. 87).

Dacă se ține seamă că în acest caz:

$$l - a_r = a_r - c = \frac{l-c}{2},$$

expresia momentului maximum maximorum devine:

$$M_{max\,max} = \frac{R(l-c)^2}{4l} - \sum_1^{h-1} P_i d_i. \qquad (3.37)$$

Dacă forța P_h ar fi fost la dreapta rezultantei R, trebuie schimbat semnul lui c în expresia (3.37) și rezultă:

$$M_{max\,max} = \frac{R(l+c)^2}{4l} - \sum_1^{h-1} P_i d_i. \qquad (3.37')$$

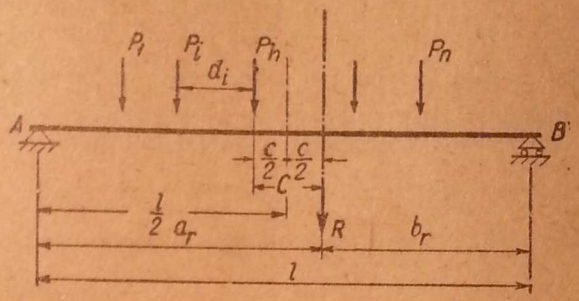


Fig. 87.

În cele de mai sus s-a presupus că este cunoscută forța P_h în dreptul căreia are loc $M_{max\,max}$.

Pentru alegerea forței P_h, expresia (3.37) dă anumite indicații:

R să fie cît mai mare, deci să intre cît mai multe forțe pe grindă; c să fie cît mai mic, deci forța P_h trebuie căutată între forțele din jurul rezultantei.

Chiar cu aceste indicații sînt necesare încercări și pentru a limita numărul lor, se mai observă că $M_{max\,max}$ este, pe de o parte, M_{max} pentru o secțiune x, deci relațiile (3.33) vor da încă o indicație, iar pe de altă parte $M_{max\,max}$ este un moment maxim pe grindă, astfel încît forța tăietoare trebuie să-și schimbe semnul în dreptul forței P_h.

Deci, după ce s-a ales o forță P_h prin indicațiile de mai sus, se verifică relațiile (3.33), sau se observă dacă forța tăietoare care se calculează mai ușor decît momentul încovoietor schimbă semnul în dreptul forței P_h; numai după aceea se trece la calculul momentului.

Din cele de mai sus rezultă că, în general, momentul maximum maximorum nu are loc la mijlocul grinzii [1]).

Aplicația 14. Să se găsească momentul maximum maximorum pe o grindă cu $l = 20$ m, pe care circulă convoiul din aplicația 10.

Rezolvare. Pe grindă încap toate cele unsprezece forțe ale convoiului pentru care $d = 20$ m. Rezultanta este: $R_{1-11} = 200$ t, dar în acest caz prima și ultima forță calcă pe reazeme, astfel încît nu produc momente încovoietoare.

Se va lua deci convoiul alcătuit numai din primele zece forțe $R_{1-10} = 180$ t; distanța rezultantei față de P_{10} este:

$$s = \frac{M_{10}}{R_{1-10}} = \frac{1\,925}{180} = 10{,}695 \text{ m},$$

iar distanța față de prima forță este: $d_{10} - s = 18{,}5 - 10{,}695 = 7{,}805$ m, deci R se găsește între forțele *5* și *6*, mai aproape de forța *5*. Dacă se presupune că în dreptul forței P_5, care este cea mai aproape de rezultantă și una dintre forțele cele mai mari, are loc $M_{max\,max}$, se observă că și P_{10} iese de pe grindă, astfel încît se va încerca întîi cu P_6 ca forță în dreptul căreia ar putea avea loc momentul $M_{max\,max}$. În acest caz forțele $P_1, \ldots P_{10}$ rămîn pe grindă.

---

[1]) Pentru o discuție mai detaliată a lui $M_{max\,max}$ a se vedea *I. P. Prokofiev*, op. cit.

Înainte de a se așeza convoiul după regula momentului maximum maximorum, se poate face o verificare aproximativă a relațiilor (3.33) pentru secțiunea de la mijlocul grinzii, deoarece $M_{max\,max}$ are loc într-o secțiune care este aproape de mijlocul grinzii. În acest caz:

$$p_x \cong \frac{115}{10} = 11{,}5\,; \quad p = \frac{180}{20} = 9\,; \quad p_x' \cong \frac{80}{10} = 8.$$

Deoarece $p_x > p > p_x'$, înseamnă că trebuie deplasat convoiul spre dreapta, căutînd $M_{max\,max}$ în dreptul forței P_5.

În acest caz iese de pe grindă și P_{10}, astfel încît rezultanta forțelor care rămîn pe grindă este $R_{1-9} = 160$ t.

Se face din nou o verificare aproximativă cu relațiile (3.33) aplicate față de mijlocul grinzii:

$$p_x \cong \frac{100}{10} = 10\,; \quad p = \frac{160}{20} = 8\,; \quad p_x' \cong \frac{80}{10} = 8.$$

Avem: $p_x > p = p_x'$, ceea ce nu dă o indicație precisă; în acest caz ar trebui să se aplice relațiile (3.33) pentru secțiunea corectă dată de regula lui $M_{max\,max}$ pentru forța P_5, sau să se aplice criteriul forței tăietoare. Vor fi aplicate amîndouă.

Rezultanta $R_{1-9} = 160$ t se găsește la distanța $s = \frac{1\,285}{160} = 8{,}031$ m de ultima forță P_9, iar distanța față de prima forță este:

$$d_9 - s = 14{,}5 - 8{,}031 = 6{,}469 \text{ m},$$

deci rezultanta se găsește, de asemenea, între forțele P_5 și P_6, dar foarte aproape de P_5, la distanța $c = 0{,}469$ m de ea. Se așază convoiul astfel, încît mijlocul grinzii să împartă în două părți egale distanța $c = 0{,}469$ m, și în acest caz rezultă poziția forței P_5 determinată la $x = 9\,765$ și $x' = 10{,}235$ m.

Aplicînd relațiile (3.33) pentru această secțiune, rezultă:

$$p_x = \frac{100}{9{,}765} = 10{,}2\,; \quad p = \frac{160}{20} = 8\,; \quad p_x' = \frac{80}{10{,}235} = 7{,}8\,;$$

rezultă: $p_x > p > p_x'$ și deci convoiul trebuie deplasat spre dreapta.

Criteriul forței tăietoare:

Distanța ultimei forțe P_9 de reazemul din dreapta este:

$$b_9 = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} - s = 10 - 0{,}235 - 8{,}031 = 1{,}734 \text{ m}, \text{ și apoi:}$$

$$V_A = \frac{M_9 + R_{1-9} \cdot 1{,}734}{l} = \frac{1\,285 + 160 \cdot 1{,}734}{20} = \frac{1\,562{,}44}{20} = 78{,}122\,;$$

$$T_5' = V_A - \sum_1^4 P_i = 78{,}122 - 80 = -1{,}878 \text{ t}\,;$$

$$T_5'' = T_5' - P_5 = -1{,}878 - 20 = -21{,}878 \text{ t}.$$

Forța tăietoare nu schimbă semnul în dreptul forței P_5, și deci, în dreptul acestei forțe nu are loc momentul maxim pe grindă, și cu atît mai puțin $M_{max\,max}$.

După cum au arătat relațiile (3.33), se va considera poziția convoiului cu P_4 ca forță în dreptul căreia are loc $M_{max\,max}$.

În acest caz distanța dintre P_4 și R_{1-9} este:

$c = 1{,}5 + 0{,}469 = 1{,}969$ m; așezînd convoiul astfel, încît mijlocul lui c să coincidă cu mijlocul grinzii, rezultă că forțele $P_1 \dots P_9$ intră toate pe grindă. Rezultă pentru forța P_4:

$$x = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} = 9{,}015 \text{ m}\,; \quad x' = 10{,}985 \text{ m}\,;$$

din relațiile (3.33) se obține:

$$p_x = \frac{80}{9{,}015} = 8{,}9\,; \quad p = \frac{160}{20} = 8\,; \quad p_x' = \frac{100}{10{,}985} = 9{,}1,$$

adică $p_x > p < p_x'$, deci convoiul trebuie să rămînă pe loc.

În această poziție a convoiului forța tăietoare schimbă de semn în dreptul lui P_4.

$$b_9 = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} - s = 9{,}015 - 8{,}031 = 0{,}984 \text{ m};$$

$$V_A = \frac{1\,285 + 160 \cdot 0{,}984}{20} = \frac{1\,442{,}44}{20} = 72{,}122 \text{ t};$$

$$T_4' = 72{,}122 - 60 = +\,12{,}122 \text{ t};$$

$$T_4'' = 12{,}122 - 20 = -\,7{,}878 \text{ t}.$$

Deci, în dreptul lui P_4 momentul încovoietor este maxim pe grindă, și acesta va fi $M_{max\,max}$ care se calculează cu formula (3.37):

$$M_{max\,max} = \frac{R\,(l-c)^2}{4\,l} - \sum_1^{h-1} P_i\,d_i = \frac{160 \cdot 18{,}031^2}{4 \cdot 20} - 180 = 650 - 180 = 470 \text{ tm}.$$

$M_{max\,max}$ are loc în dreptul forței P_4, care nu este cea mai apropiată de rezultantă, datorită faptului că rezultanta se găsește între P_5 și P_6, care sînt la distanță de 4 m între ele, pe cînd celelalte forțe sînt la distanță de 1,5 m una de alta.

Aplicația 15. Pe o grindă simplu rezemată circulă o sarcină uniform repartizată de lungime c. Să se determine momentul maxim în secțiunea x și poziția sarcinii (fig. 88).

Răspuns. Suprafața Ω trebuie să fie maximă și din $d\Omega = (m_{x2} - m_{x1}) \cdot dx$: $\dfrac{d\Omega}{dx} = m_{x2} - m_{x1} = 0$, rezultă condiția:

$m_{x1} = m_{x2}$, iar valoarea momentului este:

$$M_{x\,max} = \frac{p \cdot xx'}{2} \cdot \frac{c}{l}\left(2 - \frac{c}{l}\right).$$

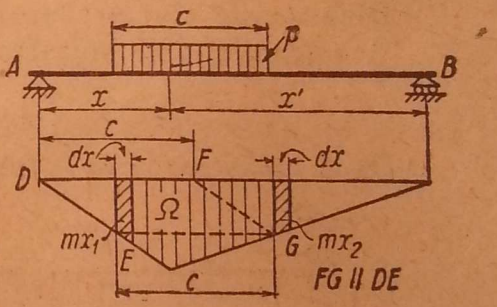


Fig. 88.

Aplicația 16. Să se determine forța tăietoare maximă în primul și în al doilea panou al grinzii cu $l = 20$ m, și avînd cinci panouri de cîte 4 m, cînd sarcinile se transmit indirect, convoiul fiind cel din aplicația 12 (fig. 85).

Răspuns. Se calculează întîi $T_{II\,max}$ în panoul *II*. Poziția convoiului se stabilește cu relațiile (3.32) și (3.32′). Rezultă că $T_{II\,max}$ este dat de poziția convoiului cu P_2 pe antretoaza din dreapta panoului. În acest caz, pe grindă intră opt forțe:

$$b_8 = 12 - (13 - 1{,}5) = 0{,}5 \text{ m};$$

$$V_A = \frac{1\,067{,}5 + 145 \cdot 0{,}5}{20} = 57 \text{ t};$$

$$T_{II\,max} = 57 - \frac{20 \cdot 1{,}5}{4} = 49{,}5 \text{ t}.$$

Pentru $T_{I\,max}$ în panoul *I*, poziția este dată, de asemenea, de P_2 pe antretoaza din dreapta panoului. Pe grindă intră acum nouă forțe și deci:

$$b_9 = 16 - (16 - 1{,}5) = 1{,}5 \text{ m};$$

$$V_A = \frac{1\,502{,}5 + 160 \cdot 1{,}5}{20} = 87{,}125 \text{ t};$$

$$T_{I\,max} = 87{,}125 - 7{,}5 = 79{,}625 \text{ t}.$$

Aplicația 17. Fiind dat momentul maximum maximorum provocat de un convoi pe o grindă să se determine valoarea p a sarcinii distribuite ca în fig. 89, astfel încît să provoace același moment maxim și expresia momentului încovoietor într-o secțiune curentă a grinzii.

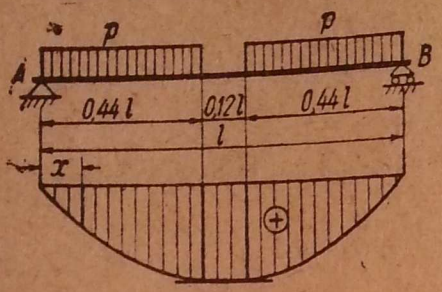


Fig. 89.

Răspuns. $p = \dfrac{8 M_{max\,max}}{(0{,}88\,l)^2}$; notînd $\xi = \dfrac{x}{l}$,

$$M_x = \frac{M_{max\,max} \cdot \xi\,(0{,}88 - \xi)}{0{,}44^2}.$$

$(\xi \leqslant 0{,}44)$

§ 16. GRINZI ÎNCASTRATE SI GRINZI CU CONSOLE

A. DIAGRAME DE EFORTURI

a) Grinzi încastrate. Soluție analitică

La grinzile încastrate într-un capăt și libere la celălalt, eforturile într-o secțiune oarecare se pot determina fără a calcula în prealabil reacțiunile din încastrare, deoarece se poate începe totdeauna reducerea forțelor de la capătul liber.

Astfel, în fig. 90 vom avea: $T_x = -P$

$M_x = -P \cdot x$, cu variație liniară de la 0 la $-P \cdot c$.

Diagramele sînt trecute în figură.

Reacțiunile din încastrare sînt (fig. 90, *d*);

$$V_B = P \text{ și } M_B = -P \cdot c.$$

Dacă încastrarea ar fi fost în partea stîngă a grinzii, ar fi rezultat cazul din fig. 91 și, făcînd reducerea forțelor de la dreapta:

$$T_x = +P;$$
$$M_x = -P \cdot x'.$$

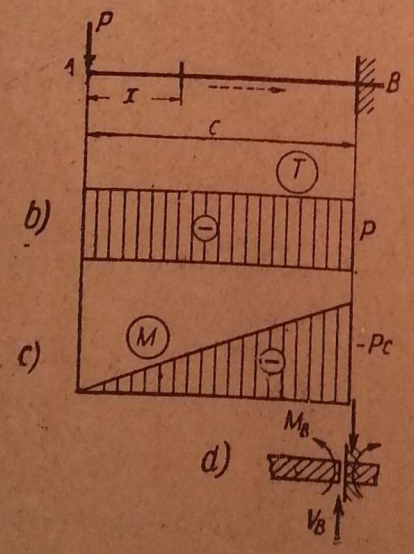


Fig. 90.

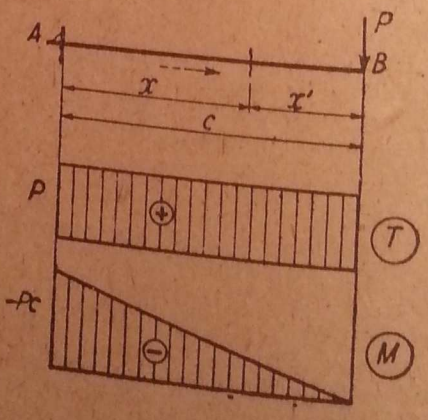


Fig. 91.

Ceea ce s-a schimbat față de cazul precedent este semnul forței tăietoare. Semnul momentului încovoietor a rămas același. În ambele cazuri

se observă ușor că partea de sus este întinsă și, deci, pe grinzi încastrate acționate de sarcini verticale de sus în jos momentele încovoietoare sînt negative.

S-ar fi putut efectua reducerea forțelor și din capătul încastrat al grinzii, dar ar fi trebuit în prealabil determinate reacțiunile din încastrare. Astfel, în cazul fig. 92 :

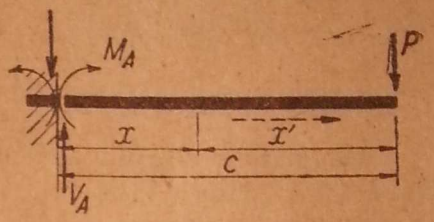


Fig. 92.

$$V_A = + P; \quad M_A = - P \cdot c$$

și apoi

$$T_x = V_A = + P;$$

$$M_x = M_A + V_A \cdot x = - P \cdot c + P \cdot x = - P(c - x) = - P \cdot x'$$

aceleași expresii de mai sus.

Pentru încărcarea cu sarcini distribuite uniform, ar fi rezultat diagramele din fig. 93 cu expresiile :

$T_x = - px$, variație liniară ;

$M_x = - \frac{1}{2} p \cdot x^2$, variație parabolică.

Parabola are tangenta orizontală în capătul liber, iar tangenta din capătul încastrat se întîlnește cu prima în dreptul rezultantei încărcării, adică la mijlocul grinzii.

Observație. Momentele maxime pe grinzile încastrate sînt mari în raport cu cele de pe grinda simplu rezemată. Pentru sarcini uniform repartizate la aceeași lungime $c = l$, momentul de încastrare este de patru ori mai mare decît cel din mijlocul grinzii simplu rezemate.

b) **Grinzi încastrate. Soluție grafică.**

Ne servim de poligonul de forțe și de poligonul funicular ca în fig. 94. Se observă că, în acest caz, nu mai intervine linia de închidere. Momentul încovoietor în secțiunea x este :

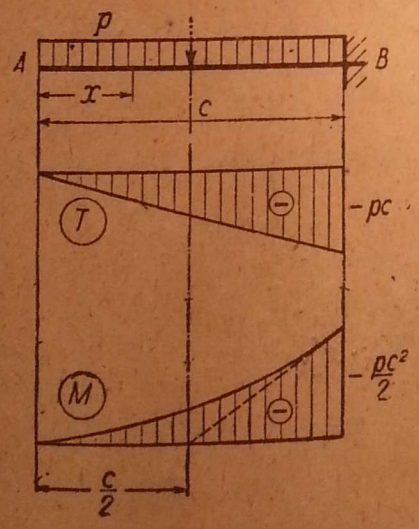


Fig. 93.

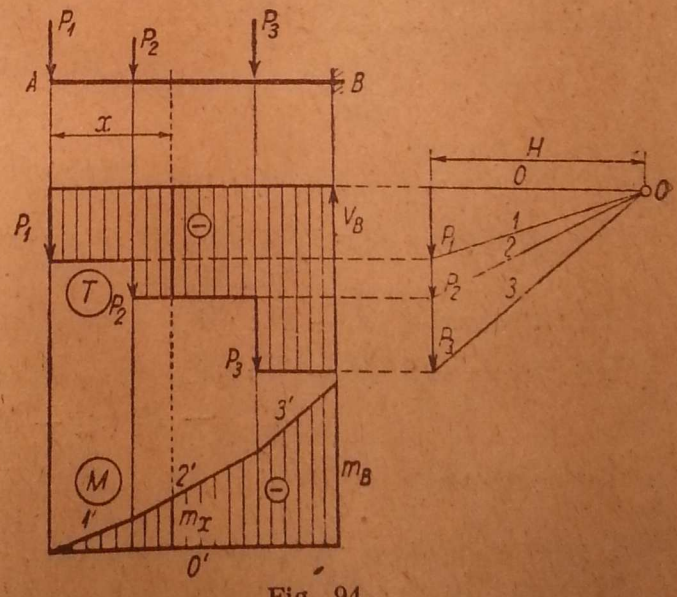


Fig. 94.

$$M_x = - m_x \cdot H,$$

în care m_x este segmentul cuprins între prima și ultima latură de poligon funicular al grupului de forțe din stînga secțiunii, prima latură fiind $0'$; și ultima, $2'$.

Momentul încovoietor maxim se găsește pe reazem și are valoarea:

$$M_B = - m_B \cdot H.$$

c) Grinzi cu console. Soluție analitică

La grinda simplu rezemată, capetele grinzii coincideau cu reazemele. Dacă însă grinda este mai lungă decît distanța dintre reazeme, partea de grindă care depășește reazemul se numește consolă. Pe grinda cu o consolă $C-A-B$ din fig. 95 se observă că eforturile pe consola $C-A$ se pot determina fără să fie necesară cunoașterea reacțiunilor din reazeme, reducînd forțele de la capătul liber, ca și la o grindă încastrată.

Pentru eforturile dintre reazeme este însă nevoie de determinarea reacțiunilor.

Acestea se află prin ecuații de momente în raport cu reazemele B și A, ca și la grinda simplu rezemată:

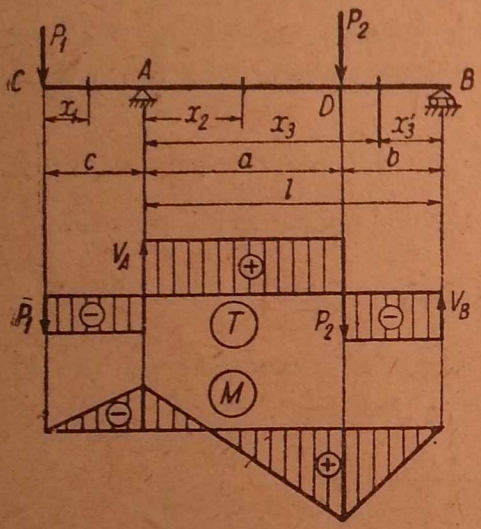


Fig. 95.

$$V_A = \frac{P_2 b + P_1 (l + c)}{l} \quad \text{și} \quad V_B = \frac{P_2 a - P_1 c}{l}.$$

Expresia forței tăietoare va fi:

Pe consola $C-A$:

$$T_{x1} = - P_1.$$

Pe intervalul $A-D$:

$$T_{x2} = - P_1 + V_A.$$

Pe intervalul $D-B$:

$$T_{x3} = - P_1 + V_A - P_2 = - V_B.$$

Expresia momentului încovoietor va fi:

Pe consola $C-A$: $M_{x1} = - P_1 \cdot x$, cu valoarea pe reazemul A:

$$M_A = - P_1 \cdot c.$$

Pe intervalul $A-D$: $M_{x2} = - P_1 (c + x_2) + V_A \cdot x_2$.

Pe intervalul $D-B$: $M_{x3} = - P_1 (c + x_3) + V_A \cdot x_3 - P_2 (x_3 - a) = + V_B \cdot x'_3$.

În secțiunea D: $M_D = \frac{P_2 \cdot a - P_1 \cdot c}{l} \cdot b$.

Diagramele sînt trasate în fig. 95.

Grinda cu consolă are două părți distincte: consola $C-A$ și deschiderea $A-B$. Eforturile în consolă nu sînt influențate de încărcările de pe deschiderea $A-B$, dar eforturile de pe deschiderea $A-B$ sînt influențate de încărcările de pe consolă.

Pe baza suprapunerii efectelor (independenței acțiunilor) se poate încărca grinda pe rînd cu fiecare din sarcini și însuma eforturile. Se

381

împart sarcinile în două : sarcinile de pe console, de o parte, și sarcinile din deschidere, pe de altă parte.

Cînd acționează numai sarcinile din deschidere (fig. 96, *a*) consola nu are nici un efect ; este cazul unei grinzi simplu rezemate $A - B$, cu diagramele de eforturi cunoscute (fig. 96, *b* și *c*).

Cînd acționează numai sarcina de pe consolă (fig. 96, *d*), se obțin reacțiunile :

$$V_A = \frac{P_1 (l + c)}{l} \quad \text{și} \quad V_B = -\frac{P_1 \cdot c}{l} ;$$

expresiile forțelor tăietoare și ale momentelor încovoietoare sînt :

Pe consola $C - A$:

$$T_x = -P_1, \quad M_x = -P_1 \cdot x_1.$$

Pe deschiderea $A - B$:

$$T_x = -P_1 + V_A = -V_B = +\frac{P_1 \cdot c}{l} ; \quad M_x = V_B \cdot x_3'.$$

Diagramele sînt construite în fig. 96, *e* și *f*.

Suprapunînd acum diagramele provenite din încărcarea P_2 în deschiderea $A - B$ cu cele produse de P_1 pe consolă, se obțin diagramele finale pentru grinda cu consolă inițială.

Din adunarea ordonatelor diagramelor (*b*) și (*e*) se obține diagrama finală (*g*), iar din adunarea ordonatelor diagramelor (*c*) și (*f*) se obține diagrama finală a momentelor încovoietoare (*h*). Valorile importante sînt trecute direct pe diagramele (*g*) și (*h*).

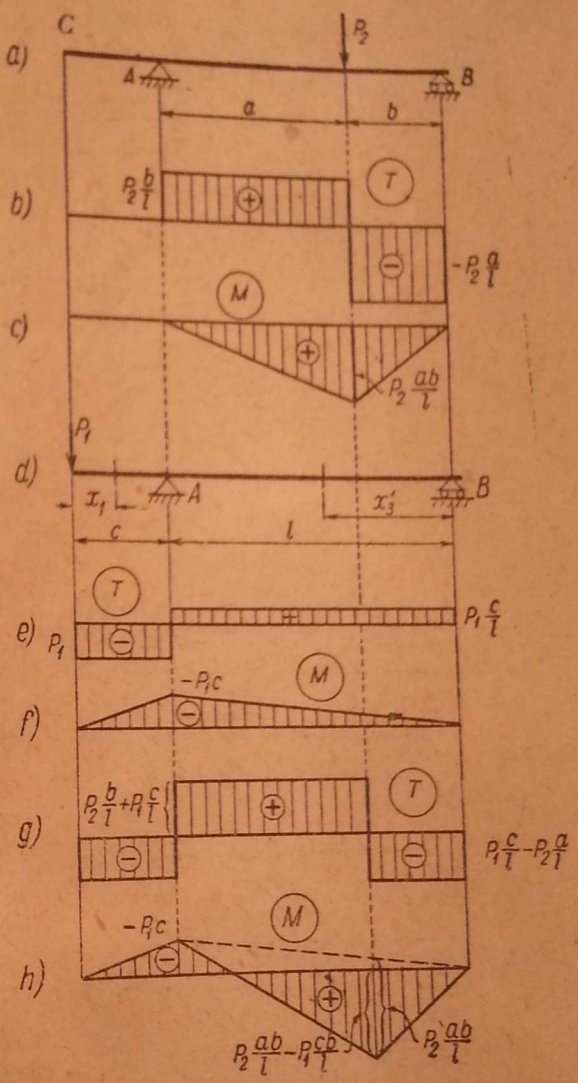


Fig. 96.

Pentru o sarcină uniform repartizată, la o grindă cu două console, diagramele de eforturi apar ca în fig. 97, *b* și *c*, fie că au fost deduse pe grinda completă, fie că s-a procedat prin suprapunerea efectelor încărcărilor de pe console și din deschidere, calculate separat.

Diagrama momentelor încovoietoare pe deschidere este compusă din diagrama momentelor dată de încărcarea de pe deschiderea $A - B$ raportată la linia punctată $A' - B'$, peste care se suprapun diagramele triunghiulare de semn negativ date de încărcările de pe console.

Dacă $T_{A\,dr}$ este forța tăietoare imediat în dreapta reazemului A, diagrama forței tăietoare are ordonata nulă în secțiunea x_0 dată de :

$$T_x = T_{A\,dr} - p \cdot x_0 = 0, \quad \text{de unde } x_0 = \frac{T_{A\,dr}}{p}.$$

În această secțiune momentul încovoietor este maxim.

În secțiunea imediat în dreapta reazemului A, pe fața din dreapta apar eforturile: $T_{A\,dr}$ și M_A (fig. 97, *d*).

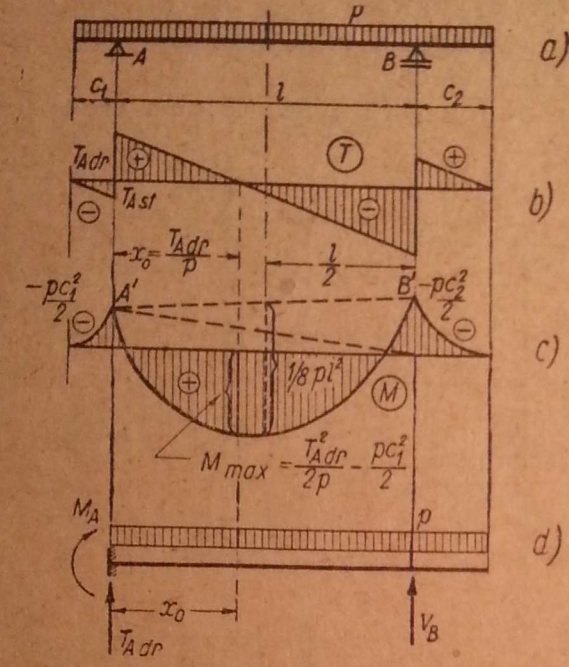


Fig. 97.

În secțiunea x_0, momentul încovoietor maxim va avea expresia:

$$M_{max} = T_{A\,dr} \cdot x_0 - \frac{p \cdot x^2}{2} + M_A.$$

Dacă se înlocuiește x_0 cu valoarea de mai sus, se obține:

$$M_{max} = \frac{T_{A\,dr}^2}{2p} + M_A, \qquad (3.33)$$

expresie practică pentru determinarea momentului maxim în cazul sarcinii uniform repartizate.

Efectul consolelor asupra deschiderii grinzii poate fi privit și sub altă formă.

Dacă se secționează grinda lîngă reazeme, imediat în afara lor, atunci pe fețele grinzii trebuie puse eforturile corespunzătoare încărcărilor de pe console: M_1 și T_1, lîngă reazemul A, T_2 și M_2, lîngă reazemul B (fig. 98, *b*) (toate eforturile au fost presupuse pozitive în figură, deși, în mod practic, consolele dau, de obicei, momente negative).

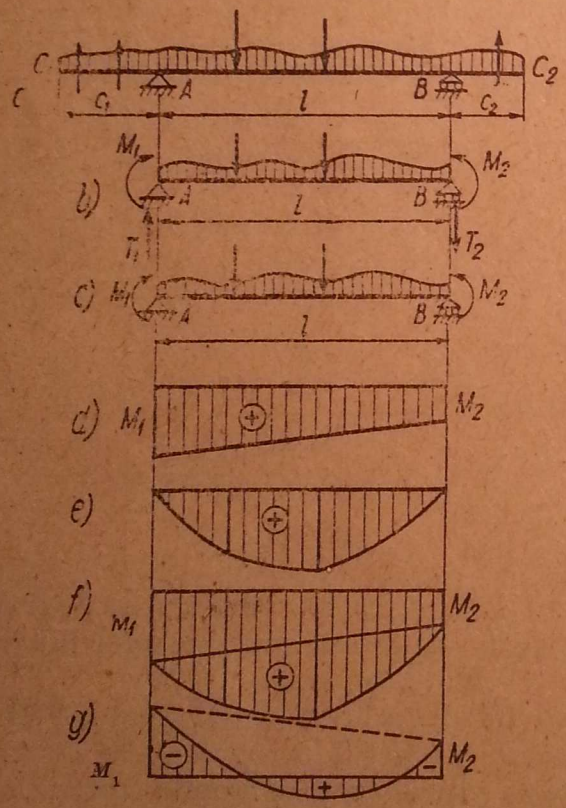


Fig. 98.

Mai departe, grinda $A-B$ poate fi considerată acționată de sarcinile ei și de M_1, T_1, M_2, T_2, care apar acum ca forțe și cuple exterioare față de grinda $A-B$, și se determină eforturile pe grinda $A-B$ în consecință. Totodată se mai observă că secțiunile fiind făcute infinit vecine reazemelor, forțele T_1 și T_2 nu provoacă nici un efort în grindă transmițîndu-se direct reazemelor.

Deci, pentru eforturile din grinda AB efectul consolelor se reduce la două cuple pe reazeme cu momentele M_1 și M_2 (fig. 98, *c*). Avem de-a face cu o grindă simplu rezemată $A-B$ cu încărcările ei date, la care se adaugă pe reazeme două cuple provocate de console. Diagramele momentelor încovoietoare se pot construi separat, pe de o parte pentru acțiunea cuplelor care produc o diagramă trapezoidală (fig. 98, *d*), iar pe de altă parte, pentru încărcarea dată (fig. 98, *e*).

Prin suprapunere se află diagrama finală (fig. 98, *f*). De obicei, M_1 și M_2 provocate de console sînt negative, și diagrama finală are aspectul ca în fig. 98, *g*.

d) Grinzi cu console. Soluție grafică

Se face aceeași construcție de la grinda simplu rezemată cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular; trebuie să se observe însă ca linia de închidere să unească punctele determinate de intersecția între linia de acțiune a reacțiunii și prima, respectiv, ultima latură de poligon funicular. Unde există o consolă, latura de poligon funicular tăiată de linia reacțiunii nu este prima, respectiv, ultima. De aceea, trebuie prelungită prima sau, respectiv, ultima latură de poligon, pînă întîlnește linia reacțiunii, și prin acel punct se duce linia de închidere.

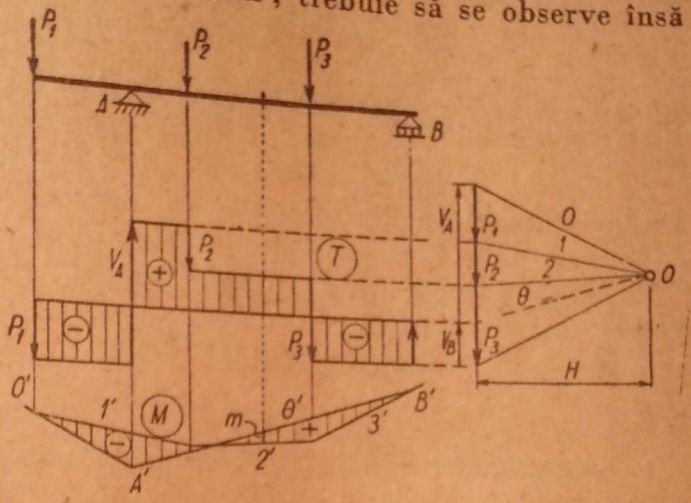


Fig. 99.

Astfel, în fig. 99 se determină punctul A' prin prelungirea primei laturi care este $0'$ pînă întîlnește verticala reazemului A. Linia de închidere θ' se duce prin punctele A' și B'. Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare este:

$$M_x = m \cdot H.$$

m își schimbă semnul pe consolă și o parte a deschiderii lîngă reazemul A.

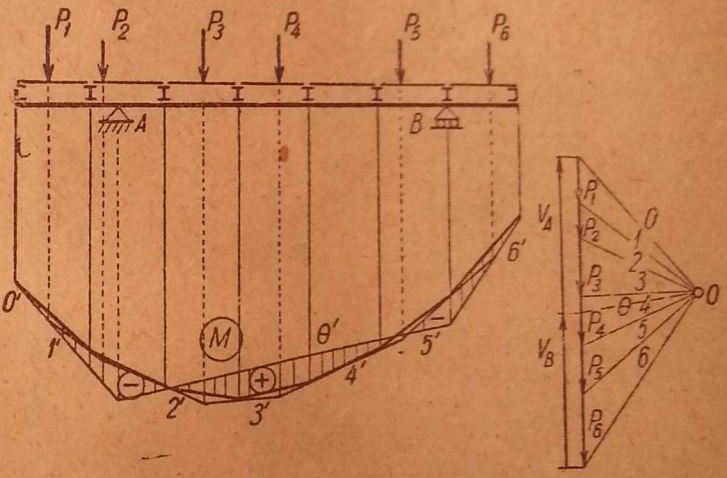


Fig. 100.

Diagrama T se obține prin însumarea forțelor de la stînga ca în figură.

Fig. 100 reprezintă diagrama momentelor pe cale grafică, la o grindă cu două console cu sarcini transmise indirect. Se construiește poligonul funicular pentru sarcinile date și se determină linia de închidere θ' ca și pentru sarcini directe, prelungind laturile $0'$ și $6'$ pînă întîlnesc verticalele din A și B. Apoi se corectează diagrama prin coborîrea ordonatelor din dreptul antretoazelor pe poligonul funicular și se unesc aceste puncte consecutiv.

Se observă că în interiorul deschiderii (ca și la grinda simplu rezemată), momentele din sarcinile transmise indirect sînt mai mici decît în cazul cînd sarcinile s-ar aplica direct pe grinda principală, pe cînd pe console sarcinile indirecte dau momente încovoietoare mai mari decît cele directe.

B. LINII DE INFLUENȚĂ

a) Metoda analitică

La grinda încastrată din fig. 101 linia de influență a forței tăietoare în secțiunea x se determină astfel:

Dacă $P = 1$ se găsește în stînga secțiunii x, rezultă:

$$T_x = -1,$$

și dacă $P = 1$ se găsește la dreapta lui x:

$$T_x = 0.$$

Linia momentului încovoietor se determină astfel:

Dacă $P = 1$ se găsește la stînga lui x:

$M_x = -1\,(x - a)$, o dreaptă cu ordonata maximă pentru $a = 0$ în vîrful consolei: $m_{x0} = -x$.

Dacă $P = 1$ se găsește la dreapta lui x:

$$M_x = 0.$$

La grinda cu consolă (fig. 102), pentru o secțiune j pe consolă situația este identică cu aceea de la grinda încastrată, cum se vede în figură. Pentru o

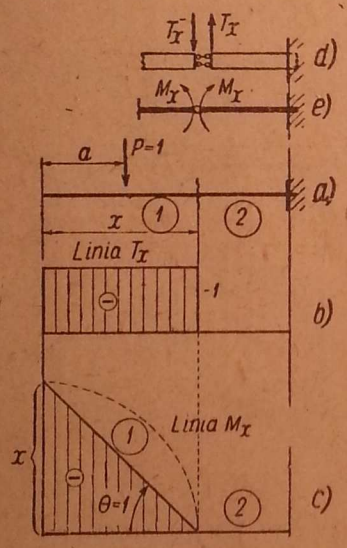


Fig. 101.

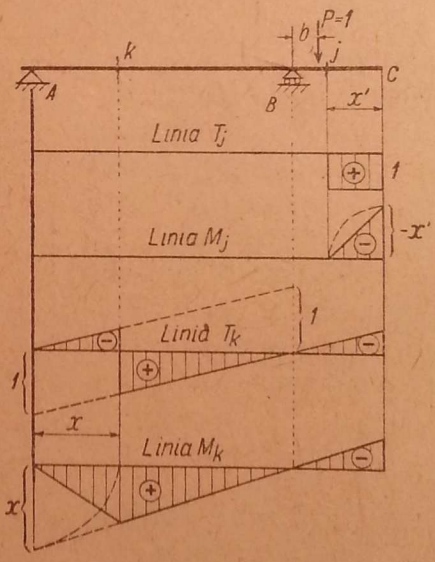


Fig. 102.

secțiune k între reazeme, cînd $P = 1$ se găsește în deschidere, situația este aceeași ca la grinda simplu rezemată, iar cînd $P = 1$ se găsește pe consolă, rezultă:

$$V_A = \frac{-1 \cdot b}{l},$$

făcînd reducerea forțelor de la stînga.

$T_k = V_A = -\frac{b}{l}$, deci se prelungește dreapta liniei de influență de pe intervalul $k - B$ și pe consolă, iar ordonatele vor fi negative.

La linia M_k:

$M_k = V_A \cdot x = -\frac{b}{l} \cdot x$, adică aceeaşi situaţie ca la T_k; se prelungeşte dreapta liniei de influenţă a intervalului $k - B$, iar ordonatele vor fi negative.

b) **Metoda deplasărilor virtuale**

La grinda încastrată pentru linia T_x se introduce în secţiune mecanismul corespunzător forţei tăietoare (fig. 101, *d*).

Partea din dreapta rămîne încastrată, iar partea din stînga, care trebuie să rămînă paralelă cu cea din dreapta, se va deplasa paralel cu linia de reper. Pentru ca lucrul mecanic produs de T_x să fie negativ, partea din stînga trebuie să se deplaseze în sus. Deplasarea se face cu cantitatea 1 şi se obţine diagrama deplasărilor din fig. 101, *b*, care este chiar linia T_x. Pentru linia de influenţă a momentului încovoietor, se introduce în secţiune o articulaţie şi perechea de momente M_x (fig. 101, *e*). Deoarece partea din dreapta stă pe loc, partea din stînga se va roti cu unghiul $\theta_1 = 1$ în sens invers lui M_x de pe partea din stînga. Diagrama deplasărilor, care este linia de influenţă M_x, este reprezentată în fig. 101, *c*. Semnul este negativ, deoarece deplasarea e în sus. Ordonata în capătul liber este:

$$m_{x0} = x \cdot \theta_1 = x \cdot 1 = x.$$

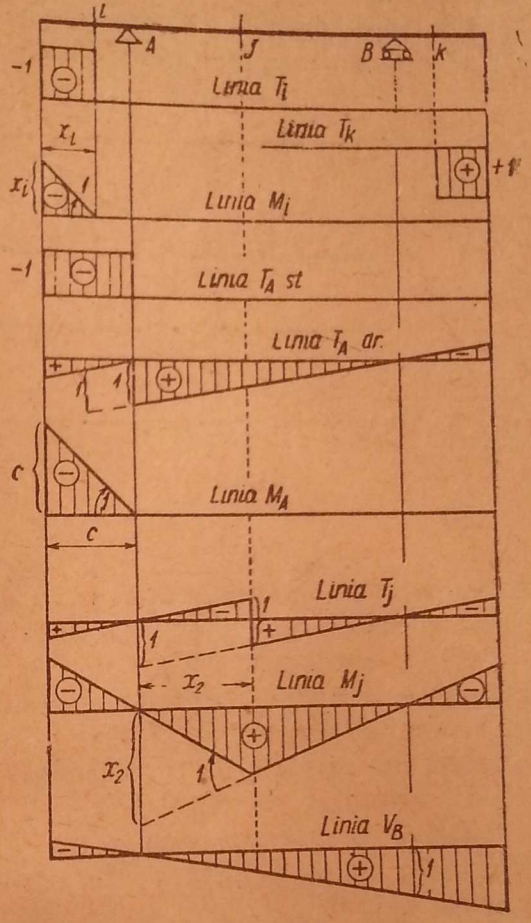


Fig. 103.

În cazul grinzii cu console, liniile de influenţă pentru reacţiuni, forţe tăietoare şi momente încovoietoare se determină după teoria generală a liniilor de influenţă, prin deplasări virtuale aplicate ca şi în cazurile grinzii simplu rezemate şi grinzii încastrate. Fig. 103 reprezintă o serie de linii de influenţă deduse prin deplasări virtuale, care nu necesită vreo explicaţie suplimentară.

Pentru linia de influenţă a unei reacţiuni se suprimă reazemul respectiv şi se dă o deplasare cu cantitatea 1 în dreptul reazemului, în sens contrar reacţiunii, adică în jos.

§ 17. GRINZI CU CONSOLE ŞI ARTICULAŢII

a) **Generalităţi**

O grindă dreaptă cu n reazeme, dintre care unul fix (articulaţie) şi $n - 1$ mobile (reazeme simple), are $n + 1$ necunoscute, şi deoarece se dispune numai de trei ecuaţii de echilibru static, rezultă că este de $n - 2$ ori static nedeterminată.

Dacă se introduc $n - 2$ articulații, grinda devine static determinată. Aceste articulații trebuie introduse astfel, încît sistemul să fie efectiv static determinat, adică să nu rămînă cu o parte static nedeterminată şi cu alta sub formă de sistem cinematic.

De exemplu, în grinda continuă din fig. 104, *a*, trebuie introduse cinci articulații. Ele pot fi introduse corect ca în fig. 104, *b* şi 104, *c*, dar nu trebuie introduse ca în fig. 104, *d*, unde, pe regiunea $A - B - C$, a rămas o grindă static nedeterminată, iar pe regiunea $E - F - G$ este un mecanism.

Se mai observă că, deşi ambele tipuri *b* şi *c* sînt corecte, totuşi tipul *c* nu este practic, deoarece o sarcină aplicată în ultima deschidere $F - G$

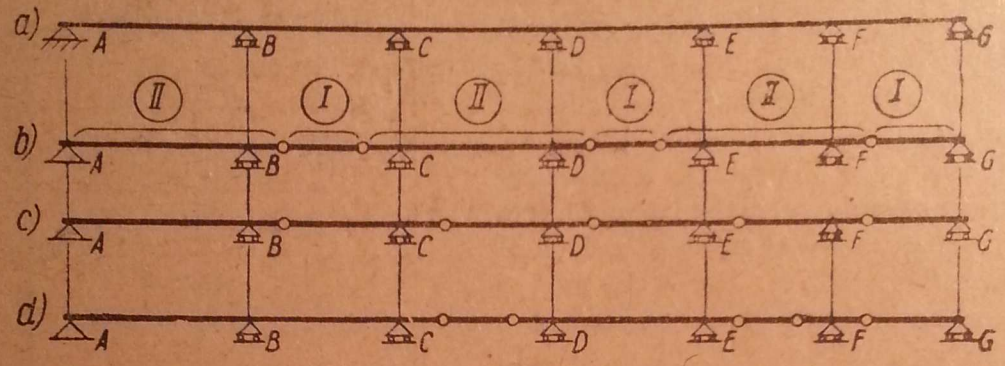


Fig. 104.

se transmite pe toată grinda pînă în prima deschidere $A - B$. Dacă se distruge deschiderea $A - B$, toată grinda se prăbuşeşte.

Tipul care este studiat aici este tipul *b*, în care articulațiile sînt astfel introduse, încît descompun grinda continuă în două tipuri de grinzi : *I* şi *II*. Grinzile de tipul *II* sînt grinzi pe două reazeme cu una sau cu două console, iar grinzile de tipul *I* sînt grinzi simplu rezemate pe capetele consolelor grinzilor de tipul *II*, sau pe reazeme.

Dacă se distruge una dintre grinzile *I*, restul construcției nu este influențată, iar pe de altă parte, sarcinile de pe grinzile *II* nu provoacă eforturi în grinzile *I*.

Din aceste motive grinzile *I* se numesc grinzi independente.

b) Calculul eforturilor pe cale analitică

Pentru încărcări verticale, în articulații apar numai reacțiuni verticale. (Chiar dacă sînt sarcini înclinate, componenta orizontală se determină independent, din ecuația de proiecție pe orizontală, şi prin articulațiile intermediare se transmite la reazemul fix).

Deci, dacă se desfac articulațiile, sistemul se descompune într-o serie de grinzi de două tipuri : *I* şi *II* (fig. 105).

Grinzile *CD* şi *GJ* sînt grinzi independente (de tip *I*) şi pot fi calculate cu uşurință determinîndu-se reacțiunile, forțele tăietoare şi momentele încovoietoare, ca la orice grindă simplu rezemată. Reacțiunile determinate la grinzile *I* se aplică ca acțiuni (egale şi de sens contrar cu reacțiunile) pe grinzile *II*, astfel încît şi acestea devin grinzi obişnuite cu console, cărora

li se calculează reacțiunile din reazeme (de exemplu, la grinda $DEFG$, V_D și V_G sînt cunoscute de la grinzile CD și GJ și se calculează reacțiunile

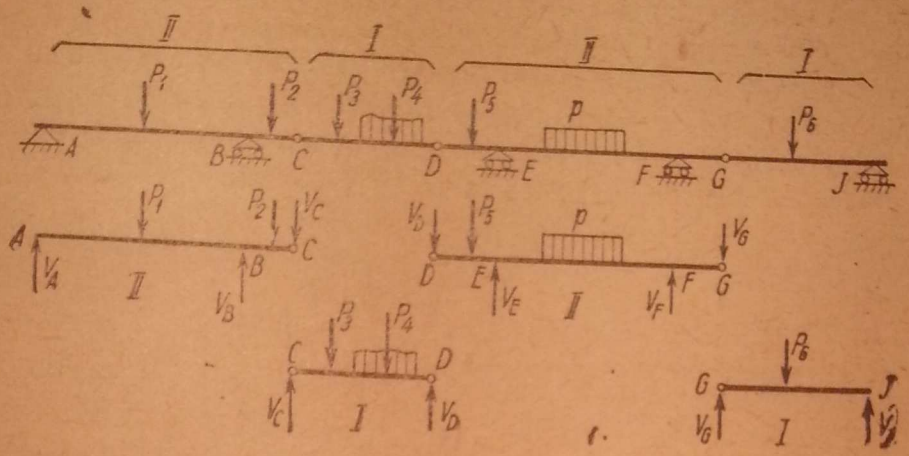


Fig. 105.

din reazemele E și F). Apoi se calculează forțele tăietoare și momentele încovoietoare.

În felul acesta, eforturile sînt determinate pe întregul sistem.

c) Calculul eforturilor pe cale grafică

Vom folosi poligonul de forțe și poligonul funicular (fig. 106). Cu aceeași distanță polară H se vor lua patru poli O_1, O_2, O_3, O_4 și se vor duce razele

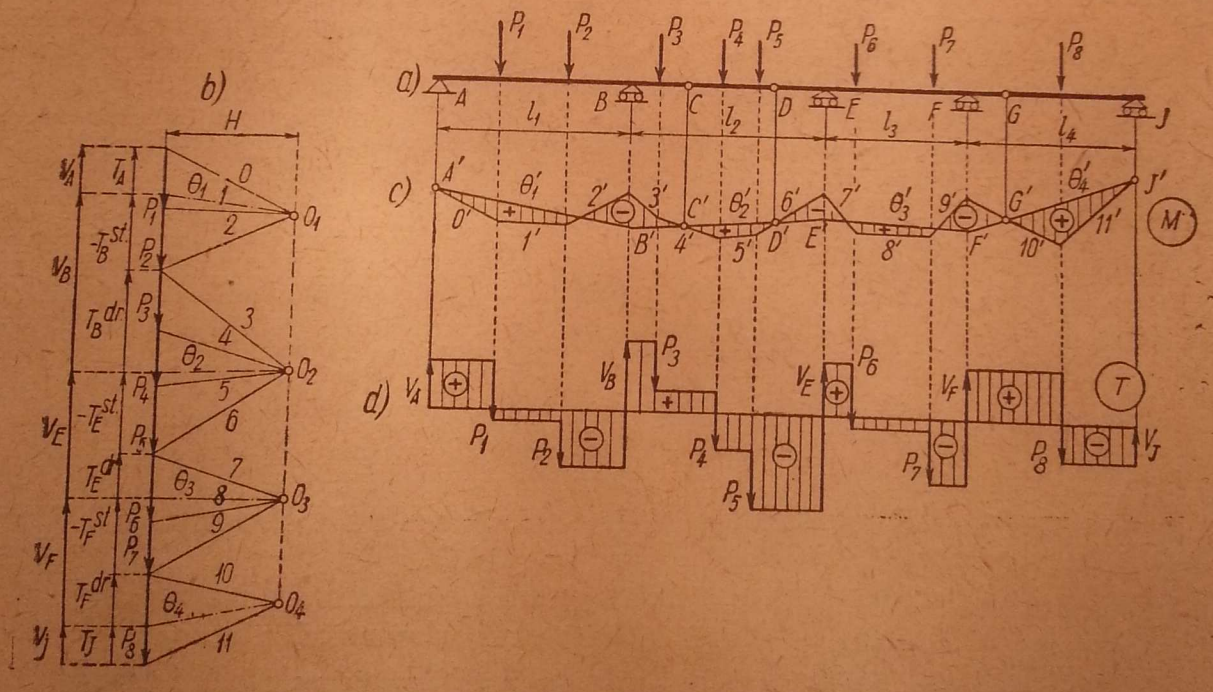


Fig. 106.

polare corespunzătoare forțelor de pe fiecare dintre deschiderile l_1, l_2, l_3, l_4.

Apoi se construiește poligonul funicular corespunzător deschiderii l_1. Din punctul unde latura ultimă $2'$ întîlnește verticala reazemului B, se

începe al doilea poligon funicular, corespunzător forțelor din deschiderea l_2, și așa mai departe.

Deoarece în dreptul articulațiilor C, D, G și pe reazemele A și J momentele încovoietoare sînt nule, se coboară aceste puncte în A', C', D', G' și J', pe poligoanele funiculare. În felul acesta se pot duce liniile de închidere θ_2' și θ_4' în deschiderile l_2 și l_4. Astfel, sînt determinate momentele pe reazemele B, E și F. Deoarece momentul încovoietor pe un reazem este același, fie imediat în stînga, fie imediat în dreapta lui, se pot duce acum și liniile de închidere θ_1' și θ_3' în deschiderile l_1 și l_3, unind A' cu B' și E' cu F'. Ducînd din polii O_1, O_2, O_3, și O_4 paralele cu liniile de închidere respective : θ_1', θ_2', θ_3', θ_4' se determină în poligonul forțelor reacțiunile pe fiecare dintre reazemele A, B, E, F, J, și forțele tăietoare respective din stînga și din dreapta reazemelor. Cu acestea se construiește diagrama forțelor tăietoare (fig. 106, *d*).

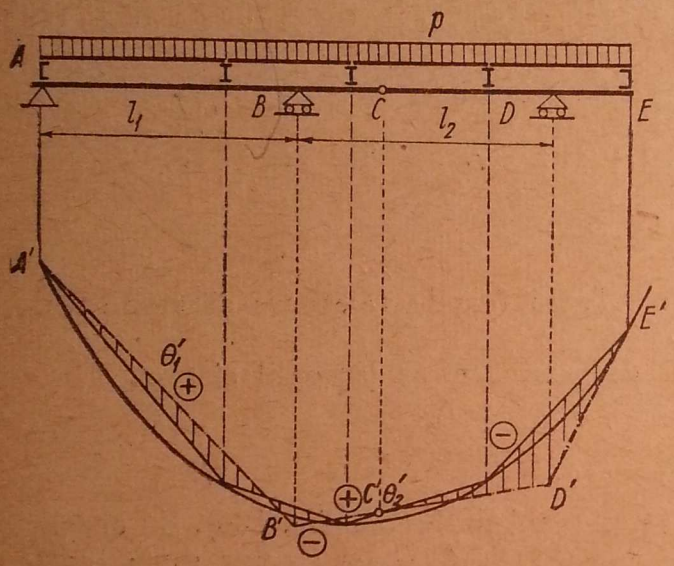


Fig. 107.

Observații.

1. Diagramele momentelor încovoietoare și forțelor tăietoare trec continuu (fără frînturi și fără salturi) prin articulații, atît timp cît nu se aplică forțe sau cuple exterioare în ele.

2. În cazul cînd sarcinile se transmit indirect și nu există antretoaze pe reazeme și în articulații (fig. 107), poligonul funicular se construiește continuu pentru toată grinda A,B,C,D,E, apoi se proiectează antretoazele pe poligon și se trasează dreptele corespunzătoare. După aceea, se coboară punctul C în C' pe dreapta corespunzătoare antretoazei. Apoi ultima latură de poligon funicular (tangenta în E' la parabolă) se prelungește pînă întîlnește verticala reazemului D în D'. Se unește D' cu C' și se prelungește pînă întîlnește verticala reazemului B în B'. Aceasta este latura de închidere θ_2'. Se unește apoi A' cu B' și se determină și latura de închidere θ_1'.

Diagrama momentelor încovoietoare în deschiderile l_1 și l_2 este cuprinsă între laturile de închidere θ_1' și θ_2' și dreptele care unesc punctele consecutive coborîte din dreptul antretoazelor.

d) Linii de influență

Calculul analitic este dificil, dar deplasările virtuale dau soluțiile, fără să fie necesară nici o explicație suplimentară.

În fig. 108 sînt reprezentate o serie de linii de influență pentru reacțiuni, forțe tăietoare și momente încovoietoare prin deplasări virtuale.

Fig. 109 reprezintă o serie de linii de influență pentru sarcini transmise indirect. Se construiește întîi epura deplasărilor pentru grinda principală cu ajutorul căreia se stabilește și scara, și apoi se corectează, ținîndu-se seamă de linia de încărcare alcătuită din lonjeroane.

La aceste grinzi se vede ce repede și clar se obțin liniile de influență prin deplasări virtuale.

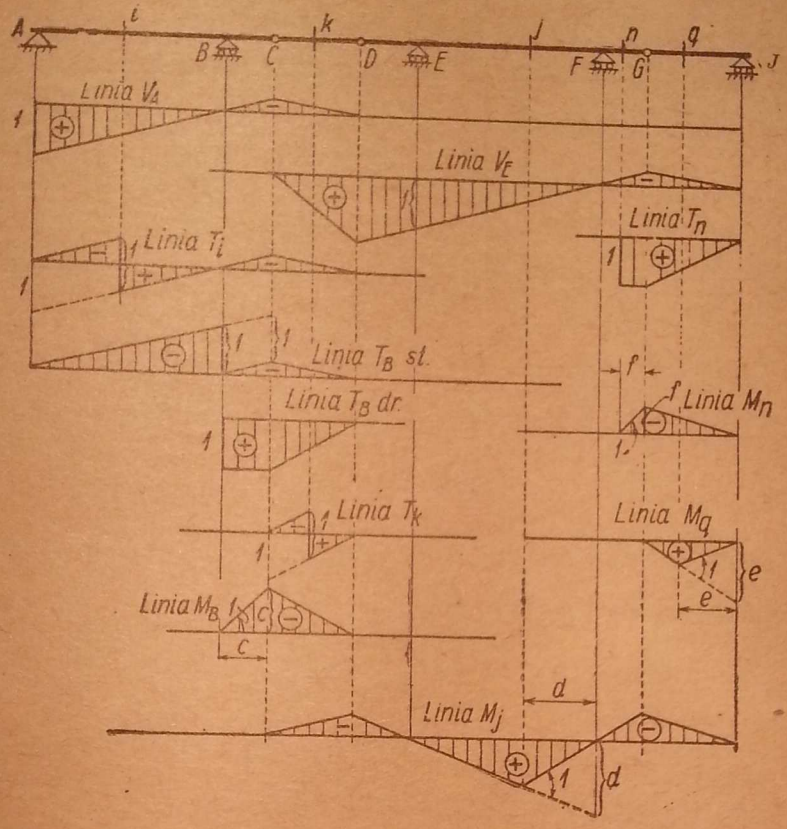


Fig. 108.

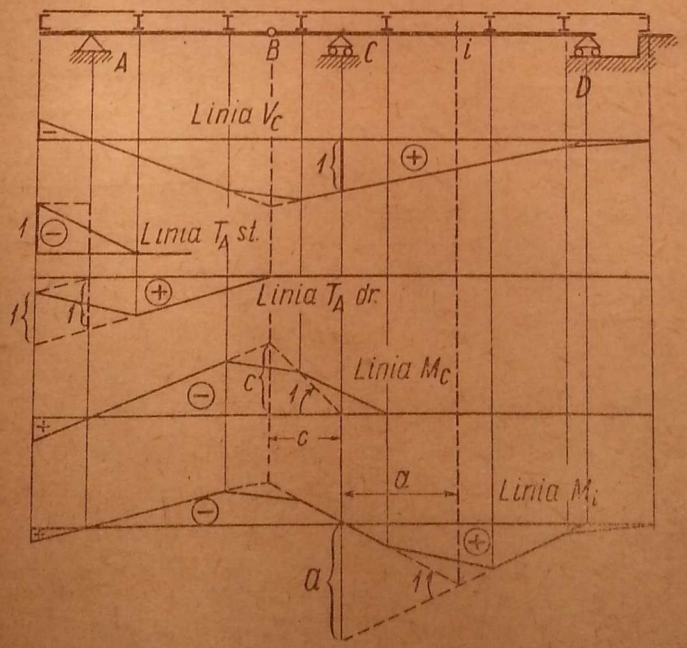


Fig. 109.

Aplicația 18. În ce raport trebuie să fie deschiderile l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, și la ce distanță de reazem trebuie așezate articulațiile în fig. 110, *a*, pentru ca la încărcări uniform repartizate pe toată lungimea, momentele de pe reazeme și momentele maxime în cîmp să fie egale în valoare absolută.

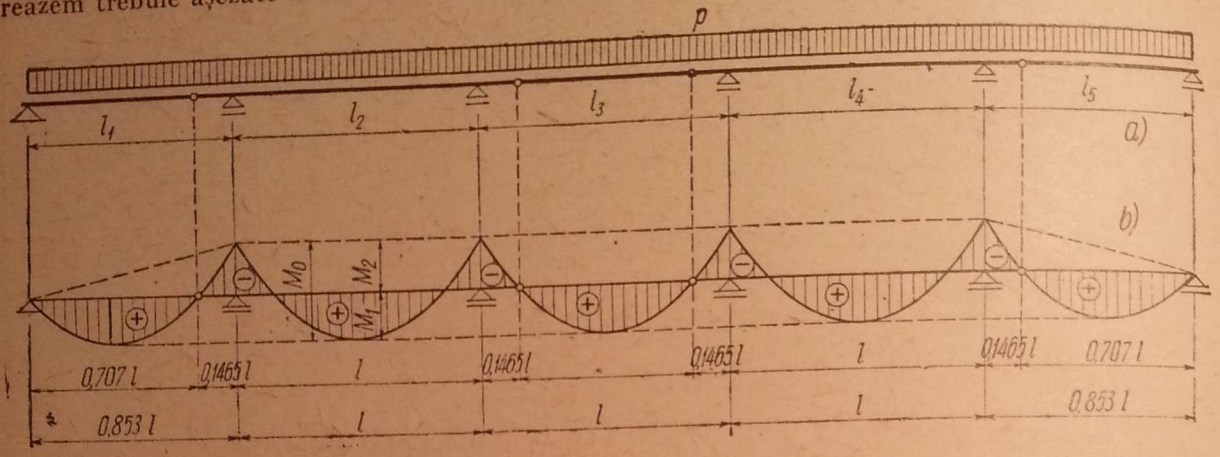


Fig. 110.

Răspuns. Soluția este dată în fig. 110, *b*.

$$M_0 = \frac{1}{8} p \cdot l^2;$$

$$M_1 = \frac{1}{16} p \cdot l^2;$$

$$M_2 = -\frac{1}{16} p \cdot l^2.$$

Aplicația 19. Să se determine liniile de influență M_c și T_c în grinzile din fig. 111 și fig. 112.

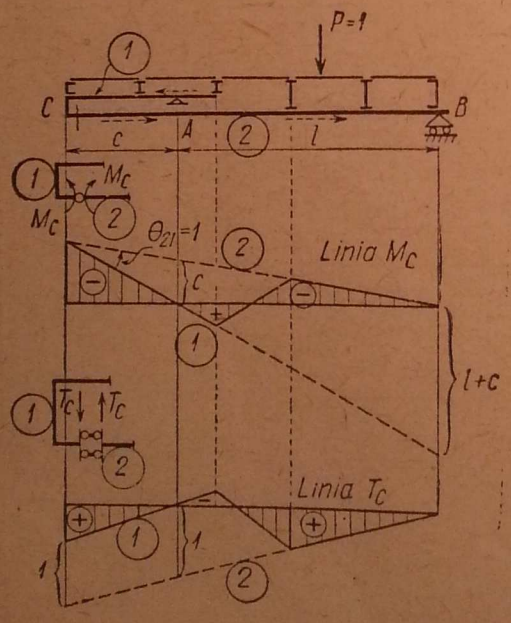


Fig. 111.

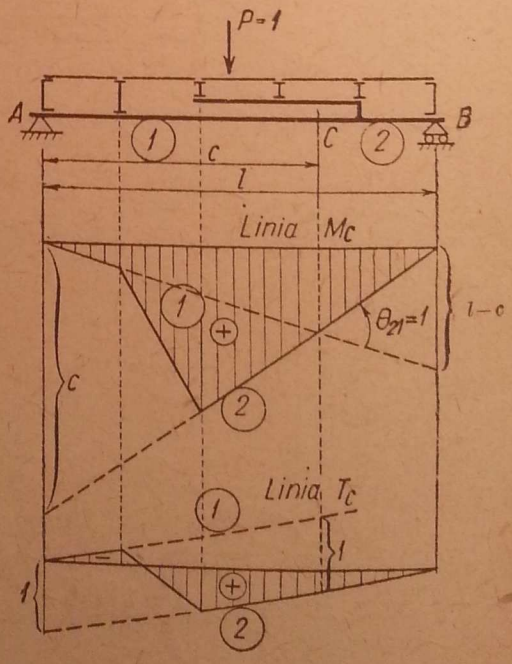


Fig. 112.

Răspuns. Soluțiile sînt date în figurile respective cu ajutorul deplasărilor virtuale. Se atrage atenția asupra deplasării virtuale unitare între corpurile *1* și *2*.

Aplicația 20. Să se determine liniile de influență T_x și M_x în grinzile din fig. 113 și 114, în ipoteza că $P = 1$ circulă pe intervalul $A - C - B$.

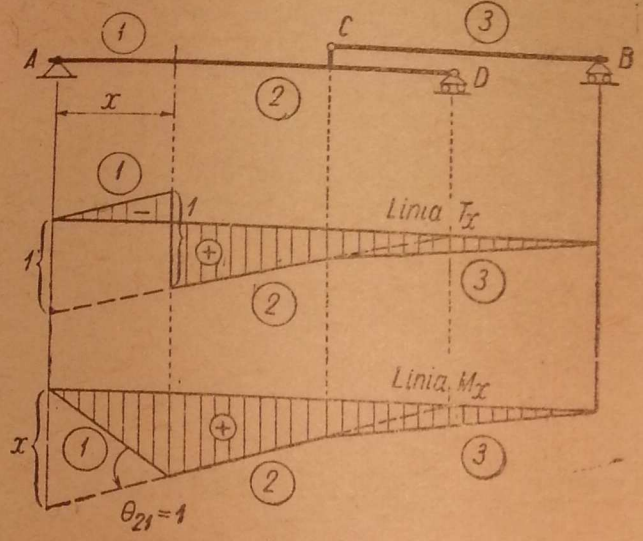


Fig. 113.

Indicație. Deplasările virtuale duc la soluțiile din figurile respective.

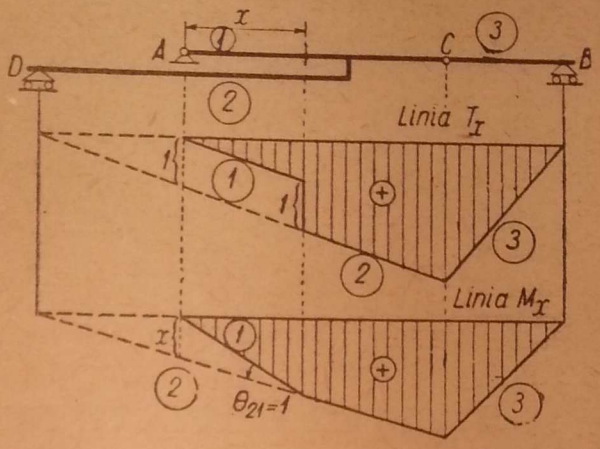


Fig. 114.

Aplicația 21. Să se determine prin deplasări virtuale liniile de influență T_x și M_x la o construcție static determinată, cînd se deplasează cuplul $M = 1$ pe o linie de încărcare dată.

Răspuns. Făcînd aceleași observații de la § 11, formula (2.30) se transformă în formula : $-S_x \cdot \Delta_x + 1 \cdot \theta_i = 0$, unde θ_i este unghiul de înclinare al liniei de încărcare în secțiunea i, în care se aplică cuplul mobil $M = 1$.

Dacă se consideră și în acest caz $\Delta_x = 1$, formula (2.32) se transformă în :

$$S_x = + \theta_i.$$

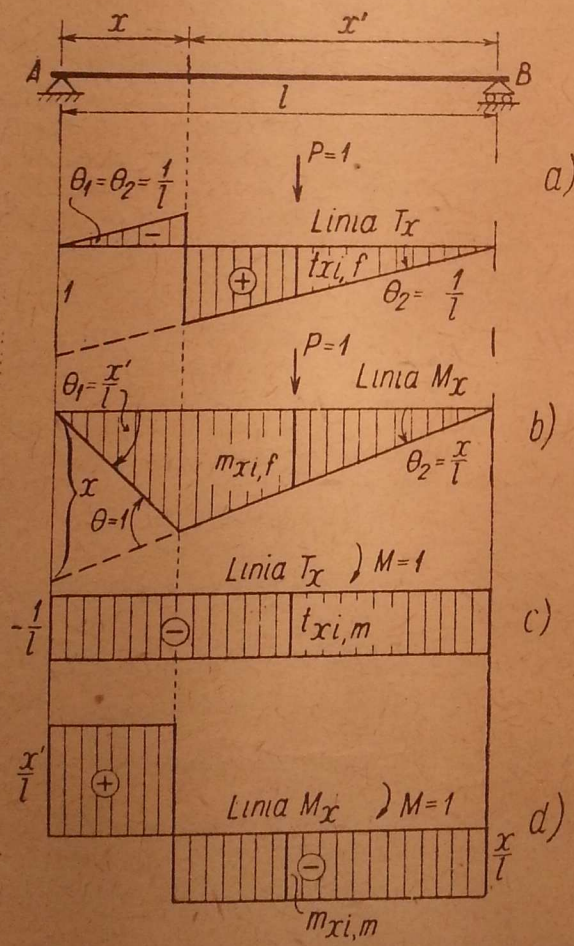


Fig. 115.

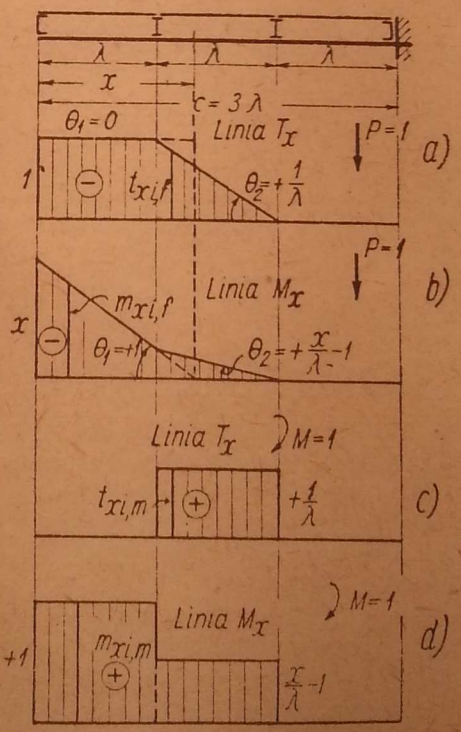


Fig. 116.

Pentru aceasta, se construiește epura deplasărilor corespunzătore gradului de libertate introdus de S_x din care se determină unghiurile θ_i ale diferitelor părți ale liniei de încărcare,

iar acestea puse în ordonate vor da diagrama liniei de influență S_x. Evident, linia de influență va fi formată dintr-o serie de drepte paralele cu linia de reper.

În fig. 115 și 116 sînt reprezentate liniile de influență T_x și M_x pentru $P=1$ (a și b) și liniile de influență T_x și M_x pentru $M = 1$ (c și d). Din analiza lor, se poate scrie :

$$\frac{dl_{xi,f}}{dx} = t_{xi,m} \quad \text{și} \quad \frac{dm_{xi,f}}{dx} = m_{xi,m},$$

în care $t_{xi,f}$, $m_{xi,f}$ sînt ordonatele liniilor de influență ale lui T_x și M_x pentru forța $P = 1$ mobilă pe grindă, iar $t_{xi,m}$, respectiv $m_{xi,m}$, sînt ordonatele liniilor de influență ale aceluiași efort pentru cuplul $M = 1$ mobil pe grindă.

În general :

$$\frac{d\eta_{xi,f}}{dx} = \eta_{xi,m}.$$

§ 18. GRINZI DREPTE CU REAZEME ȘI FORȚE ÎNCLINATE

Dacă grinda dreaptă orizontală este încărcată cu sarcini verticale, dar reazemul liber este înclinat, reacțiunea din B nu mai este paralelă cu forțele, iar reacțiunea din A are de asemenea o direcție înclinată față de verticală (fig. 117). În grindă apare ca efort și forța axială.

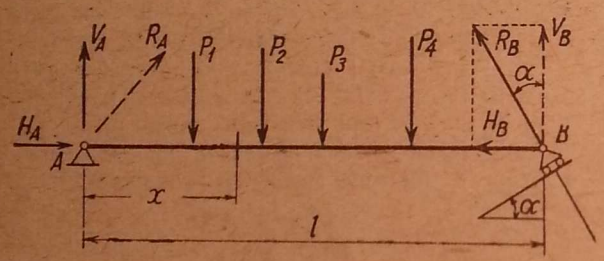


Fig. 117.

Reacțiunea din A se poate descompune după verticală, V_A și direcția grinzii, $H_A \cdot V_A$ se determină din ecuația de momente în raport cu reazemul B, care elimină influența lui H_A și R_B. Deci, V_A are aceeași valoare, indiferent de înclinarea α a reazemului B. Pe de altă parte, dacă se evaluează eforturile într-o secțiune x se constată că, pentru forța tăietoare și momentul încovoietor, intervin numai V_A și forțele date de la stînga secțiunii, deoarece, H_A acționînd după axa grinzii, nu apare nici în ecuația de proiecție pentru T_x, nici în ecuația de momente pentru M_x.

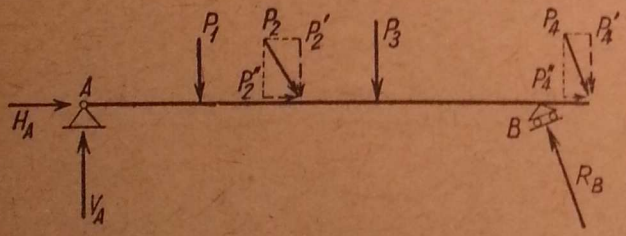


Fig. 118.

În concluzie, pe o astfel de grindă, indiferent de înclinarea reazemului B, diagramele T și M se pot calcula în ipoteza că reazemul B este orizontal (cu reacțiune verticală). Reprezentarea diagramei forței axiale necesită determinarea reacțiunii H_A. Aceasta se obține din ecuația de proiecție pe orizontală, după ce a fost determinată în prealabil reacțiunea R_B. Reacțiunea R_B se determină prin ecuația de momente în raport cu A. Pentru a evita calculul distanței de la A la R_B (deși în cazul de față este foarte simplu) se poate descompune, de asemenea, și R_B după verticala V_B și după direcția axei grinzii H_B, și în acest caz ecuația de momente în raport cu A determină pe V_B. Apoi, se deduce $H_B = V_B \cdot \operatorname{tg} \alpha$ și $H_A = H_B$.

H_A se poate calcula și direct din ecuația de momente în raport cu punctul de intersecție al lui V_A și R_B.

Dacă pe grinda orizontală acționează și forțe înclinate (fig. 118), acestea se pot descompune în componente după verticală și după axa grinzii. Componentele după axa grinzii au influență numai pentru forțele axiale. Diagramele M și T se calculează numai cu componentele normale pe axa grinzii drepte, după indicațiile din cazul precedent.

Dacă grinda este înclinată (fig. 119), se pot alege ca direcții : direcția axei grinzii pentru H și normala la axa grinzii pentru V : forțele se descompun toate după normala la axa grinzii și după axă, astfel încît suntem în cazul precedent.

În cazul unei grinzi înclinate, dar cu sarcini verticale (fig. 120), (de obicei la acoperișuri) este mai ușor să se aleagă ca direcții, direcția grinzii pentru H și direcția verticală pentru V_A.

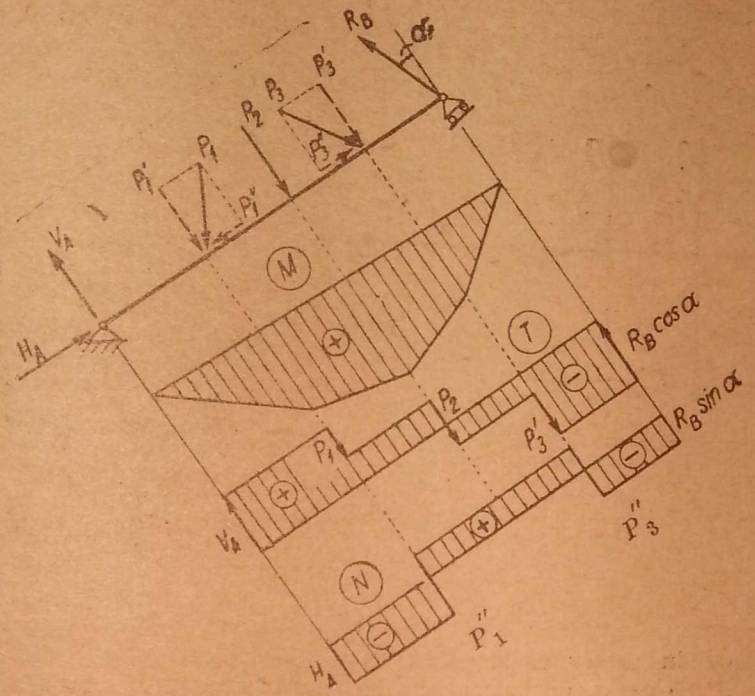


Fig. 119.

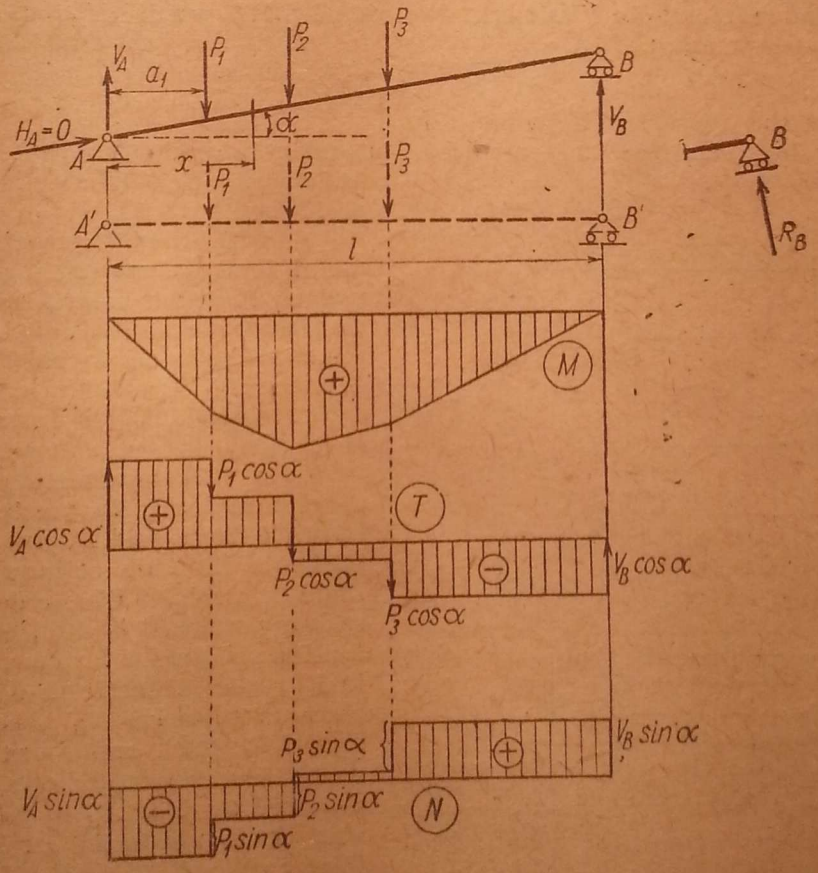


Fig 120.

În acest caz distanţele x şi a se măsoară pe orizontală şi este evident că pentru momente încovoietoare situaţia este aceeaşi ca în cazul cînd grinda ar fi orizontală, şi sarcinile, verticale:

$$M_x = V_A \cdot x - P_1 (x - a_1),$$ V_A fiind determinată pe grinda orizontală $A'B'$.

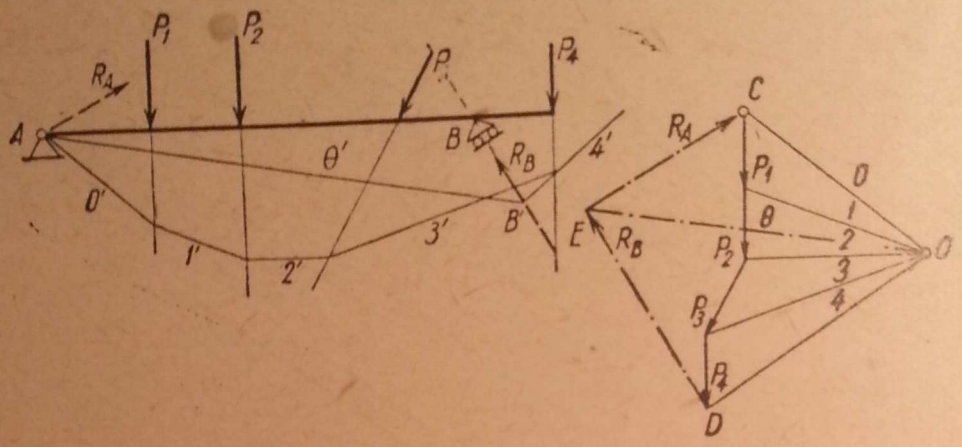


Fig. 121.

Forţa tăietoare în secţiunea x este:

$T_x = (V_A - P_1) \cdot \cos \alpha$, deci ca la grinda simplu rezemată orizontală, dar multiplicată cu $\cos\alpha$.

În diagramele M_x şi T_x nu intervine înclinarea reazemului din B, acesta avînd importanţă numai pentru forţele axiale.

În cazul cînd reazemul din B este orizontal ca în fig. 120, rezultă $H_A = 0$. Expresia forţei axiale din secţiunea x este:

$$N_x = -(V_A - P_1) \sin \alpha.$$

Diagramele sînt reprezentate în fig. 120.

Pe cale grafică, soluţia se determină cu ajutorul poligonului de forţe şi al poligonului funicular, care să îndeplinească condiţiile problemei.

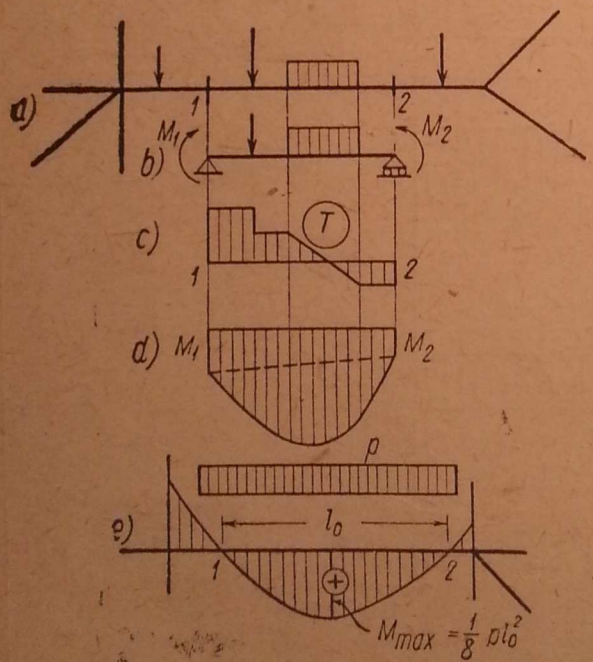


Fig. 122.

Astfel, direcţia reacţiunii totale R_A din A fiind necunoscută, prima latură de poligon funicular a cărei intersecţie cu linia de acţiune a reacţiunii din A determină un punct al liniei de închidere, trebuie dusă prin punctul A, adică prin punctul de aplicaţie al reacţiunii din A, deoarece alt punct al acesteia nu se cunoaşte.

Fig. 121 reprezintă construcţia poligonului funicular în aceste condiţii. Prima latură $0'$ trece prin A, iar ultima latură $4'$ întîlneşte linia de acţiune a lui R_B în B'. Linia de închidere θ' este deci $A - B'$. Din O se duce paralela θ la AB', iar din extremitatea D a poligonului forţelor, se duce paralela la R_B, care întîlneşte pe θ în E. DE reprezintă mărimea lui R_B. Apoi se închide poligonul forţelor, unindu-se E cu C. EC reprezintă pe R_A în direcţie, sens şi mărime, deoarece $0'$, θ' şi R_A în poligonul funicular sînt concurente în A, iar în poligonul forţelor razele 0, θ şi R_A formează un triunghi.

Observaţie. Din cele expuse cu privire la eforturile în barele drepte, rezultă că dacă pe o bară dreaptă a unei construcţii oarecare, static determinată sau static nedeterminată fig. 122, a), se cunosc momentele încovoietoare M_1 şi M_2 în două secţiuni 1 şi 2 ale aceleiaşi deschideri, diagramele momentelor încovoietoare şi ale forţelor tăietoare în intervalul $1-2$

se pot determina exact ca la o grindă simplu rezemată de deschidere $1-2$ (fig. 122, *b*), încărcată cu sarcinile corespunzătoare din intervalul $1-2$ și momentele M_1 și M_2 la capete.

Diagramele T și M sînt reprezentate în fig. 122, *c* și *d*. În cazul particular, cînd secțiunile $1-2$ sînt astfel alese, încît $M_1 = M_2 = 0$, diagramele T și M pe intervalul $1-2$ sînt cele de pe o grindă simplu rezemată de deschidere $1-2$, încărcată cu sarcinile din interval. Dacă sarcina corespunzătoare este uniform distribuită, și pe bară se cunosc două secțiuni *1* și *2* la distanța l_0 una de alta, în care $M_1 = M_2 = 0$, momentul maxim în acest interval este :

$$M_{max} = \frac{1}{8} p \cdot l_0^2 \quad \text{(fig. 122, } e\text{)}.$$

Aplicația 22. Să se determine diagramele de eforturi pentru grinda din fig. 123, p fiind distribuit în kg/m de proiecție orizontală a grinzii.

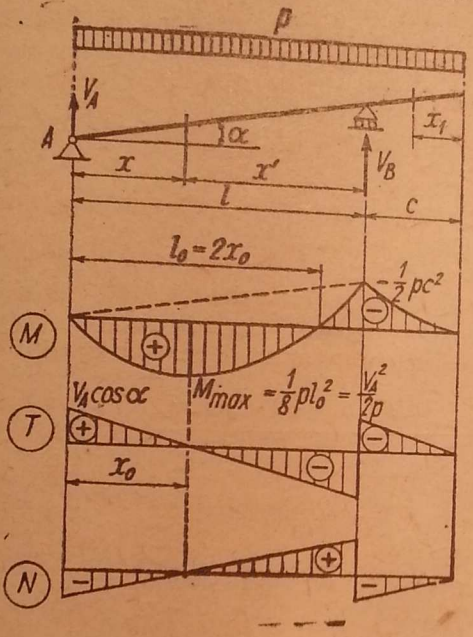


Fig. 123.

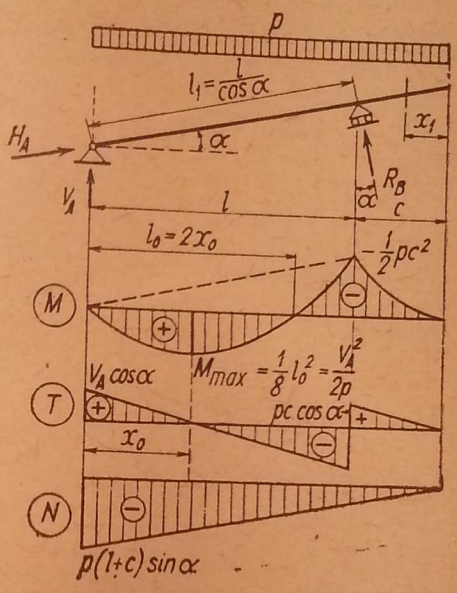


Fig. 124.

Răspuns :

$$V_A = \frac{p\,(l+c)\,(l-c)}{2l}; \quad V_B = \frac{p\,(l+c)^2}{2l}.$$

Pe intervalul $A - B$:

$$N_x = -\,(V_A - p \cdot x)\,\sin\,\alpha\,;$$

$$T_x = (V_A - p \cdot x)\cos\alpha\,; \quad x_0 = \frac{V_A}{p}\,;$$

$$M_x = \frac{1}{2}\,p \cdot xx' - \frac{1}{2}\,p \cdot c^2\,\frac{x}{l}.$$

Pe consolă :

$$N_{x1} = -\,p \cdot x_1\,\sin\,\alpha\,;$$
$$T_{x1} = +\,p \cdot x_1\,\cos\,\alpha\,;$$

$$M_{x1} = -\,\frac{1}{2}\,p\,\cdot\,x_1^2.$$

Aplicația 23. Datele sînt aceleași ca în aplicația 22, dar reazemul B este paralel cu grinda (fig. 124).

Răspuns. Diagramele M și T rămîn aceleași. Diagrama N se schimbă.

$$V_A = \frac{p\,(l+c)\,(l-c)}{2l}; \quad R_B = \frac{p\,(l+c)^2}{2l} \cdot \cos\,\alpha;$$

$$H_A = \frac{p\,(l+c)^2}{2l}\,\sin\,\alpha.$$

Forța axială variază liniar pe toată grinda:

$$N = -\,p \cdot x_1 \sin\,\alpha, \quad \text{unde } 0 < x_1 < l + c.$$

T și M au aceleași expresii ca în aplicația 22.

Aplicația 24. Ce se întîmplă cu diagramele M, T, N, din aplicațiile 22 și 23, dacă sarcina verticală p_1 este distribuită ca în fig. 125, adică uniform repartizată pe lungimea grinzii?

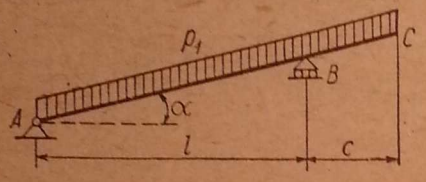


Fig. 125.

Răspuns. Diagramele rămîn aceleași, dar toate ordonatele se împart cu $\cos\alpha$, deoarece $p_1 = \frac{p}{\cos\,\alpha}$.

Aplicația 25. Să se construiască diagramele de eforturi pe grinda din fig. 126.

Răspuns. Pentru diagramele M și T nu interesează direcția reazemului din B. Este suficient să se afle V_A, cînd H_A are direcția grinzii. Aceasta se face prin ecuația de momente în raport cu B:

$$V_A = \frac{10 \cdot 5 + 6 - 4 \cdot 2 \cdot 1}{8} = 6\ \text{t};$$

$$M_D = 6 \cdot 3 = 18\ \text{tm};$$

$$M_{E\,st} = 6 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 6\ \text{tm};$$

$$M_{E\,dr} = M_{E\,st} - M = 6 - 6 = 0;$$

$$M_B = 6 \cdot 8 - 10 \cdot 5 - 6 = -\,8\ \text{tm}.$$

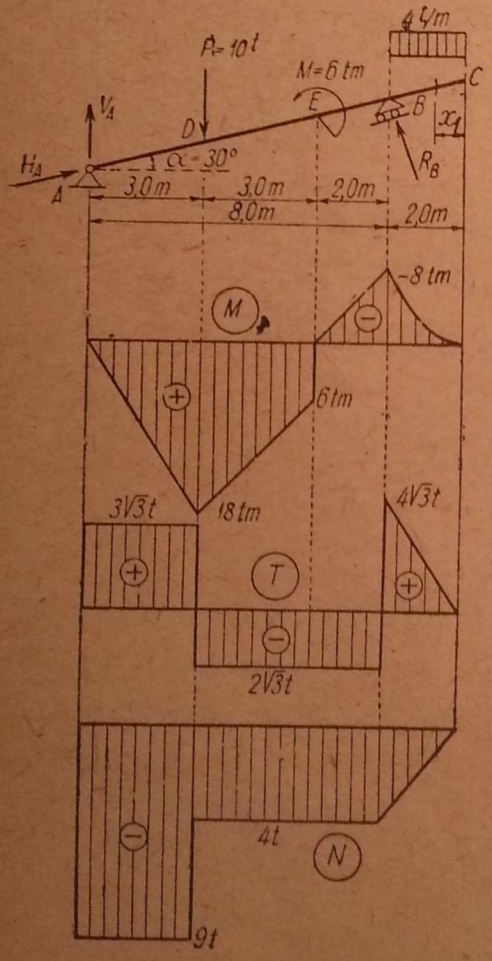


Fig. 126.

Verificarea se face prin recalcularea lui M_B de la dreapta:

$$M_B = -\,\frac{1}{2}\,4 \cdot 2^2 = -\,8\ \text{tm};$$

$$T_{A-D} = V_A \cos\,\alpha = 6\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{t};$$

$$T_{D-B} = (V_A - P)\cos\,\alpha = -\,2\sqrt{3}\ \text{t};$$

$$T_{B-C} = p\,x_1 \cos\,\alpha; \quad T_{B\,dr} = 4\sqrt{3}\ \text{t}.$$

Pentru diagrama forțelor axiale intervine înclinarea reazemului B. În cazul cînd reazemul este paralel cu grinda, reacțiunea R_B are proiecție nulă pe axa grinzii și nu este necesar să fie calculată:

$$N_{B-C} = -\,p\,x_1 \sin\,\alpha; \quad N_B = -\,4\ \text{t};$$

$$N_{B-D} = N_B = -\,4\ \text{t};$$

$$N_{D-A} = N_B - P \sin\,\alpha = -\,4 - 10 \cdot 0{,}5 = -\,9\ \text{t}.$$

Notă. Pentru verificarea diagramelor T și N să se calculeze R_B și H_A.

§ 19. SISTEME DE GRINZI DREPTE

A. SISTEME CU TREI CONDIȚII SIMPLE DE REZEMARE

În acest caz, sistemul alcătuiește un singur solid, geometric nedeformabil, din punctul de vedere al mecanicii corpurilor rigide, și cele trei reacțiuni se determină prin ecuațiile de echilibru ale întregului sistem, analitic sau grafic.

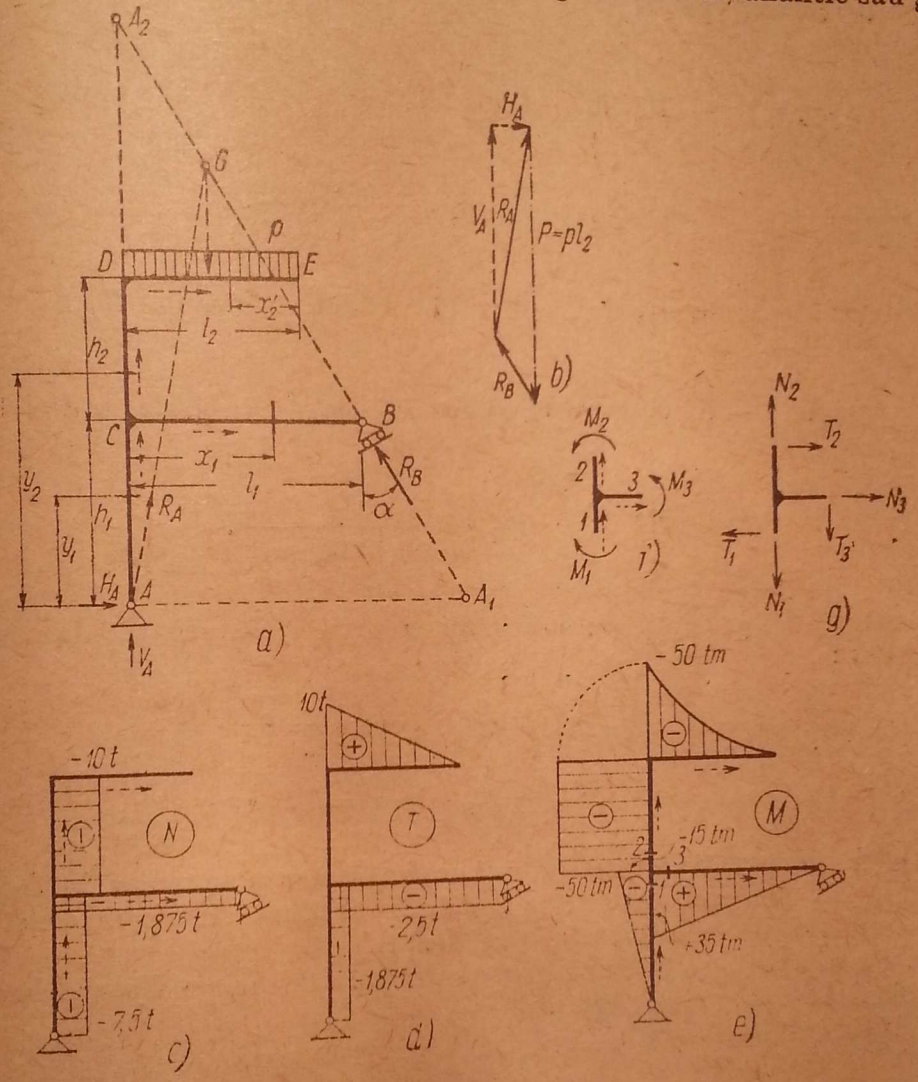


Fig. 127.

După determinarea reacțiunilor se pot obține eforturile în orice secțiune, prin reducerea forțelor exterioare (forțele date și reacțiunile) de la stînga, sau de la dreapta secțiunii.

În exemplul din fig. 127, *a* se introduc reacțiunile H_A și V_A în articulația din A și reacțiunea R_B după direcția corespunzătoare reazemului din B.

Ecuația de momente în raport cu punctul A_1 de intersecție a lui H_A cu R_B determină pe V_A.

$$\mathfrak{M}_{A_1}) \qquad V_A (l_1 + h_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha) - pl_2 \left(l_1 + h_1 \operatorname{tg} \alpha - \frac{l_2}{2} \right) = 0,$$

de unde :

$$V_A = pl_2 - \frac{1}{2} pl_2^2 \frac{1}{l_1 + h_1 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ecuația de momente în raport cu punctul A_2 de intersecție a lui V_A cu R_B determină pe H_A :

$$\mathfrak{M}_{A_2}) \quad - H_A (h_1 + l_1 \operatorname{ctg} \alpha) + p \frac{l_2^2}{2} = 0, \text{ de unde :}$$

$$H_A = \frac{1}{2} pl_2^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1 + h_1 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ecuația de momente în raport cu A determină pe R_B :

$$\mathfrak{M}_A) \quad - R_B (l_1 + h_1 \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha + p \frac{l_2^2}{2} = 0, \text{ de unde :}$$

$$R_B = \frac{1}{2} pl_2^2 \frac{1}{(l_1 + h_1 \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha}.$$

Ecuațiile de proiecții pe verticală și orizontală servesc la verificarea reacțiunilor :

$$V_A - pl_2 + R_B \cos \alpha = 0 ;$$

$$H_A - R_B \sin \alpha = 0.$$

Reacțiunile pot fi determinate și grafic, așa cum se arată în fig. 127, *b*, unde R_A, R_B și rezultanta P a încărcărilor date sînt concurente în G (prima condiție de echilibru a trei forțe).

Pentru eforturi, se fixează sensul de parcurgere pe fiecare bară, indicat în fig. 127, *a* prin săgeți.

Pe intervalul $A - C$:

$$N = - V_A ;$$

$$T = - H_A ;$$

$$M = - H_A \cdot y_1.$$

Pe intervalul $C - D$:

Dacă se face reducerea forțelor de la stînga, se observă că în stînga secțiunii rămîne întreaga parte $ACBy_2$, unde intervin atît reacțiunile din A, cît și din B. Dacă se face reducerea forțelor de la dreapta, intră numai partea EDy_2, fără nici o reacțiune.

Pentru control se va face reducerea pe ambele căi.

De la stînga secțiunii :

$$N = -V_A - R_B \cos\alpha = -\left(pl_2 - \frac{1}{2}pl_2^2\frac{1}{l_1 + h_1 \operatorname{tg}\alpha}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}pl_2^2\frac{\cos\alpha}{(l_1+h_1\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha} = -pl_2;$$

$$T = -H_A + R_B \sin\alpha = -\frac{1}{2}pl_2^2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{l_1 + h_1\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{2}pl_2^2\frac{\sin\alpha}{(l_1+h_1\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha} = 0;$$

$$M = -H_A \cdot y_2 + R_B \sin\alpha\,(y_2 - h_1) - R_B\cos\alpha \cdot l_1 = -h_1 \cdot R_B \sin\alpha -$$

$$-l_1 R_B \cos\alpha = -R_B\cos\alpha\,(l_1 + h_1\operatorname{tg}\alpha) = -\frac{1}{2}pl_2^2.$$

De la dreapta secțiunii rezultatele se obțin mult mai repede :

$$N = -pl_2;$$

$$T = 0;$$

$$M = -\frac{1}{2}pl_2^2.$$

Pentru intervalul $C - B$:

În stînga secțiunii x_1 rămîne partea $EDCAx_1$, și făcîndu-se reducerea de la stînga rezultă :

$$N = -H_A;$$

$$T = V_A - pl_2;$$

$M = V_A \cdot x_1 - H_A \cdot h_1 - pl_2\left(x_1 - \frac{l_2}{2}\right)$ și după înlocuire se găsește :

$M = \frac{1}{2}pl_2^2\frac{l_1 - x_1}{l_1 + h_1\operatorname{tg}\alpha}$, adică expresia care se poate obține direct făcînd reducerea de la dreapta.

Pe intervalul $D - E$:

Grinda $C - D - E$ este o consolă, astfel încît pe intervalul $D - E$ este mai ușor să se facă reducerea de la capătul liber, adică de la dreapta :

$$N = 0;$$

$$T = px_2';$$

$$M = -\frac{1}{2}px_2'^2.$$

Cu aceste expresii se trasează diagramele așa cum sînt reprezentate în fig. 127, *c*, *d* și *e*, pentru datele numerice $l_1 = 14$ m, $l_2 = 10$ m, $p =$ $= 1$ t/m ; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$ ($\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\alpha = 0{,}8$), $h_1 = 8$ m, de unde rezultă : $V_A = 7{,}5$ t, $H_A = 1{,}875$ t, $R_B = 3{,}125$ t, și apoi valorile eforturilor trecute în diagrame.

Verificarea nodurilor se face ca în § 10.

Dacă se izolează fiecare nod, ecuațiile de echilibru se separă în ecuații de echilibru ale momentelor din nod și ecuațiile de echilibru de proiecții ale forțelor din nod.

Din ecuația de echilibru ale momentelor rezultă că dacă într-un nod se întîlnesc numai două bare, momentul încovoietor este același de ambele părți ale nodului. Este cazul nodului D din fig. 127, *e*.

Dacă în nod se întîlnesc mai multe bare, suma momentelor din nod este nulă. În nodul C se întîlnesc trei bare, și dacă se notează cu M_1, M_2, M_3 momentele încovoietoare pe fiecare bară, imediat lîngă nod (fig. 127, *f*), rezultă ecuația :

$$M_1 - M_2 - M_3 = 0.$$

Pentru a putea scrie ecuația în mod just, trebuie ca și pe nod să fie arătate sensurile de parcurgere ale barelor, astfel încît sensurile momentelor încovoietoare pozitive să fie indicate corect.

În cazul din fig. 127, *e* și *f*: $M_1 = -15$ tm ; $M_2 = -50$ tm ; $M_3 = +35$ tm.

Deci : $-15 - (-50) - 35 = 0$.

Ecuațiile de echilibru ale forțelor axiale și tăietoare se verifică prin proiecții (fig. 127, *g*) :

$N_1 - N_2 + T_3 = 0$ și $T_1 - T_2 - N_3 = 0$, sau, în cifre :
$-7{,}5 - (-10) - 2{,}5 = 0$ și $-1{,}875 - 0 - (-1{,}875) = 0$.

B. SISTEME CU MAI MULT DECÎT TREI CONDIȚII SIMPLE DE REZEMARE

Un astfel de sistem este alcătuit din mai multe corpuri geometric nedeformabile cu diferite legături între ele. Din exprimarea condițiilor de echilibru pentru fiecare corp în parte rezultă numărul de legături necesar și suficient pentru ca sistemul să fie static determinat.

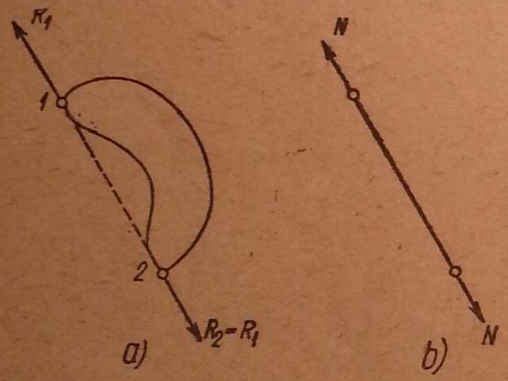


Fig. 128.

Legăturile dintre corpurile care alcătuiesc sistemul sînt, de obicei, articulații. Ele pot fi, de asemenea, simple rezemări sau încastrări incomplete.

În cazul cînd un corp este legat de alte două prin două articulații, și asupra lui nu acționează nici o forță afară de forțele de legătură din cele două articulații (fig. 128, *a*), atunci pentru echilibru este neapărat necesar ca cele două reacțiuni R_1 și R_2 din articulațiile *1* și *2* să fie dirijate după direcția *1* — *2*, să fie egale și de sens contrar. Deci, un astfel de corp comportă o singură necunoscută : reacțiunea după direcția articulațiilor. Dacă acest corp este o bară dreaptă (fig. 128, *b*), rezultă că ea nu poate fi supusă decît unei forțe axiale N (întindere sau compresiune).

Această observație elementară pentru un corp articulat la ambele capete și fără forțe între articulații produce multe simplificări în calculul sistemelor alcătuite din mai multe corpuri.

Rezolvarea sistemelor cu mai mult decît trei condiții simple de rezemare se face prin descompunerea în corpurile geometric nedeformabile componente și exprimarea celor trei condiții de echilibru pentru fiecare în parte. Pe această cale se determină toate forțele de legătură, atît reacțiunile față de teren, cît și cele dintre corpuri. Apoi, cu reacțiunile astfel determinate se trece la exprimarea eforturilor în orice secțiune a fiecărui corp în parte.

Calea aceasta este, de obicei, laborioasă și este util să fie folosite întîi ecuațiile de echilibru pentru sisteme de mai multe corpuri, (conform

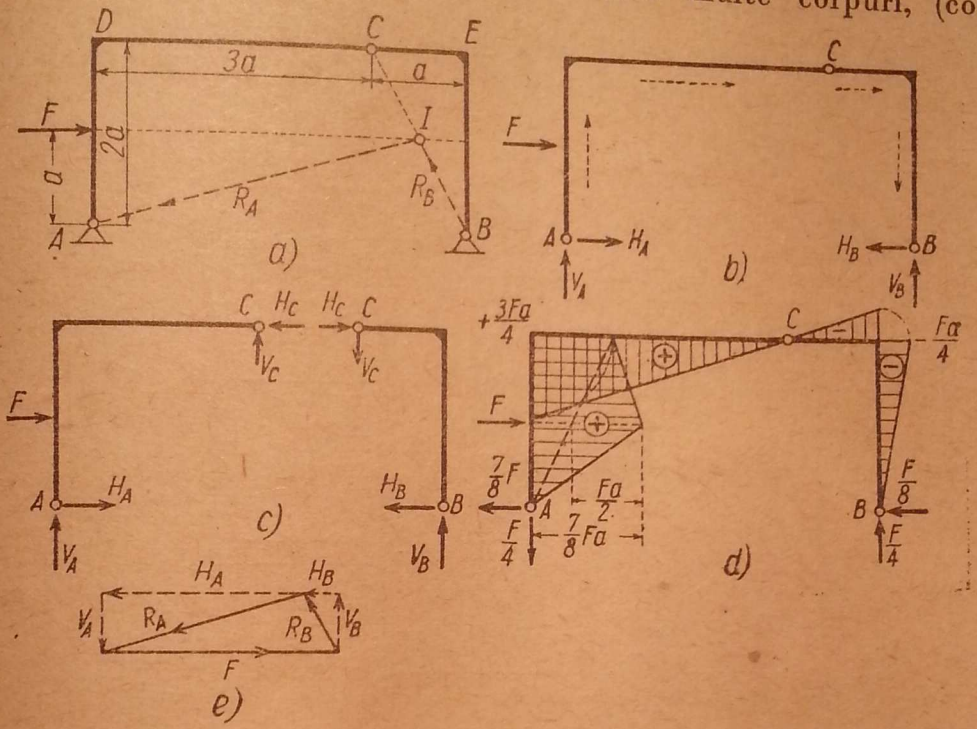


Fig. 129.

teoremei solidificării din Mecanica Teoretică), și numai după aceea să se completeze aceste ecuații, prin echilibrul separat al fiecărui corp.

În exemplul din fig. 129, *a* sistemul de două corpuri $A - C$ și $C - B$ are trei articulații : două față de teren A și B și articulația interioară C. Pentru determinarea eforturilor în orice secțiune este suficient să se cunoască numai reacțiunile din una dintre articulațiile A sau B.

Suprimînd numai legăturile exterioare (fig. 129, *b*), se obțin patru necunoscute și numai trei ecuații de echilibru. Se observă că dacă se alege direcția reacțiunilor H_A și H_B după dreapta AB, din cele două ecuații de momente în raport cu A și B se determină cu ușurință V_B și V_A :

$$V_B = \frac{F \cdot a}{4a} = \frac{F}{4} \quad \text{și} \quad V_A = -\frac{F}{4}.$$

Ecuația de proiecție pe orizontală dă :

$$F + H_A - H_B = 0. \qquad (\alpha)$$

Mai trebuie o singură ecuație pentru determinarea lui H_A și H_B. Pentru aceasta se exprimă echilibrul unuia dintre corpurile AC sau CB, după

ce au fost separate (fig. 129, *c*). Se observă că acum apar necunoscute noi în articulația din C (V_C și H_C), dar pentru a evita introducerea lor în calcul se va folosi ecuația de momente în raport cu punctul C.

Astfel, dacă se scrie ecuația de momente în raport cu C pe corpul din dreapta, rezultă : $H_B \cdot 2a - V_B \cdot a = 0$, de unde

$$H_B = \frac{V_B}{2} = \frac{F}{8},$$

iar din ecuația (α) de mai sus : $H_A = -F + H_B = -\frac{7}{8}F$.

Observăm în treacăt că ecuația de echilibru a momentelor în raport cu punctul C, aplicată unuia dintre cele două corpuri din fig. 129, *c*, are

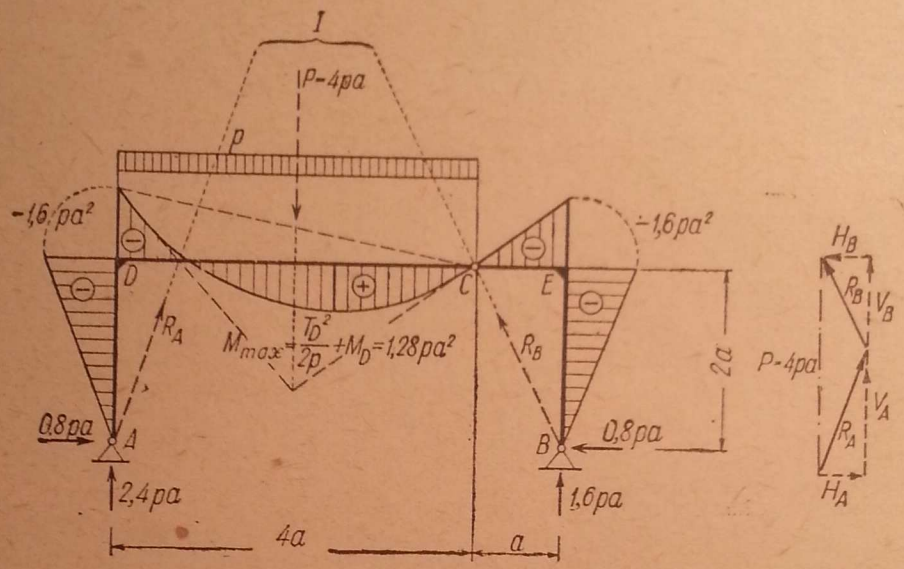


Fig. 130.

aceeași semnificație cu a exprima că momentul încovoietor în articulația C a sistemului în ansamblu din fig. 129, *a* este nul. Asupra acestei observații vom reveni mai tîrziu (Cap. V).

Reacțiunile în A și B fiind aflate, se pot determina eforturile pe toată construcția, pornind fie din A, fie din B (fig. 129, *b*). În fig. 129, *d* este dată diagrama momentelor încovoietoare.

Dacă s-ar fi trecut de la început la echilibrul corpurilor din fig. 129, *c*, calculele ar fi fost mai lungi.

În fig. 129, *a* și *e* se arată soluția grafică pentru reacțiuni. Corpul CEB este articulat în C și B și nu este încărcat cu nici o forță, deci reacțiunile din C și B sînt egale, de sens contrar și au direcția CB. Forța F întîlnește pe BC în I. Sistemul de trei forțe F, R_B și R_A trebuie să fie în echilibru, deci forțele vor fi concurente. Dreapta AI determină direcția reacțiunii din A. Direcțiile fiind cunoscute, se face descompunerea lui F după aceste direcții și se obțin astfel R_A și R_B, și apoi, V_A, H_A, V_B, H_B (fig. 129, *e*).

În fig. 130 este reprezentată diagrama momentelor pentru încărcarea uniform repartizată pe $D - C$ la o construcție asemănătoare cu precedenta. Calculele se pot face atît de ușor în minte, încît nici nu este nevoie să fie transcrise.

Observaţie. Curba momentelor trece continuu prin articulaţia C. Tangenta în D la curba momentelor şi dreapta momentelor de pe regiunea CE, tangentă în C la curba momentelor de pe DC, se întîlnesc pe rezultanta încărcării.

Alăturat este redată soluţia grafică pentru reacţiuni, folosindu-se punctul de intersecţie I al rezultantei cu dreapta CB.

În fig. 131, *a*, este reprezentat un sistem, care, deşi are modul de rezemare compus numai din trei condiţii simple — încastarea din A — totuşi, deasupra lui B este alcătuit din mai multe corpuri. În E, ambele bare sînt articulate, în D numai bara AD este articulată, iar în B bara BE este articulată.

Diagramele de eforturi se pot construi uşor dacă se ţine seamă de toate observaţiile de pînă aici. Se începe cu diagrama momentelor încovoietoare. Pe porţiunea $A-B$ momentul încovoietor este constant şi egal cu cel de încastrare, deci $M = -4pa \cdot a = -4pa^2$.

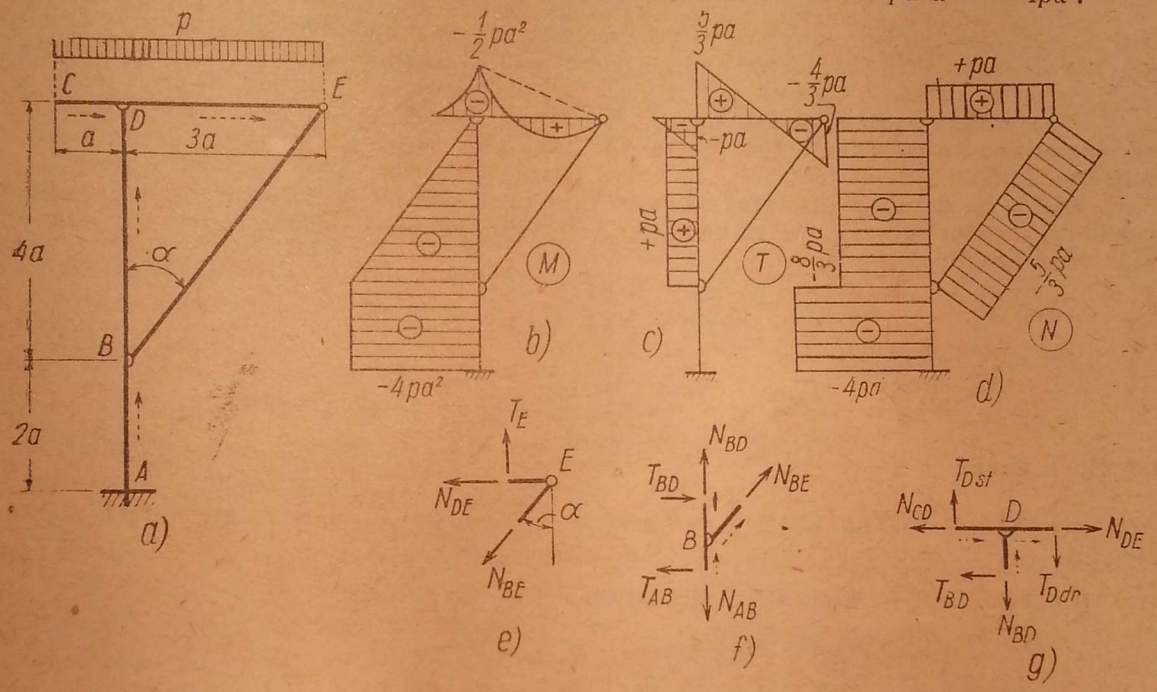


Fig. 131.

Bara BE nu are momente încovoietoare. Pe porţiunea BD momentele încovoietoare variază liniar: în D, avem $M = 0$, iar în B, $M = -4pa^2$. Deci, pe stîlpul ABD diagrama momentelor este complet determinată.

Grinda dreaptă CDE este compusă din două părţi: partea CD, o consolă, a cărei diagramă de momente este o parabolă cu valoarea maximă în D, unde $M = -\frac{1}{2}pa^2$, iar partea DE este o grindă dreaptă dintr-o singură deschidere cu momentele cunoscute în două puncte D şi E, deoarece: $M_D = -\frac{1}{2}pa^2$ şi $M_E = 0$. Deci, peste triunghiul dat de M_D se va suprapune parabola de pe o grindă simplu rezemată DE. Astfel, diagrama M este determinată şi pe porţiunea CDE (fig. 131, *b*).

Să trecem acum la diagrama forţelor tăietoare.

Pe porţiunea AB, $T = 0$. La fel, pe bara BE, care are numai forţă axială. Pe consola $C-D$ avem diagrama cunoscută triunghiulară, iar pe deschiderea DE, unde se cunosc momentele în D şi E, rezultă:

$$T_{D\,dr} = \frac{1}{2}p \cdot 3a - \frac{M_D}{3a} = \frac{3}{2}pa + \frac{1}{6}pa = \frac{5}{3}pa, \quad \text{iar}$$

$$T_E = -\frac{3}{2}pa - \frac{M_D}{3a} = -\frac{3}{2}pa + \frac{1}{6}pa = -\frac{4}{3}pa.$$

Forța tăietoare pe porțiunea BD poate fi determinată direct din diagrama momentelor încovoietoare. Deoarece M variază liniar în acest interval, în baza relației $\frac{dM}{dx} = T$, rezultă că pe același interval forța tăetoare este constantă și are ca valoare panta diagramei momentelor. Valoarea absolută $|T_{BD}|$ se obține deci din împărțirea diferenței ordonatelor momentelor din două puncte prin distanța dintre cele două puncte, în intervalul $B-D$. Luînd chiar B și D cele două puncte rezultă :

$$|T_{BD}| = \left|\frac{M_B - M_D}{l_{BD}}\right| = \frac{4pa^2 - 0}{4a} = |pa|.$$

Pentru determinarea semnului, din relația $\frac{dM}{dx} = +T$ rezultă că forța tăietoare pozitivă într-o secțiune produce creștere de moment în sens pozitiv la dreapta secțiunii și creștere de moment în sens negativ în stînga secțiunii. În cazul de față, la stînga lui D pe bara B-D momentele cresc în sens negativ și deci forța tăietoare e pozitivă : $T_{BD} = +pa$.

Dacă diagrama M e reprezentată pe partea întinsă a secțiunii, discuția de mai sus se concretizează astfel : forța tăietoare e pozitivă dacă dreapta momentelor s-a rotit în sens orar față de linia de reper.

Rămîn de determinat forțele axiale pe intervalele BD, DE și EB. Acestea se pot afla din echilibrul forțelor care acționează nodurile. Astfel, din echilibrul nodului E (fig. 131, *e*) rezultă cele două ecuații de proiecție :

$$T_E - N_{BE} \cos \alpha = 0;$$
$$N_{DE} + N_{BE} \sin \alpha = 0.$$

Din prima se deduce :

$$N_{BE} = \frac{T_E}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3} pa \cdot \frac{5}{4} = -\frac{5}{3} pa \text{ (compresiune)},$$

iar din a doua :

$$N_{DE} = -N_{BE} \sin \alpha = -T_E \operatorname{tg} \alpha = +\frac{4}{3} pa \cdot \frac{3}{4} = +pa \text{ (întindere)}.$$

Din echilibrul forțelor din nodul B (fig. 131, *f*), rezultă :

$$N_{BD} + N_{BE} \cos \alpha - N_{AB} = 0;$$
$$T_{BD} - T_{AB} + N_{BE} \sin \alpha = 0, \quad \text{de unde :}$$

$$N_{BD} = N_{AB} - N_{BE} \cos \alpha = -4pa + \frac{5}{3} pa \cdot \frac{4}{5} = -\frac{8}{3} pa;$$

$$T_{BD} = T_{AB} - N_{BE} \sin \alpha = 0 + \frac{5}{3} pa \cdot \frac{3}{5} = +pa. \text{ (verificare)}.$$

Acum sînt determinate toate eforturile pentru completarea diagramelor *b*, *c*, *d*. Pentru verificare se exprimă și echilibrul forțelor din nodul D (fig. 131, *g*) :

$$-N_{CD} + N_{DE} - T_{BD} = 0;$$
$$+T_{D\,st} - T_{D\,dr} - N_{BD} = 0, \text{ care sînt verificate, deoarece :}$$
$$0 + pa - pa = 0;$$
$$-pa - \frac{5}{3} pa + \frac{8}{3} pa = 0.$$

În fig. 131, *f* și *g* nu au fost indicate momentele încovoietoare care apar în barele secționate, deoarece acestea nu intervin în ecuațiile de proiecție.

Exemple de acestea simple sau altele mai complicate se pot da oricît de multe, dar toate se tratează la fel, prin aplicarea judicioasă a condițiilor de echilibru.

Observație de reținut. Cînd diagrama momentelor încovoietoare e desenată de partea întinsă a secțiunii, semnul forței tăietoare se deduce astfel : dacă tangenta diagramei M într-un punct se obține din rotirea axei de referință în sens orar, forța tăietoare din acel punct este pozitivă.

C. SIMETRIE SI ANTISIMETRIE

Foarte multe dintre sistemele plane de construcție au o axă de simetrie. În statică, o dreaptă se numește axă de simetrie, cînd atît elementele geometrice ale barelor, cît și sistemul de legături, păstrează caracteristicile de simetrie față de această axă. De exemplu, construcția din fig. 132, *a* este simetrică în raport cu axa verticală care trece prin *C*, deoarece atît axele barelor și secțiunile lor, pe de o parte, cît și sistemul de legături exterioare și interioare, pe de altă parte, sînt simetrice în raport cu această axă. Dar construcția din fig. 132, *b* nu este simetrică în raport cu axa verticală care trece prin *C*, deoarece, deși elementele geometrice sînt simetrice, sistemul de rezemare nu este simetric.

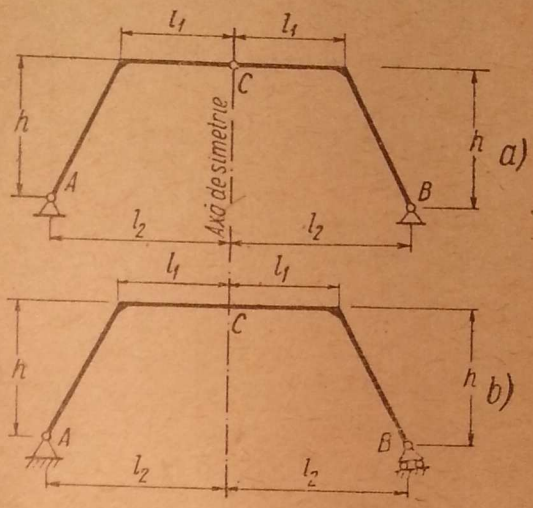


Fig. 132.

La construcțiile simetrice, pot rezulta simplificări pentru determinarea reacțiunilor, mai ales în cazuri particulare de încărcare, după cum urmează.

La o construcție simetrică cu încărcare simetrică rezultă neapărat că și reacțiunile sînt simetrice. De exemplu, în fig. 133 reacțiunile verticale din *A* și *B* vor fi egale din motive de simetrie. Reacțiunile orizontale din *A* și *B* vor fi, de asemenea, egale și dispuse simetric față de axă. Reacțiunea din *C* va avea numai componentă orizontală tot din motive de simetrie, deoarece componentele verticale pe cele două părți nu pot fi așezate simetric față de axa verticală de simetrie.

Încărcări antisimetrice se numesc încărcările care sînt dispuse simetric față de axa de simetrie, dar au sensuri opuse față de axă.

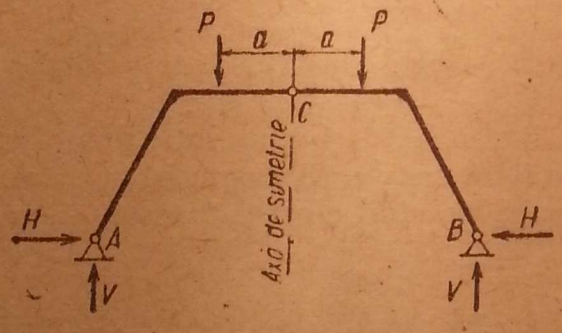


Fig. 133.

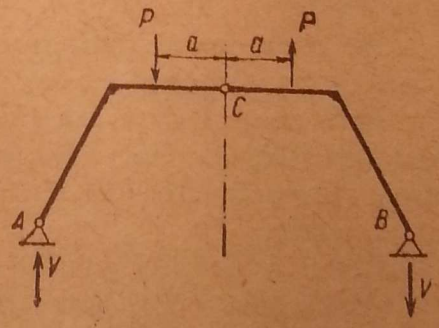


Fig. 134.

La o construcție simetrică cu încărcări antisimetrice rezultă neapărat că și reacțiunile sînt antisimetrice.

În fig. 134 reacțiunile verticale din *A* și *B* vor fi antisimetrice, adică egale în valoare, dar cu sensuri contrarii.

Rezultă, de asemenea, că reacțiunile orizontale din *A* și *B* trebuie să fie antisimetrice, adică egale și îndreptate în același sens. Din ecuația

de proiecție pe orizontală rezultă că ele trebuie să fie nule în cazul de mai sus. În punctul C, componenta verticală a reacțiunii este antisimetrică prin însăși natura ei, iar componenta orizontală trebuie să fie nulă, deoarece prin poziția ei este dispusă simetric față de axă și numai dacă este nulă poate fi și antisimetrică, adică îndreptată în același sens.

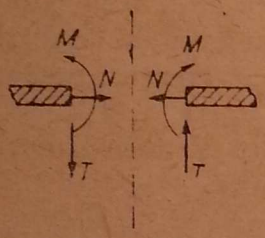


Fig. 135.

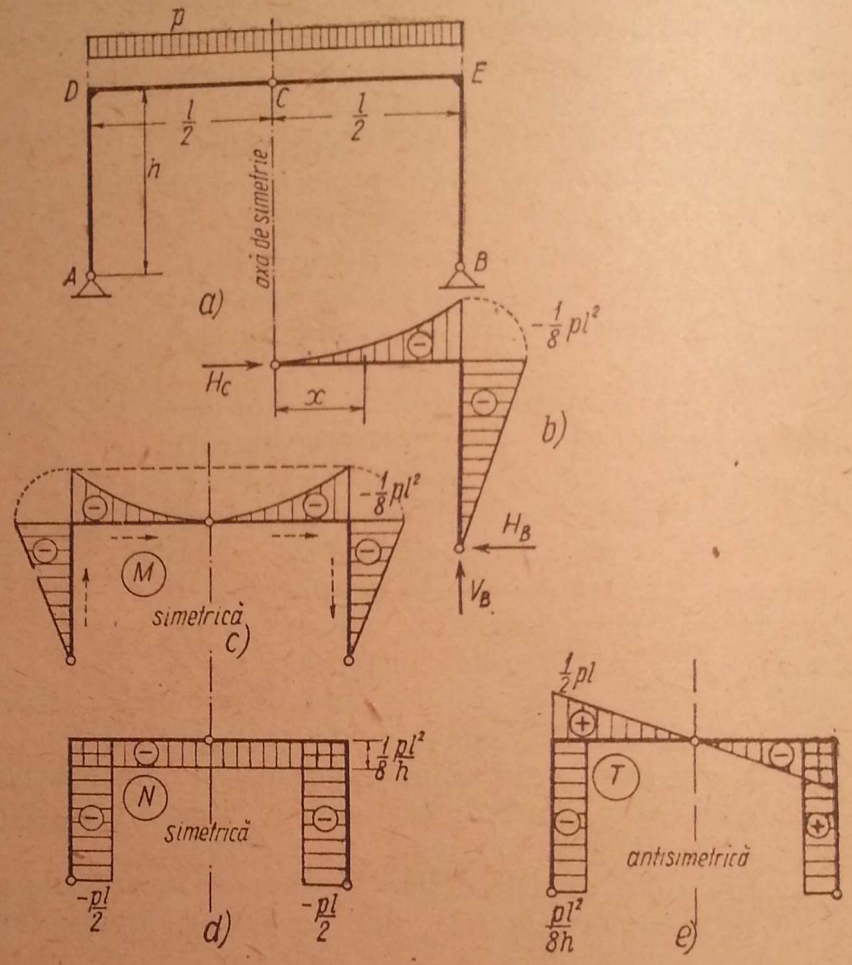


Fig. 136.

De asemenea, și diagramele de eforturi se pot construi ușor prin considerații de simetrie și antisimetrie.

Prin modul cum s-a făcut secțiunea într-o bară și s-au introdus eforturile M, N, T (fig. 135), rezultă că față de secțiunea normală pe axa barei, eforturile M și N sînt dispuse simetric, pe cînd efortul T este dispus antisimetric.

Rezultă de aici următoarele :

a) La construcții simetrice și simetric încărcate față de axa de simetrie, diagramele momentelor încovoietoare și forțelor axiale vor fi simetrice, iar diagrama forțelor tăietoare, antisimetrică în raport cu acea axă.

b) La construcții simetrice, dar antisimetric încărcate, în raport cu axa de simetrie, diagramele momentelor încovoietoare și forțelor axiale vor fi antisimetrice, iar diagrama forțelor tăietoare va fi simetrică în raport cu aceeași axă.

Astfel, în fig. 136, *a* este reprezentată o construcție simetrică și simetric încărcată. Rezultă că reacțiunile și diagramele N și M sînt simetrice, iar diagrama T, antisimetrică.

Deci, $V_A = V_B$, iar pentru că ecuația de proiecție pe verticală trebuie satisfăcută, rezultă :

$$V_A = V_B = \frac{pl}{2}.$$

Tot din cauza simetriei rezultă :
$V_C = 0$, apoi $H_A = H_B$ și dirijate simetric față de axa de simetrie.
Diagrama momentelor încovoietoare se poate reprezenta imediat, pornind din articulația C. Separînd corpurile (fig. 136, *b*) rezultă :

$M_x = -\frac{1}{2} px^2$, ca pe o consolă și, deci, în E :

$M_E = -\frac{1}{8} pl^2$. Diagrama este astfel determinată pe toată construcția (fig. 136, *c*).

Din fig. 136, *b* se deduce cu ușurință reacțiunea orizontală H_B, dacă se scrie expresia momentului încovoietor în secțiunea E, pornind de la dreapta :

$$M_E + H_B \cdot h = 0, \quad \text{deci } H_B = -\frac{M_E}{h} = \frac{1}{8} \cdot \frac{pl^2}{h},$$

și din ecuația de proiecție pe orizontală :

$$H_C = H_B = +\frac{1}{8} \cdot \frac{pl^2}{h}.$$

Cu aceste date se construiesc diagramele N și T (fig. 136, *d* și *e*).

În fig. 137, *a* este reprezentată o construcție simetrică în raport cu o axă, dar antisimetric încărcată în raport cu aceeași axă.

Rezultă că $H_A = H_B = 0$, deoarece ele trebuie să fie antisimetrice, iar suma lor, nulă. De asemenea, $H_C = 0$. Apoi va rezulta $V_A = -V_B$. Ele trebuie să formeze un cuplu egal și de sens contrar cu cuplul încărcărilor și, deoarece brațul de pîrghie este de două ori mai mare, forțele vor fi pe jumătate. Deci,

$$V_A = -V_B = \frac{1}{2} \frac{pl}{2} = \frac{1}{4} pl.$$

Neavînd componente orizontale în A și B, rezultă că pe stîlpii AD și BE momentele încovoietoare vor fi nule. Deci, $M_D = 0$. Deoarece și $M_C = 0$, pe porțiunea $D - C$ va rezulta diagrama momentelor ca pe o grindă simplu rezemată cu valoarea maximă la mijlocul distanței CD, iar pe regiunea CE, antisimetrica ei (fig. 137, *b*). Diagramele de eforturi N și T apar ca în fig. 137, *c* și *d*.

Se va căuta totdeauna să se folosească simetria sistemelor pentru simplificarea calculelor. Se mai observă că la un sistem simetric față de o axă, orice încărcare poate fi descompusă în două încărcări, dintre care una să fie simetrică, și alta antisimetrică ; se pot face calculele simplificate pentru fiecare în parte, și apoi se suprapun efectele.

Astfel, în cazul din fig. 138, *a* sistemul este simetric în raport cu axa verticală care trece prin C, dar încărcarea p este oarecare. Se poate descompune însă în două componente cu valoarea pe jumătate $\frac{p}{2}$ ca în fig. 138, *b* și *c*. Încărcarea din fig. 138, *b* este simetrică, cea din fig. 138, *c*, antisimetrică. Problema a fost astfel adusă la cazurile tratate mai sus.

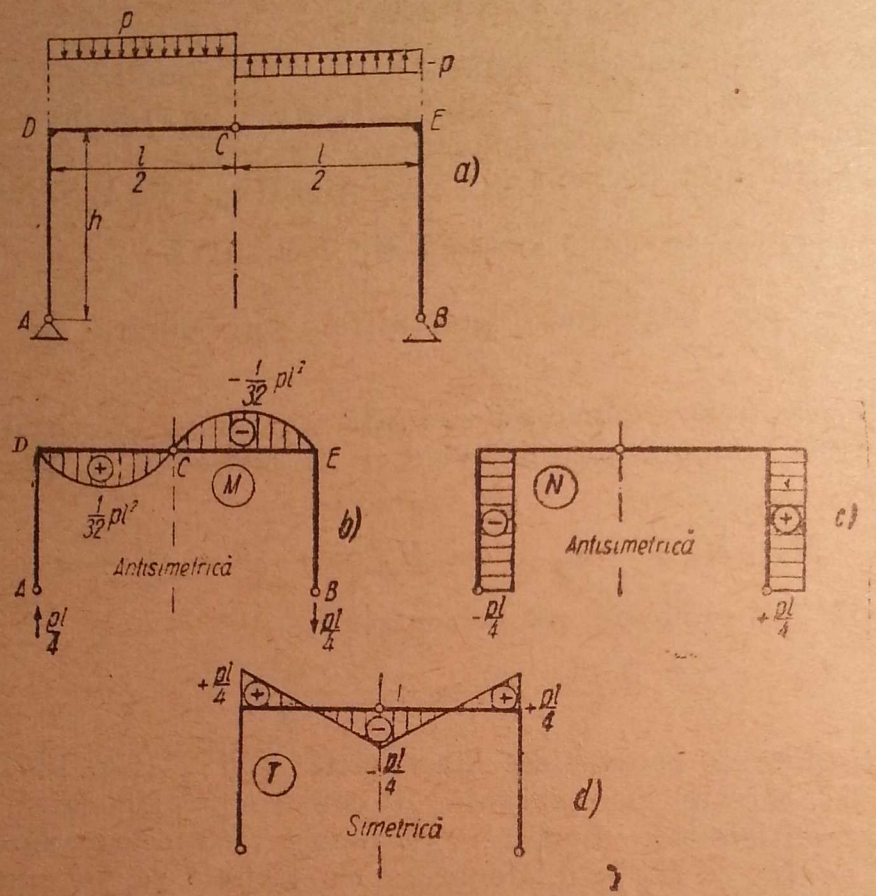


Fig. 137.

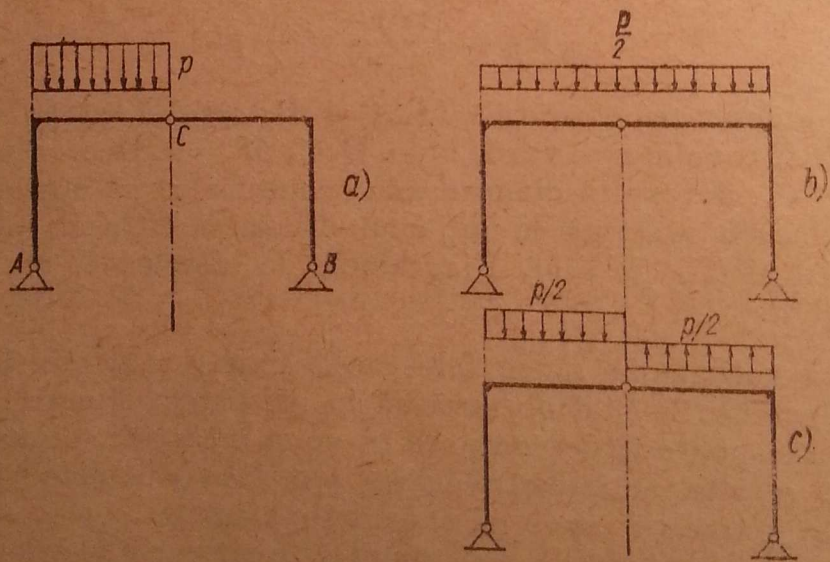


Fig. 138.

În cazul din fig. 139, *a*, forța orizontală F se descompune în perechea de sarcini $\frac{F}{2}$ simetrice din fig. 139, *b* și în perechea de forțe $\frac{F}{2}$ antisimetrice

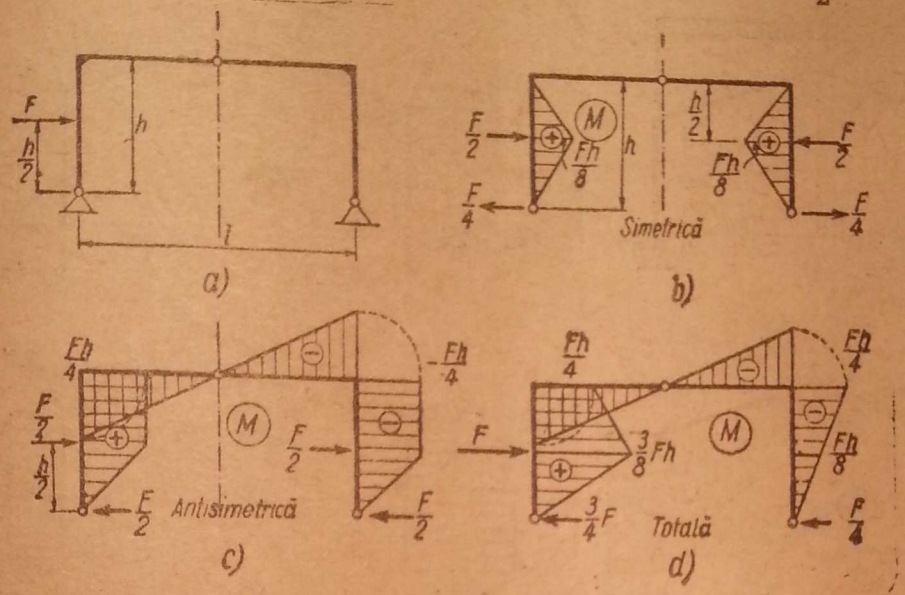


Fig. 139.

din fig. 139, *c*. Se fac diagramele M pentru fiecare în parte și se suprapun (fig. 139, *d*). Reacțiunile verticale în fig. 139 *c* și *d* nu au fost determinate căci nu sînt necesare pentru diagrame.

Aplicația 26. Să se construiască diagramele eforturilor pentru sistemul din fig. 140, *a*.

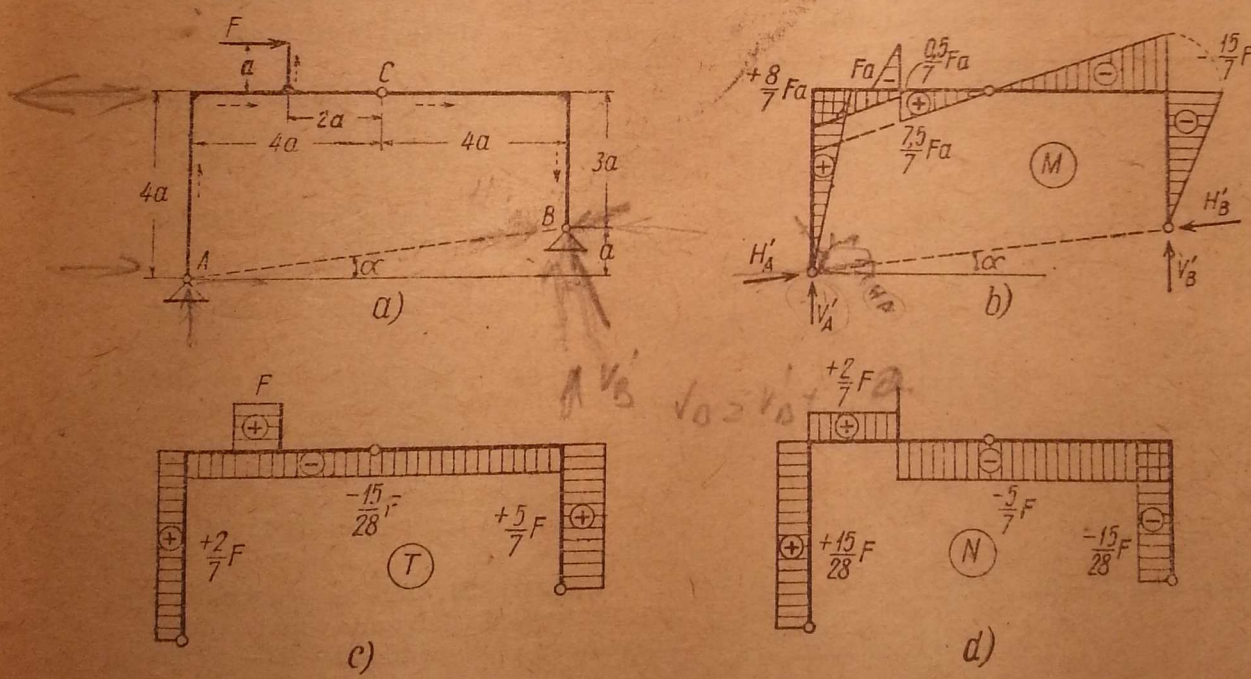


Fig. 140.

Răspuns. Se alege sistemul de reacțiuni V'_A, V'_B, H'_A, H'_B, unde V'_A și V'_B sînt verticale, iar H'_A și H'_B, după direcția $A-B$. Rezultă:

$$V'_A = -\frac{1}{2}F;\quad V'_B = +\frac{5}{8}F;\quad H'_B \cos\alpha = \frac{5}{7}F;\quad H'_A \cos\alpha = -\frac{2}{7}F.$$

Apoi se construiesc diagramele M, T, N ca în fig. 140, *b*, *c* şi *d*.

Aplicaţia 27. Să se determine diagramele de eforturi pentru sistemul din fig. 141, *a*.

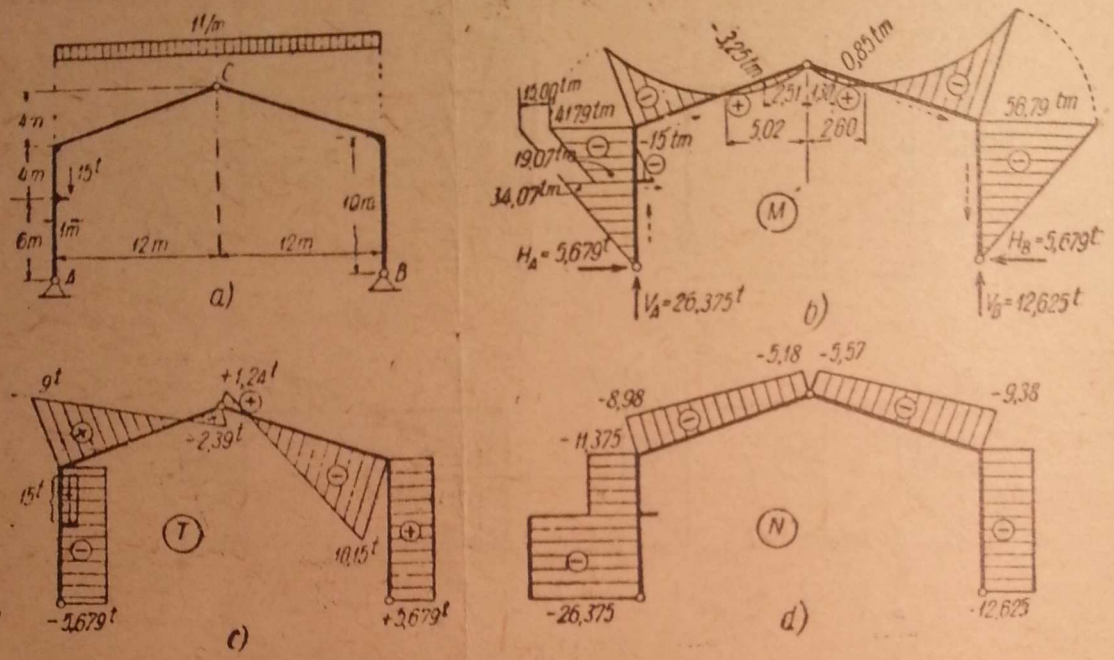


Fig. 141.

Răspuns. Se determină reacţiunile verticale V_A şi V_B, apoi, reacţiunile orizontale $H_A = H_B$ şi se trece la expresiile eforturilor M, T, N. Diagramele lor sînt reprezentate în fig. 141, *b*, *c* şi *d*.

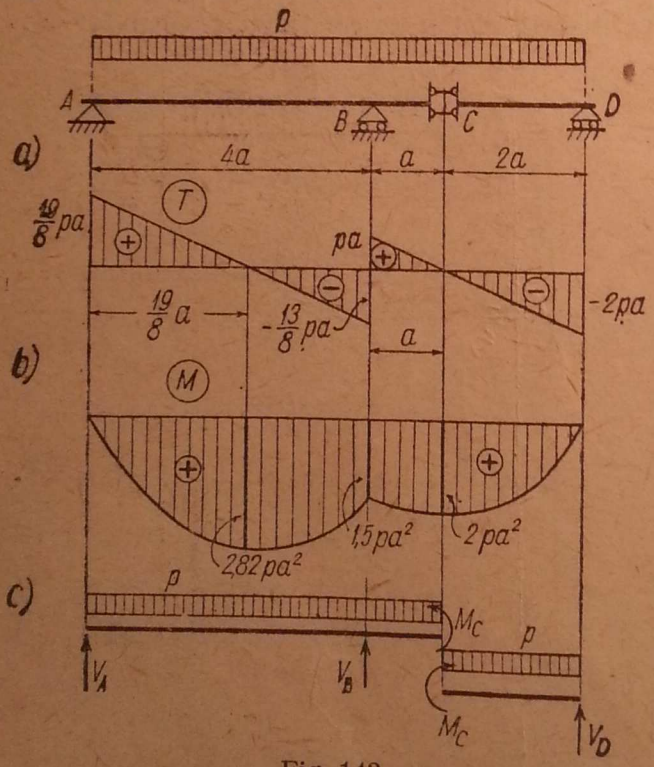


Fig. 142.

Aplicaţia 28. Să se construiască diagramele de eforturi, pentru sistemul din fig. 142, *a*.

Răspuns. Se ţine seamă că în C forţa tăietoare este nulă şi, deci, forţele de legătură în A, B, C şi D sînt cele din fig. 142, *c*.

Diagramele de eforturi T şi M sînt reprezentate în fig. 142, *b*.

Aplicaţia 29. Să se construiască digramele de eforturi pentru sistemul din fig. 143.

Răspuns. Se ţine seamă că cele două pendule din C formează o articulaţie teoretică în D (fig. 143, *d*).

Diagrama M apare astfel ca în fig. 143, *b*. Din diagrama M se deduce diagrama T aşa cum este reprezentată în fig. 143, *c*.

Aplicaţia 30. Să se construiască pe cale grafică diagrama momentelor încovoietoare pe grinda $A-D-F$ din fig. 144 [1]).

Răspuns. Se construieşte poligonul forţelor date şi poligonul funicular corespunzător $0'$, $1'$, $2'$, $3'$.

Se duce dreapta $A'F'$ care ar fi linia de închidere, dacă $A-F$ ar fi o grindă simplu rezemată.

[1]) Din *I. M. Rabinovici*, „Curs de Mecanica Construcţiilor", Moscova 1950.

Reacțiunile din B și E trebuie să determine pe această grindă $A-F$ alt poligon funicular; diferența de ordonate dintre primul și al doilea va fi diagrama momentelor pe grinda $A-F$. Deci, poligonul funicular al reacțiunilor din B și E va trece prin A' și F'. Pe grinda BCE forțele din B și E sînt în echilibru cu V_C, deci laturile lor funiculare tebuie să se întîlnească pe verticala lui C. Dacă se duc din A' și F' două drepte $A'C_1$ și $F'C_1$ care se întîlnesc în C_1 pe verticala lui C și apoi se duce dreapta B_1E_1, care este latură de poligon între forțele din B și E, triunghiul $B_1E_1C_1$ se deformează astfel, încît vîrfurile lui B_1, E_1, C_1 descriu niște drepte paralele, iar două dintre laturi trec prin două puncte fixe A' și F'. Deci și a treia latură B_1E_1 va trece printr-un punct fix coliniar cu A' și F'. Acesta este punctul I. Există încă o condiție pentru momentele pe grindă: $M_D = 0$ (articulație). Dacă se unește I cu D', se obține latura adevărată $B'E'$, și apoi, $A'B'$ și $E'F'$, și deci diagrama momentelor pe grinda ADF. Momentele pe grinda BCE sînt date de triunghiul $B'E'C'$.

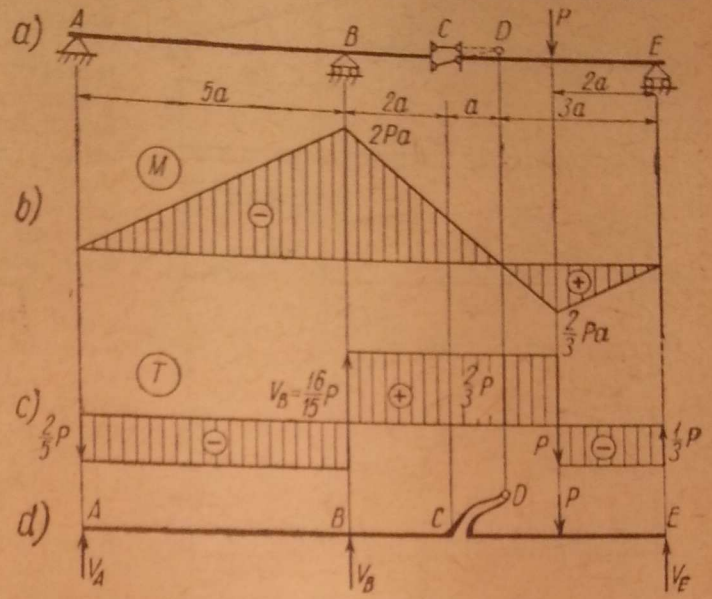


Fig. 143.

Reacțiunile se obțin în poligonul forțelor prin paralele la laturile respective ale poligoanelor funiculare.

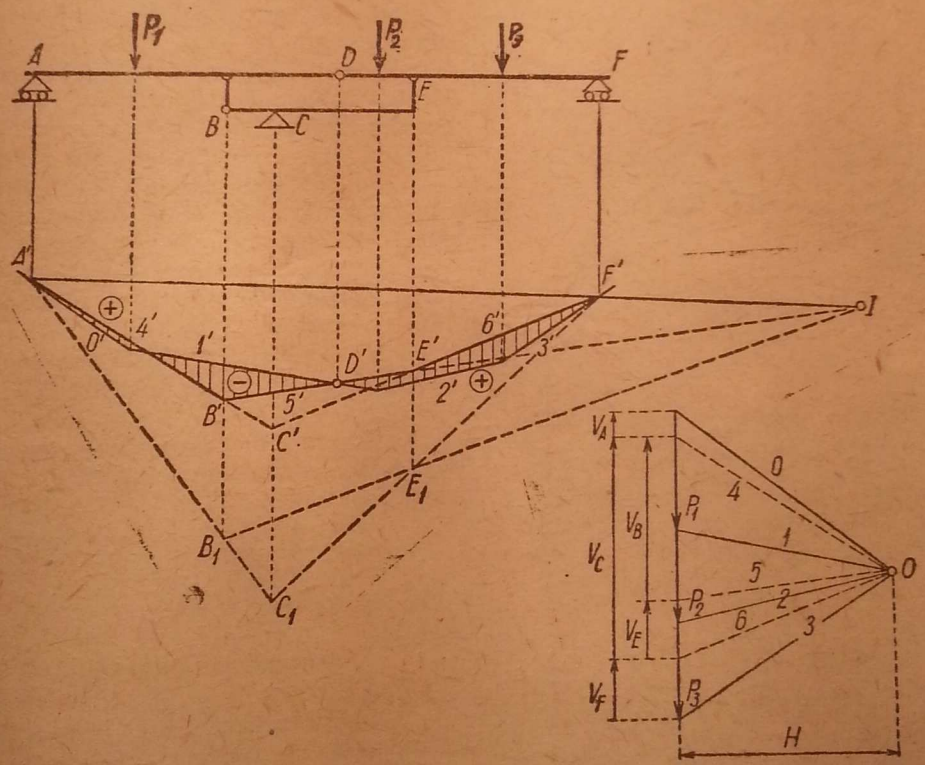


Fig. 144.

Aplicația 31. Să se determine diagramele eforturilor la sistemul din fig. 145, *a*, folosind simetria sistemului:

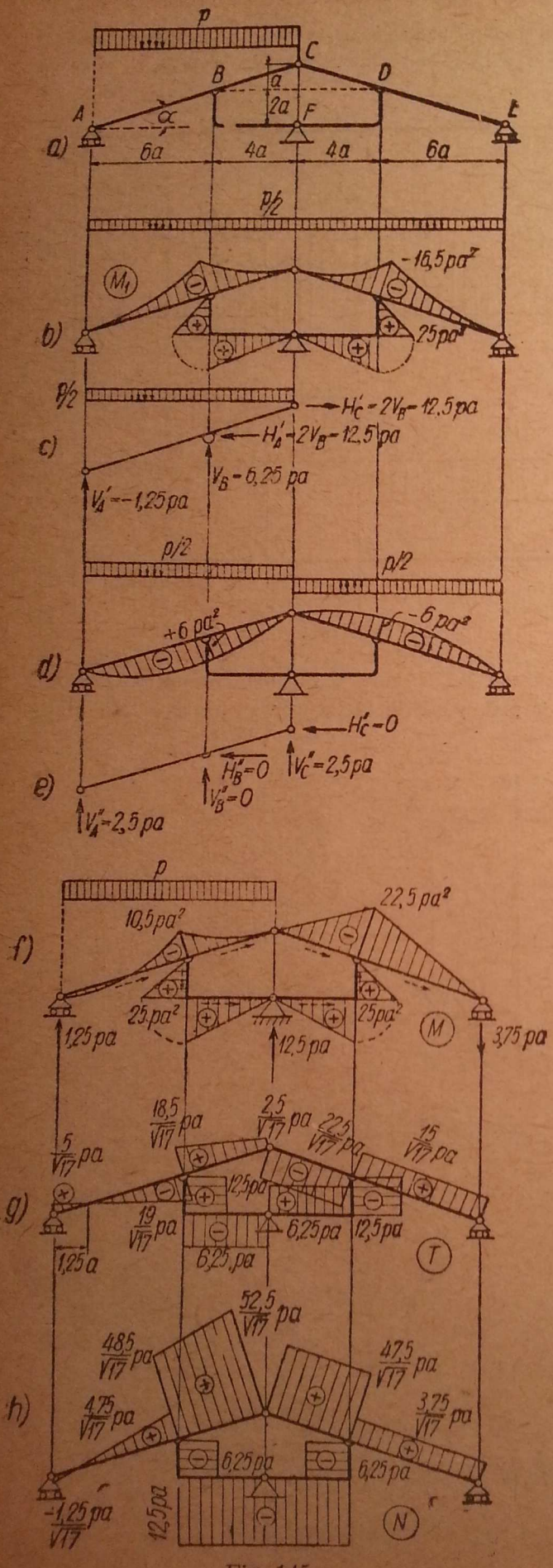


Fig. 145.

Indicaţie. Se desparte încărcarea p în o parte $\frac{p}{2}$ simetrică (fig. 145, *b*) şi alta $\frac{p}{2}$ antisimetrică (fig. 145, *d*).

La încărcarea simetrică, fig. 145, *c* şi *b* reprezintă reacţiunile pe bara ABC şi diagrama momentelor încovoietoare. În C este numai reacţiune orizontală. În B reacţiunea orizontală este de două ori mai mare decît reacţiunea verticală din acelaşi punct. Aceasta reiese din echilibrul corpului $B-F$, articulat la ambele capete şi fără încărcări între articulaţii.

La încărcarea antisimetrică, fig. 145, *e* şi *d* arată reacţiunile pe bara ABC şi diagrama momentelor încovoietoare. Se vede că porţiunea $B-F-D$ nu este solicitată la această încărcare, deoarece eforturile pe această regiune trebuie să fie simetrice în raport cu axa verticală care trece prin F, la încărcări verticale.

În fig. 145, *f* este dată diagrama momentelor încovoietoare; în fig. 145, *g*, diagrama forţelor tăietoare, iar fig. 145, *h*, reprezintă diagrama forţelor axiale. Se remarcă valoarea mare a forţelor axiale pe intervalul cu articulaţii interioare $B-C-D-F-B$, faţă de zonele AB şi DE.

Aplicaţia 32. Să se determine diagramele de eforturi folosind proprietăţile de simetrie şi antisimetrie pentru sistemul din fig. 146, *a*.

Indicaţie. Pentru încărcări verticale, articulaţia din A lucrează ca un reazem simplu, deci sistemul este simetric faţă de axa verticală GF.

Se împarte sarcina în componenta simetrică (fig. 146, *b*) şi componenta antisimetrică (fig. 146, *d*).

Pentru încărcarea simetrică din separarea corpurilor, aşa cum se vede în fig. 146, *c*, rezultă:

$H_1 = pa$ şi $V_1 = 0{,}75\,pa$, cu ajutorul cărora se construieşte diagrama M_1 din fig. 146, *b*.

Pentru încărcarea antisimetrică din separarea corpurilor, ca în fig. 146, *e*, rezultă:

$$H_2 = \frac{1}{3}\,pa \text{ şi } V_2 = 0{,}25\,pa,$$

care servesc la construcţia diagramei M_2 din fig. 146, *d*,

Suprapunînd diagramele *b* şi *d*, rezultă diagrama $M = M_1 + M_2$ (fig. 146, *f*).

De asemenea, sînt cunoscute toate elementele pentru construirea diagramelor T şi N (fig. 146, *g* şi *h*).

Aplicaţia 33. Să se construiască liniile de influenţă V_E, $T_{D\,st}$, $T_{D\,dr}$ şi M_D ale sistemului din fig. 147, *a*.

Indicaţie. Se folosesc deplasările virtuale.

Linia V_E. Sistemul cinematic este reprezentat în fig. 147, *b'*, iar linia de influență, în fig. 147, *b''*. Corpul *1* se rotește în jurul unui punct de pe verticala lui *A* ; corpul *2*, în jurul unui punct de pe verticala lui *C*, iar corpul *3*, în jurul punctului *B*. Se dă o deplasare lui *1* în jos, din *D'* se duce *3'* care trece prin *B'*, iar dreapta *C'G'* reprezintă corpul *2'*. Distanța verticală $E'E''=1$ reprezintă scara liniei de influență. Toate ordonatele se obțin cu ușurință din această valoare.

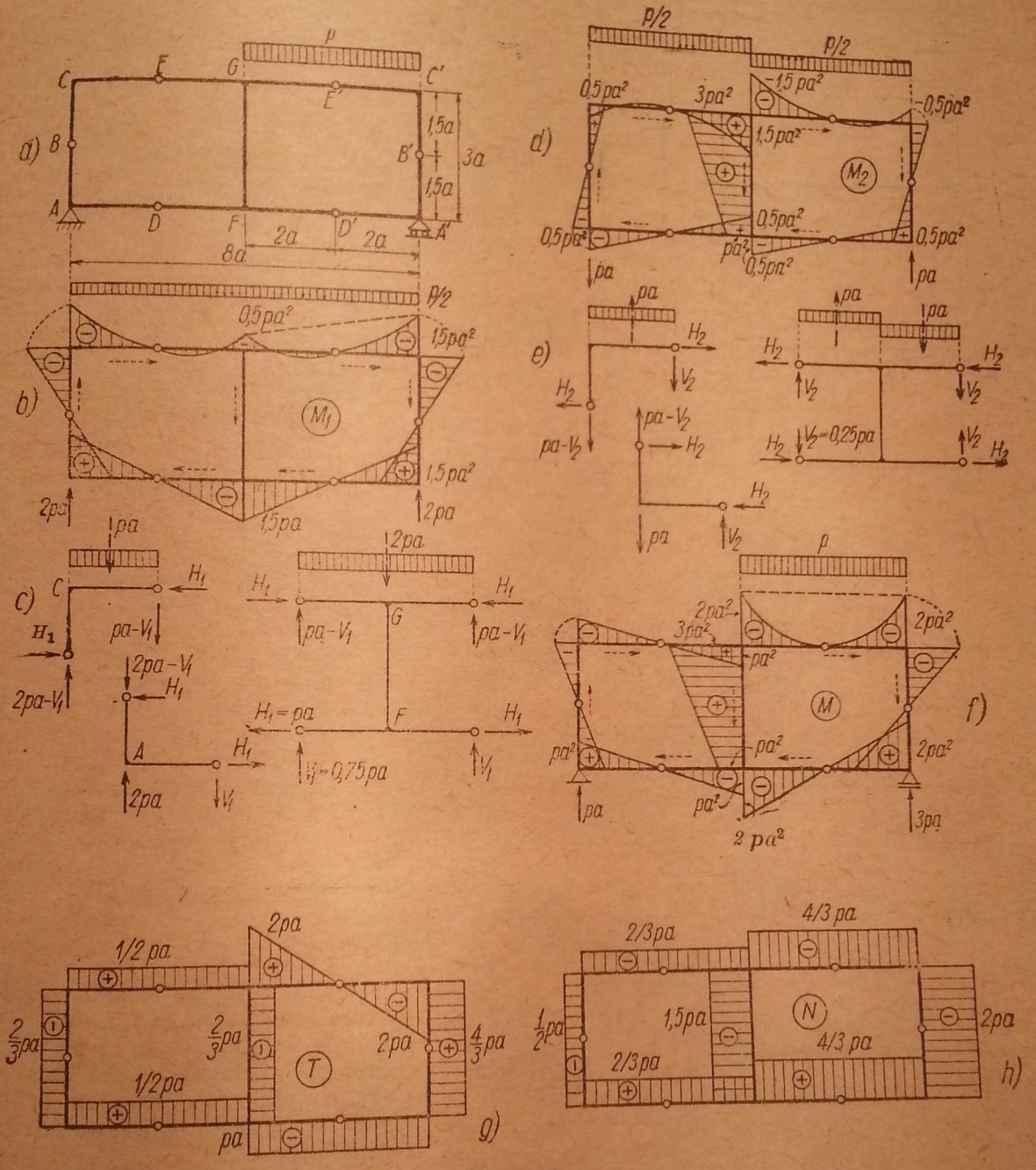


Fig. 146.

Astfel, ordonatele în *D'* și *G'* au aceeași valoare absolută, ceea ce servește la determinarea unghiurilor θ_1 și θ_2.

Linia $T_{D\,st}$. Sistemul cinematic este arătat în fig. 147, *c'*, iar linia de influență — în fig. 147, *c''*.

Se dă corpului *3* o deplasare în sus, astfel că *3'* este reprezentat de dreapta *C'E'*, iar prin *G'* și *B'* se duce corpul *G'B'D'* care reprezintă pe *4'*. Dreapta *E'D'* reprezintă pe *2'*. Din *A'* se duce *1'* paralel cu *2'*. Distanța $D'D''=1$ reprezintă scara liniei de influență. Din această valoare și din elementele geometrice ale grinzii rezultă ordonatele indicate în fig.147, *c''*.

Astfel, dacă se notează ordonatele în dreptul lui G' și D' cu η rezultă :

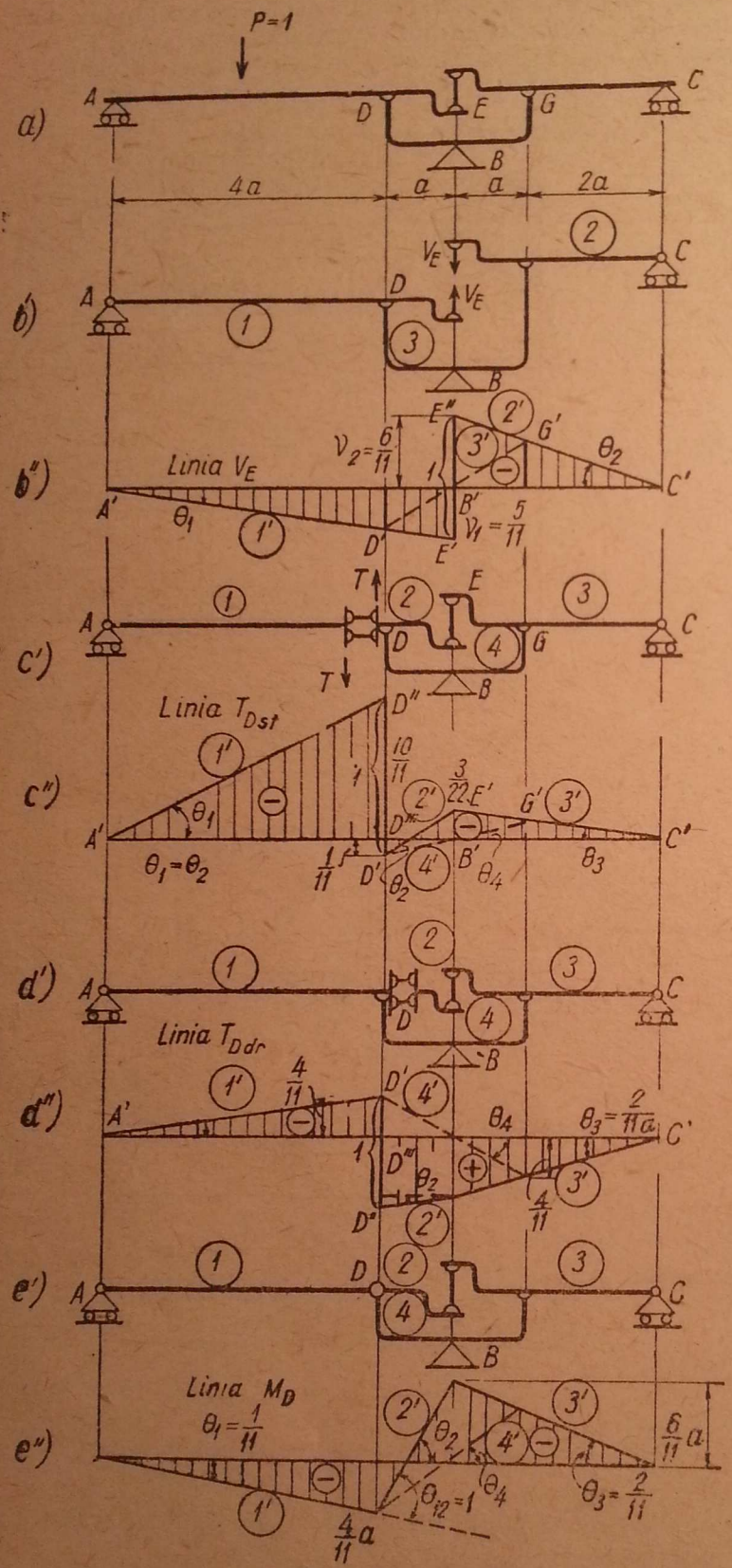


Fig. 147.

$\theta_4 = \frac{\eta}{a}$; $\theta_3 = \frac{\eta}{2a}$, apoi :

$$B'E' = 3a \cdot \theta_3 = \frac{3}{2}\,\eta$$

și $\theta_2 = \dfrac{D'D''' + B'E'}{a} =$

$$= \frac{\eta + \frac{3}{2}\,\eta}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\eta}{a} = \theta_1.$$

Apoi, $D'D'' = 1 = \eta + 4a\,\theta_1 = 11\,\eta$,

de unde $\eta = \frac{1}{11}$ și

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{5}{22a};$$

$$\theta_3 = \frac{1}{22a}\,;\ \theta_4 = \frac{2}{22a}\,;$$

$$D''D''' = 4a\,\theta_1 = \frac{10}{11}\,;$$

$$B'E' = 3a\,\theta_3 = \frac{3}{22}\,.$$

Linia $T_{D\,dr}$. Sistemul cinematic este arătat în fig. 147, *d'*, și linia de influență, în fig.147, *d''*. Indicații analoge cu cele de mai sus. Dreptele *1'* și *2'* rămîn paralele. Scara este determinată de deplasarea $D'D'' = 1$. Rezultă cu ușurință :

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{11a}\,;\ \theta_3 = \frac{2}{11a}\,;$$

$\theta_4 = \frac{4}{11a}$, din care se deduc toate ordonatele.

Linia M_D. Sistemul cinematic este arătat în fig. 147, *e'*, și linia de influență, în fig. 147, *e''*. Epura deplasărilor de construiește, ca și în cazurile precedente, cu ajutorul corpului *4*, care se rotește în jurul reazemului *B* și are puncte comune cu corpurile *1*, *2*, *3*. Scara este

dată de unghiul $\theta_{12} = 1$. Scriind egalitatea ordonatelor din dreptul lui D și G rezultă:

$$\theta_1 = \frac{1}{11}; \quad \theta_3 = \frac{2}{11}; \quad \theta_4 = \frac{4}{11}; \quad \theta_2 = \frac{10}{11}.$$

Aplicația 34. Să se construiască liniile de influență ale eforturilor T_i, M_i, T_k, M_k T_{Bdr} ale construcției din fig. 148, *a*. Forța $P = 1$ se deplasează pe $A-C-D-E-F$.

Indicații. Deplasările virtuale duc direct la soluții. În fig. 148 nu au mai fost reprezentate sistemele cinematice pentru fiecare caz în parte, ci s-au desenat direct liniile de

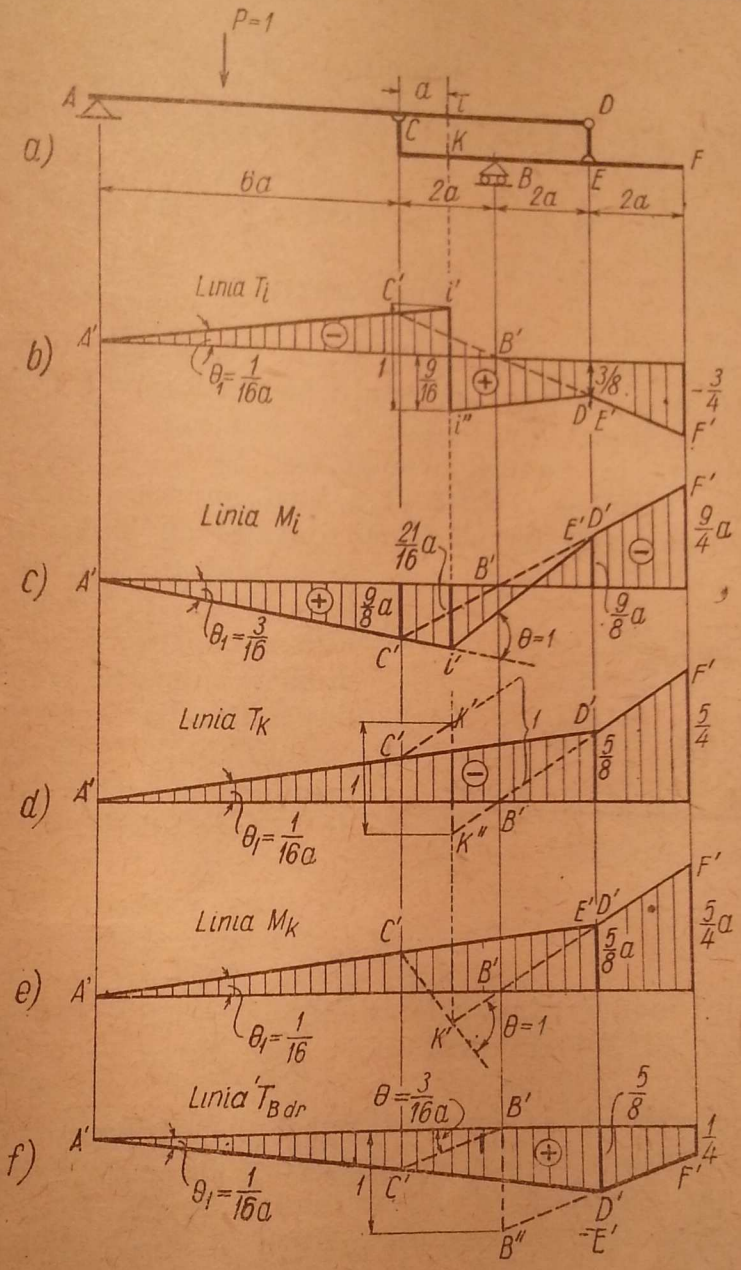


Fig. 148.

influență. Trebuie să se observe ca deplasarea $\Delta = 1$ să fie reprezentată corect în epură, deoarece de aceasta depinde scara ordonatelor liniilor de influență.

Linia T_i. Dreptele $A'i'$ și $i''D'$ sînt paralele, iar dreapta $C'F'$ are ordonată nulă pe verticala reazemului B. Din $i'i'' = 1$ rezultă scara. Valorile ordonatelor importante sînt indicate în fig. 148, *b*.

Linia M_i. Dreptele $A'i'$ și $B'F'$ se întîlnesc în C', pe verticala lui C. Apoi se duce dreapta $i'D'$, deoarece articulația $i'D'$. Scara este determinată de unghiul $\theta = 1$, între dreptele $A'i'$ și $i'D'$, deoarece articulația

s-a introdus în *i*. Cu ajutorul elementelor geometrice se determină ordonatele care sînt trecute în fig. 148, *c*.

Linia T_k. $C'k'$ trebuie să rămînă paralelă cu $F'D'B'$ k''. Scara este dată de $k'k'' = 1$. Ordonatele sînt trecute în fig. 148, *d*.

Linia M_k. Dreapta $A'C'D'$ se întîlnește cu dreapta $F'D'B'k'$ în D'. Dreptele $C'k'$ și $k'D'F'$ determină unghiul $\theta = 1$, care reprezintă scara (fig. 148, *e*).

Linia $T_{Bdr} \cdot C'B'$ este paralelă cu $F'D'B''$, iar $B'B'' = 1$ determină scara. Ordonatele importante sînt trecute în fig. 148, *f*.

CAPITOLUL IV

GRINZI CU ZĂBRELE (SISTEME ARTICULATE)

§ 20. CHESTIUNI GENERALE

A. DEFINIȚII

În Mecanica Construcțiilor, prin grindă cu zăbrele se înțelege un sistem de bare, legate între ele prin articulații, astfel încît să formeze un sistem nedeformabil din punct de vedere geometric și în care încărcările sînt presupuse aplicate la noduri.

Din această definiție rezultă că o bară cuprinsă între două articulații *1* **și** *2* (fig. 149) **are toate forțele (forțe date și de legătură) aplicate numai în articulații, astfel încît ele se pot reduce la cîte o rezultantă în fiecare dintre capete; pentru echilibru, cele două rezultante trebuie să fie dirijate după direcția articulațiilor, egale și de sens contrar. Deci, o bară dintr-o grindă cu zăbrele reprezintă, din punct de vedere static, o singură necunoscută. Dacă bara este curbă, într-o secțiune oarecare, forța** R **după direcția articulațiilor va produce forță axială** ($N = R \cos \varphi$), **forță tăietoare** ($T = -R \sin \varphi$) **și moment încovoietor** ($M = R \cdot y$) (fig. 149, *a*); **iar dacă bara este dreaptă (fig. 149,** *b*) **singurul efort este forța axială** N **(întindere sau compresiune).**

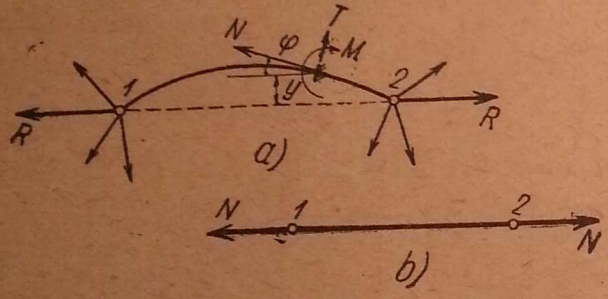


Fig. 149.

Grinzile cu zăbrele se execută aproape totdeauna din bare drepte, așa cum vor fi studiate în cele ce urmează; chiar dacă barele ar fi curbe, problema nu s-ar modifica, deoarece eforturile N, T **și** M **se calculează ulterior, după ce a fost determinată forța** R **după direcția articulațiilor (fig. 149,** *a*).

În practică nu se realizează construcții care să respecte complet definiția dată, în sensul că nu se realizează articulații teoretice în noduri. Construcțiile de beton armat se toarnă cu noduri rigide, construcțiile metalice se nituiesc, sau se sudează la noduri, — deci au de asemenea, noduri rigide, — iar la construcțiile în lemn, unele bare trec continuu prin noduri, iar altele se îmbină prin crestări și cu piese care nu alcătuiesc articulații teoretice. Chiar la construcțiile în care barele se articulează cu ajutorul unui singur bulon în nod, frecările împiedică realizarea articulației teoretice.

Totuși, calculele și încercările arată că dacă barele sînt subțiri (dacă dimensiunea cea mai mare din secțiune este mai mică decît $\frac{1}{10}$ din lungimea barei), influența îmbinării rigide la noduri poate fi considerată ca secundară în raport cu rezultatele calculelor din ipoteza nodurilor articulate. La studiul sistemelor static nedeterminate se va vedea cum se calculează eforturile secundare produse de rigiditatea nodurilor.

Calculele din acest capitol se vor face, deci, în ipoteza nodurilor articulate. În practică se va urmări ca toate axele barelor să se întîlnească în același punct, care va fi considerat nod.

Ipoteza încărcării numai la noduri, adăugată la cea a nodurilor articulate, prezintă avantajul că provoacă numai eforturi axiale în bare. În general, această ipoteză se poate realiza în practică, dacă se face abstracție de greutatea proprie a barei, care, în calcul, va fi considerată concentrată la cele două capete ale ei. În cazul cînd sarcinile se aplică transversal pe bare, între noduri, acestea vor fi solicitate și la încovoiere. Aceste forțe, însă, se pot înlocui cu rezultantele lor la noduri și apoi se calculează separat efectul de încovoiere.

Deocamdată rămînem la schematizarea grinzilor cu zăbrele prin cele două ipoteze : noduri articulate și sarcini la noduri, care duc la solicitarea barelor numai la întindere sau la compresiune.

B. CONDIȚII DE NEDEFORMABILITATE GEOMETRICĂ

Dacă se consideră barele nedeformabile, cea mai simplă construcție geometric nedeformabilă prin bare articulate este triunghiul care are trei noduri și trei bare. De două dintre nodurile triunghiului se poate fixa un al patrulea nod prin două bare articulate, apoi un al cincilea — prin alte două bare articulate (fig. 150) și așa mai departe. Deci, de fiecare nod nou, cîte două bare noi. Notînd cu n numărul total de noduri, și cu b — numărul total de bare, pentru n' noduri adăugate triunghiului $1-2-3$, vor trebui $b' = 2n'$ bare. Deoarece triunghiul de bază $1-2-3$ are trei noduri și trei bare, construcția geometric nedeformabilă care a fost realizată va avea $n = n' + 3$ noduri și $b = b' + 3 = 2n' + 3$ bare, de unde, prin eliminarea lui n' se deduce relația :

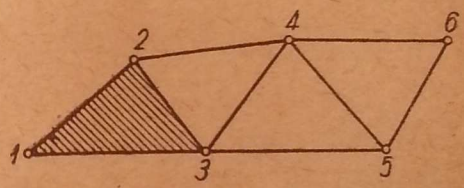


Fig. 150.

$$b = 2n - 3, \tag{4.1}$$

care dă legătura dintre numărul de noduri și numărul de bare pentru o grindă cu zăbrele, considerată un sistem geometric nedeformabil.

Condiția (4.1) este necesară, dar nu suficientă pentru a asigura nedeformabilitatea geometrică.

În fig. 151, *a* este reprezentată o grindă cu zăbrele cu $n = 8$ și $b = 13$, care satisface condiția (4.1) și care se recunoaște că este geometric nedeformabilă. Dacă se scoate bara $5-6$ (fig. 151, *b*), ea trebuie înlocuită cu o altă bară în mod judicios. Construcția fără bara $5-6$ este alcătuită din două părți : *I* și *II* (fig. 151, *b*) în care fiecare în parte este nedeformabilă ; între ele sînt legate însă numai cu două bare $4-6$ și $5-7$, constituind

un sistem cinematic cu un grad de libertate. Dacă se introduce bara $2-5$, sistemul rămîne cu gradul de libertate cinematic, deşi condiţia (4.1) este satisfăcută.

Trebuie neapărat ca bara care este introdusă să lege un nod al părţii I cu un nod al părţii II, deci trebuie să fie introdusă, fie bara $4-7$ (fig. 151, c), fie bara $3-6$ (fig. 151, d), sau una asemănătoare. În acest caz, corpul II fiind legat prin trei bare de corpul I, sistemul devine nedeformabil din punct de vedere geometric. Aceasta se mai poate exprima spunînd că relaţia (4.1) sau (4.2) (v. pag. 163) trebuie satisfăcută atît de construcţia în ansamblu, cît şi de ori ce partea ei.

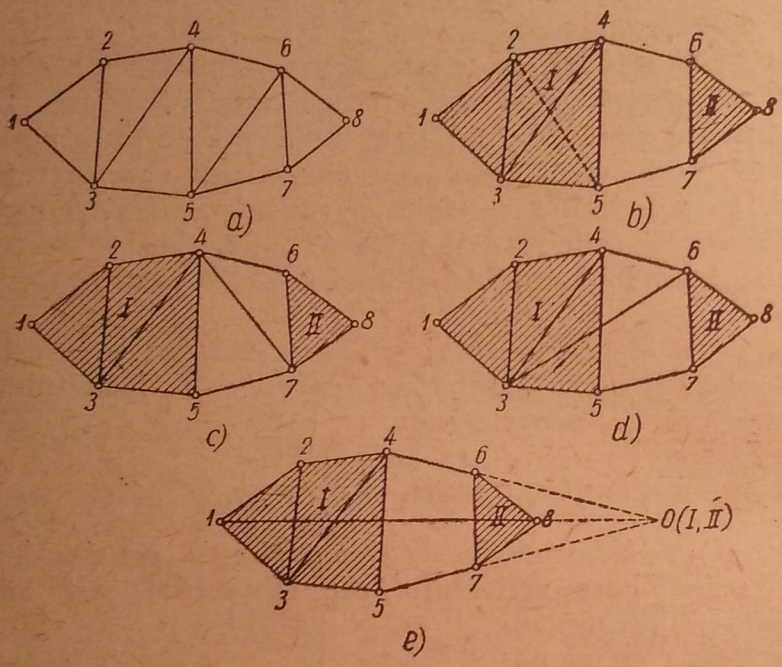


Fig. 151.

Mai este totuşi de observat o restricţie. Cele trei bare care leagă corpul II de corpul I nu trebuie să fie concurente sau paralele, deoarece în acest caz sistemul constituie o formă critică. În fig. 151, e, barele $4-6$, $5-7$ şi $1-8$ sînt concurente în 0.

Din punct de vedere static, formele critice trebuie evitate în construcţii, deoarece duc la eforturi cu valori teoretice infinite, sau practic foarte mari. Din punct de vedere cinematic, problema are aspectul următor: să considerăm corpul I fix; corpul II, înainte de a introduce bara $1-8$ se poate roti faţă de I în jurul centrului I, II (punctul 0), adică nodul 8 se poate deplasa pe un mic arc de cerc cu centrul în 0. Dacă acelaşi nod 8 este legat acum prin bara $1-8$ cu nodul 1, această bară ar permite lui 8 să se deplaseze pe un arc de cerc cu centrul în 1. Dacă punctele 1, 8 şi 0 nu sînt în linie dreaptă, cercurile cu centrele în 1 şi 0 determină punctul 8 prin intersecţie; în cazul cînd 1, 8 şi 0 sînt în linie dreaptă, nodul 8 este determinat prin punctul de tangenţă al celor două cercuri cu centrele în 1 şi 0. Aceasta înseamnă că punctul 8 poate avea deplasări foarte mici pe tangenta comună la cele două cercuri, astfel încît sistemul nu mai este strict nedeformabil, ci constituie o formă critică.

Din punct de vedere fizic, pentru alungiri foarte mici ale razelor, corespunde o deplasare foarte mare a punctului. Un exemplu care pune în evidenţă aceasta este dat în fig. 152, a, unde nodul C este legat cu două bare egale de două puncte fixe A şi B, coliniare cu C. Dacă barele se lungesc cu o cantitate foarte mică u, punctul C ajunge în C' la intersecţia cercurilor cu razele de lungime $l+u$. Să calculăm deplasarea verticală v a punctului C.

În triunghiul ACC':

$v^2 = (l+u)^2 - l^2 = 2ul + u^2 = u(2l+u) \cong 2ul$, dacă se neglijează în paranteză u pe lîngă $2l$:

rezultă $v = \sqrt{2 \cdot ul}$.

Pentru valorile: $l = 5$ m şi $u = 0{,}05$ mm, se obţine:

$v = \sqrt{2 \cdot 0{,}05 \cdot 5\,000} = \sqrt{500} = 22{,}5$ mm.

Deci, pentru o variaţie în lungimea barei: $u = 0{,}05$ mm corespunde o deplasare normală pe bară de 450 ori mai mare.

Să presupunem acum că punctul C era legat prin barele de lungime l de punctele fixe A şi B, astfel încît $\sphericalangle CBA = \alpha = 30°$ (fig. 152, *b*), şi să admitem că barele se lungesc cu cantitatea u. Din proprietăţile triunghiurilor oarecare se poate scrie în triunghiul BCC':

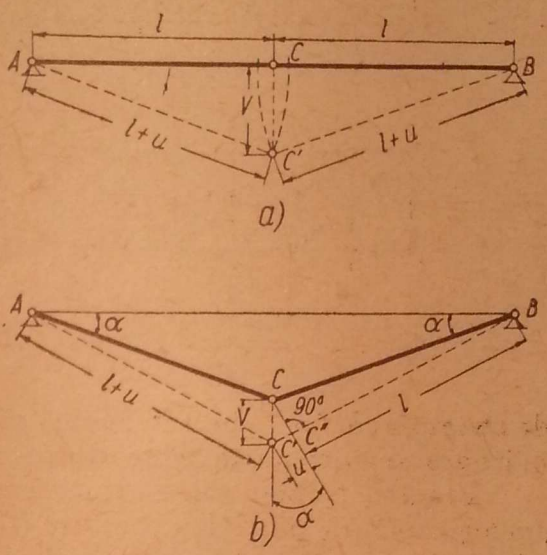


Fig. 152.

$$(l+u)^2 = v^2 + l^2 + 2vl \sin\alpha, \quad \text{sau}$$

$$l^2 + 2lu + u^2 = v^2 + l^2 + 2vl \sin\alpha, \quad \text{sau}$$

$$2lu + u^2 = v^2 + 2vl \sin\alpha.$$

În această ultimă expresie termenii u^2 şi v^2 sînt infiniţi mici de ordinul 2 în raport cu ceilalţi (dacă α nu tinde către zero), care sînt infiniţi mici de ordinul 1, astfel încît se pot neglija, de unde:

$$2lu \cong 2vl \sin\alpha \quad \text{şi}$$

$$v \cong \frac{u}{\sin\alpha}.$$

Acest rezultat are interpretarea cinematică următoare:

Deplasarea v fiind foarte mică, se poate admite că dacă s-ar fi desfăcut articulaţia din C, şi bara nu s-ar lungi, punctul C s-ar deplasa pe un mic arc de cerc CC'' cu centrul în B care poate fi confundat cu perpendiculara pe CB sau pe $C'B$.

Deci:

$$u \cong C'C'' = v \sin\alpha \quad \text{şi}$$

$$v \cong \frac{u}{\sin\alpha};$$

pentru $u = 0{,}05$ mm şi $\alpha = 30°$, rezultă $v = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1$ mm, adică o deplasare verticală de două ori mai mare decît alungirea barei, faţă de cazul precedent, cînd deplasarea v era de 450 ori mai mare.

Rezultă deci că un sistem de bare care constituie o formă critică are deformaţii foarte mari, astfel încît şi din acest punct de vedere nu trebuie folosit în construcţii.

Condiția ca sistemul geometric să nu alcătuiască o formă critică se mai numește condiție de strictă nedeformabilitate.

Deci grinzile cu zăbrele, — pe lîngă condiția de sisteme geometric nedeformabile, caracterizată prin relația (4.1) sau (4.2), care trebuie să fie valabilă pentru orice parte a sistemului, — trebuie să îndeplinească și condiția

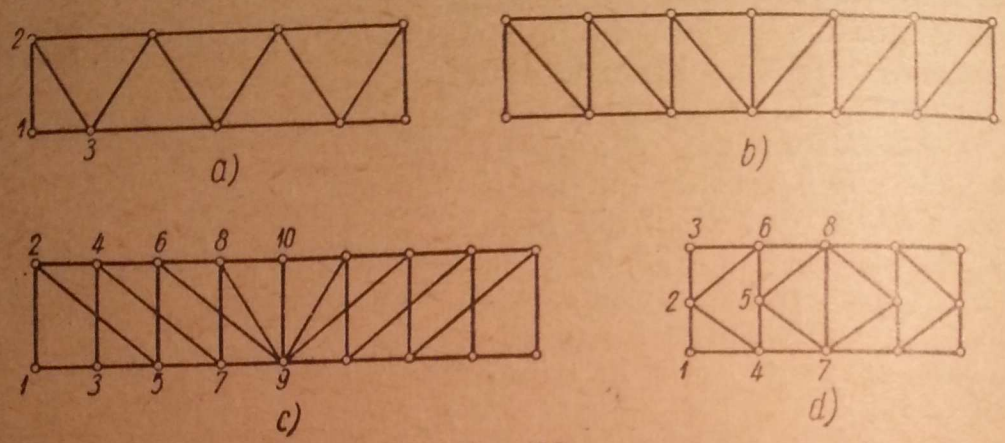


Fig. 153.

de strictă nedeformabilitate, adică să nu fie forme critice. În paragrafele următoare se vor arăta căile de recunoaștere a formelor critice.

Practic, trebuie să se urmărească mereu formarea de triunghiuri juxtapuse și, uneori, parțial suprapuse (fig. 153, *a*, *b*, *c*, *d*). În fig. 153, *c*, primul triunghi este $9-10-8$, apoi $6-8-9$, $7-8-9$, $4-6-7$ etc. În fig. 153, *d*, primul triunghi este $7-8-5$, apoi $6-8-5$, $4-5-7$, $2-6-4$ etc.

Alteori, sisteme corecte formate din triunghiuri pot fi legate prin trei condiții simple corecte. În fig. 154 cele două sisteme *I* și *II* formate din triunghiuri juxtapuse sînt legate corect, astfel încît tot sistemul *I*, *II*, *III* formează un triunghi.

În cele de mai sus au fost studiate sistemele cu condiția (4.1) $b = 2n-3$.

Un astfel de sistem nedeformabil din punct de vedere geometric, pentru a fi fixat în plan are nevoie de trei legături simple care, de obicei, se realizează printr-o articulație și un reazem simplu (fig. 155, *a*). Dacă se elimină o bară, pentru ca sistemul să nu se transforme într-un mecanism, ea trebuie înlocuită cu alta, în condiții corecte; bara poate fi înlocuită însă cu o altă legătură simplă, care poate fi un reazem simplu, așa cum se vede în fig. 155, *b*, unde

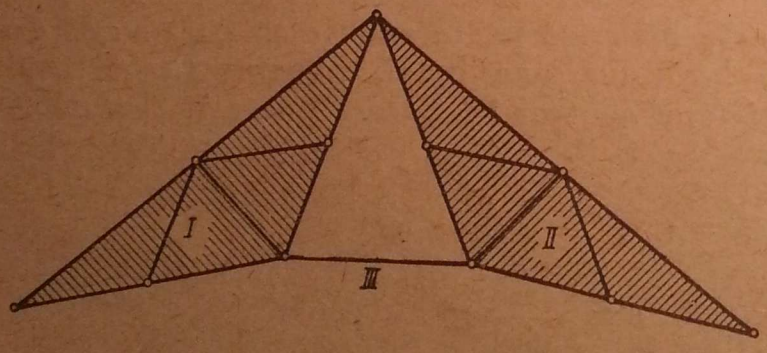


Fig. 154.

în locul barei $8-10$ a fost introdus reazemul din 7, sau în fig. 155, *c*, unde în locul barei $8-9$ a fost introdus reazemul din 7. Toate cele trei sisteme din fig. 155, *a*, *b*, *c* constituie sisteme corecte, deoarece nici unul nu are nici un grad de libertate cinematic, deși ultimele două nu se încadrează în formula (4.1), care trebuie pusă sub o formă mai generală.

Dacă se pune relația (4.1) sub forma :

$$2n = b + 3 \tag{4.1'}$$

înseamnă că fiecărui nod îi sînt necesare cîte două legături simple pentru a-l fixa. O bară este o legătură simplă, un reazem simplu, de asemenea o legătură simplă, iar o articulație este echivalentă cu două legături simple. Legăturile simple care fixează nodul de teren sînt, deci, de două categorii : bare, al căror număr a fost notat cu b, și reazeme simple al căror număr se notează cu r. În acest caz, relația (4.1') devine o relație generală :

$$2n = b + r. \tag{4.2}$$

În cazul particular (4.1), $r = 3$, dar dacă se elimină un număr de bare ele trebuie înlocuite cu alte bare, sau cu reazeme, astfel ca relația (4.2) să fie satisfăcută.

Relația (4.2) precizează că fiecărui nod trebuie să-i corespundă două legături simple, care se pot realiza prin bare și prin reazeme simple. Evident, trebuie ca $r \geqslant 3$.

Dacă $r > 3$, grinda cu zăbrele — după ce se suprimă toate reazemele — nu mai alcătuiește un sistem nedeformabil din punct de vedere geometric, ci este compusă din mai multe sisteme de acest fel (fig. 155, *b* și *c*). Ea devine geometric nedeformabilă în ansamblu, numai prin sistemul de rezemare.

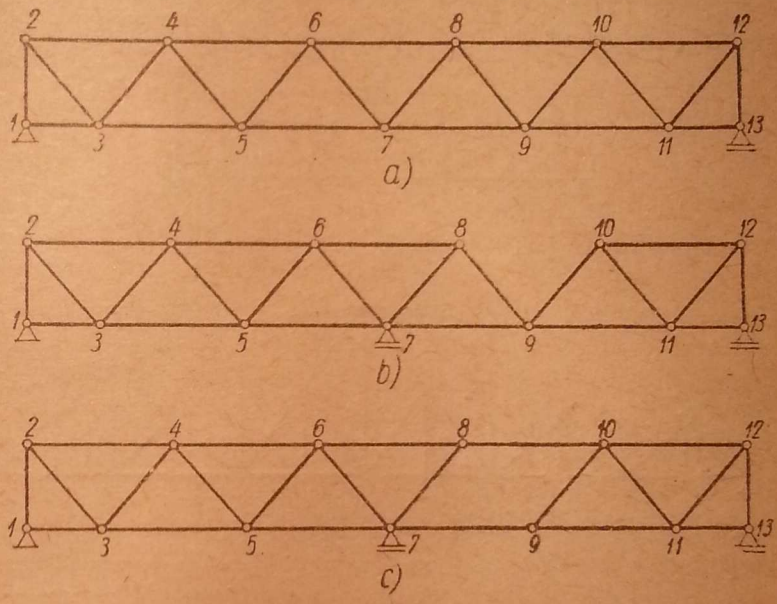


Fig. 155.

În cazul $r = 3$ ($b = 2n - 3$), grinda cu zăbrele alcătuiește un singur corp, geometric nedeformabil, dacă se suprimă reazemele, și se numește uneori grindă liberă.

Relația generală (4.2) ca și relația particulară (4.1) are o interpretare simplă și din punctul de vedere al condițiilor de echilibru. Numărul de necunoscute este compus din numărul b al eforturilor din bare și din numărul r al reacțiunilor din reazeme. În total, $b + r$ necunoscute.

Dacă se secționează toate barele în jurul fiecărui nod, forțele date, reacțiunile și eforturile din bare formează cîte un sistem de forțe concurente în fiecare nod, pentru care se pot scrie cîte două ecuații de echilibru, în total $2n$ ecuații. Pentru ca sistemul să fie static determinat, numărul necunoscutelor trebuie să fie egal cu numărul ecuațiilor :

$$b + r = 2n.$$

Dacă $b + r > 2n$, sistemul este static nedeterminat, iar dacă $b + r < 2n$, sistemul este geometric deformabil, adică un mecanism.

C. TERMINOLOGIE

Barele unei grinzi cu zăbrele se împart în tălpi, care sînt formate din barele de pe contur (cu excepția barelor laterale verticale), care, după poziția lor, se numesc talpa superioară sau talpa inferioară, și din zăbrele, care sînt barele ce leagă tălpile între ele.

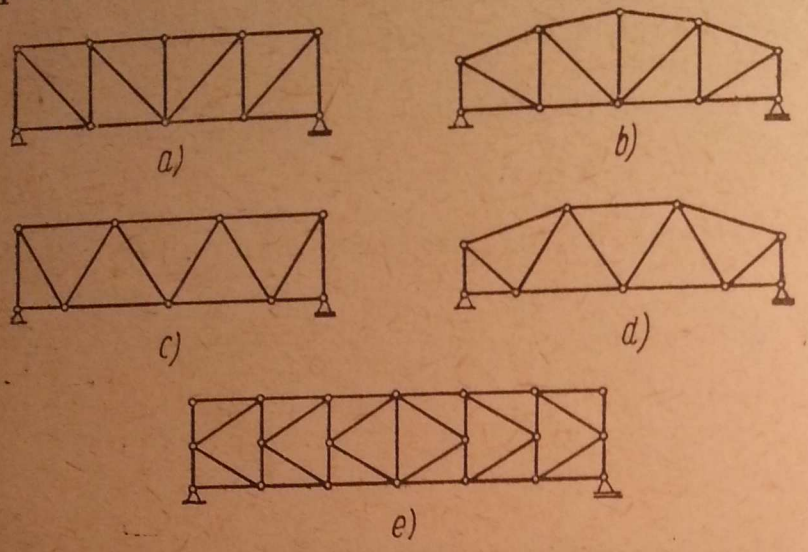


Fig. 156.

Zăbrelele înclinate se numesc diagonale, iar cele verticale — montanți.

Grinzile cu zăbrele se pot clasifica după diferite criterii.

Astfel, după forma conturului, se împart în :

— grinzi cu tălpi paralele (fig. 156, *a*, *c*, *e*) ;

— grinzi cu tălpi poligonale și, eventual, curbe.

Grinzile cu tălpi curbe au, de obicei, numai nodurile pe o curbă (parabolă, elipsă, hiperbolă etc.), dar barele între noduri sînt drepte (fig. 156, *b*, *d* ; 157).

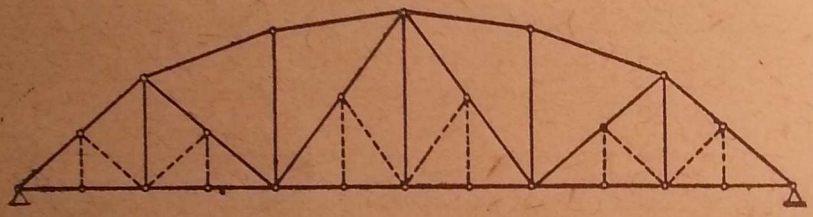


Fig. 157.

O altă clasificare se face după felul zăbrelelor, ținînd seamă în același timp de metodele de calcul al eforturilor din bare :

a) Sisteme simple, în care intră :

— grinzi cu zăbrele sistem dreptunghiular (fig. 156, *a* și *b*) ;

— grinzi cu zăbrele sistem triunghiular fig. 156, *c* și *d*) ;

— grinzi cu diagonale în K (fig. 156, *e*).

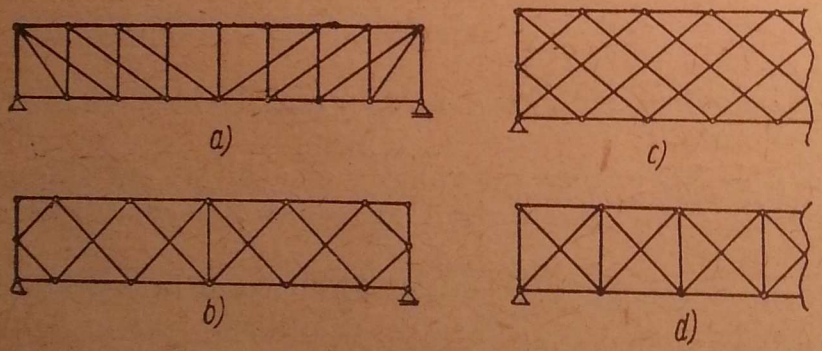


Fig. 158.

La acestea, grinda cu zăbrele este alcătuită din triunghiuri alăturate fără să se suprapună.

b) Sisteme compuse (fig. 157), în care se cuprind grinzi provenite din introducerea unui sistem suplimentar (desenat punctat) peste un sistem primitiv. Acestea se mai numesc grinzi cu bare suplimentare (la poduri), deși respectă condiția $b = 2n - 3$.

c) Sisteme complexe, care sînt sistemele ce nu se pot încadra în celelalte două. Astfel, sînt :

— grinzi sistem dublu dreptunghiular (fig. 158, *a*) ;

— grinzi sistem dublu triunghiular, (fig. 158, *b*);
— grinzi cu zăbrele multiple (fig. 158, *c*);
— grinzi sistem combinat (fig. 158, *d*).

Alte noțiuni folosite sînt: *deschiderea* grinzii cu zăbrele, care este distanța (orizontală) dintre reazeme și *panou*, acesta reprezentînd porțiunea de grindă dintre două noduri consecutive ale aceleiași tălpi.

Notațiile uzuale pentru eforturile din bară sînt: N — efort axial în general; S — efort în talpa superioară; I — efort în talpa inferioară; D — efort în diagonală; V — efort în montant.

§ 21. DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN BARE

A. METODA SECȚIUNILOR

În această metodă se presupune că se face o secțiune completă prin grindă și se exprimă condițiile de echilibru ale uneia din cele două părți. Deoarece se pot exprima trei ecuații de echilibru pe una din părți, în aceste ecuații trebuie să apară deci numai trei necunoscute, pentru ca acestea să poată fi determinate numai prin secțiunea efectuată. Dacă reacțiunile din reazeme ce intră în ecuațiile de echilibru ale acestei părți au fost determinate anterior, cele trei necunoscute din ecuațiile de echilibru ale uneia din părți pot fi eforturile din barele secționate.

Deci prin secțiunea efectuată trebuie să apară ca necunoscute numai eforturile din trei bare. Evident, aceste bare nu trebuie să fie concurente sau paralele, căci în acest caz din cele trei ecuații de echilibru numai două sînt liniar independente, a treia fiind o combinație liniară a celorlalte două.

În general, problema constă în a determina rezultanta forțelor exterioare (forțe date și reacțiuni în reazeme) pe una dintre părți și în a echilibra această rezultantă prin forțe, după cele trei direcții ale barelor secționate. Această operație se poate face analitic sau grafic.

a) Soluția analitică

1. **Grinzi cu tălpi paralele** (fig. 159, *a*). Grinda fiind de tipul $2n = b+3$ are numai trei necunoscute în reazeme, care se determină ca la grinda dreaptă simplu rezemată, prin cele trei ecuații de echilibru ale sistemului în ansamblu. Deci, reacțiunile din reazeme se presupun cunoscute.

Dacă se face secțiunea $I - I$, în locul celor trei bare secționate ($3 - 5$, $3 - 4$ și $2 - 4$) se introduc eforturile corespunzătoare pozitive, adică presupuse întinderi (ies din secțiunile făcute lîngă noduri). Cele trei necunoscute S_{3-5}, I_{2-4} și D_{3-4} se determină prin cele trei condiții de echilibru al părții din stînga secțiunii (fig. 159, *b*). Aceste condiții se exprimă astfel încît în fiecare ecuație să intervină cîte o singură necunoscută.

Pentru determinarea efortului în bara $2-4$ (I_{2-4}), se folosește ecuația de momente în raport cu punctul de intersecție al celorlalte două bare secționate $3 - 4$ și $3 - 5$, adică în raport cu punctul 3 (fig. 159, *b*). Rezultă:

$$-I_{2-4} \cdot h + M_3 = 0, \quad \text{de unde} \quad I_{2-4} = \frac{M_3}{h}; \tag{4.3}$$

prin M_3 s-a notat momentul tuturor forțelor exterioare (forțe date și reacțiunea din *0*), care acționează pe partea din stînga secțiunii $I - I$, în raport cu nodul *3*.

Acest moment, asemănător cu momentul încovoietor pe o grindă simplu rezemată, este pozitiv pentru sarcini verticale de sus în jos. Deci I_{2-4} este o forță de întindere. Talpa inferioară este întinsă.

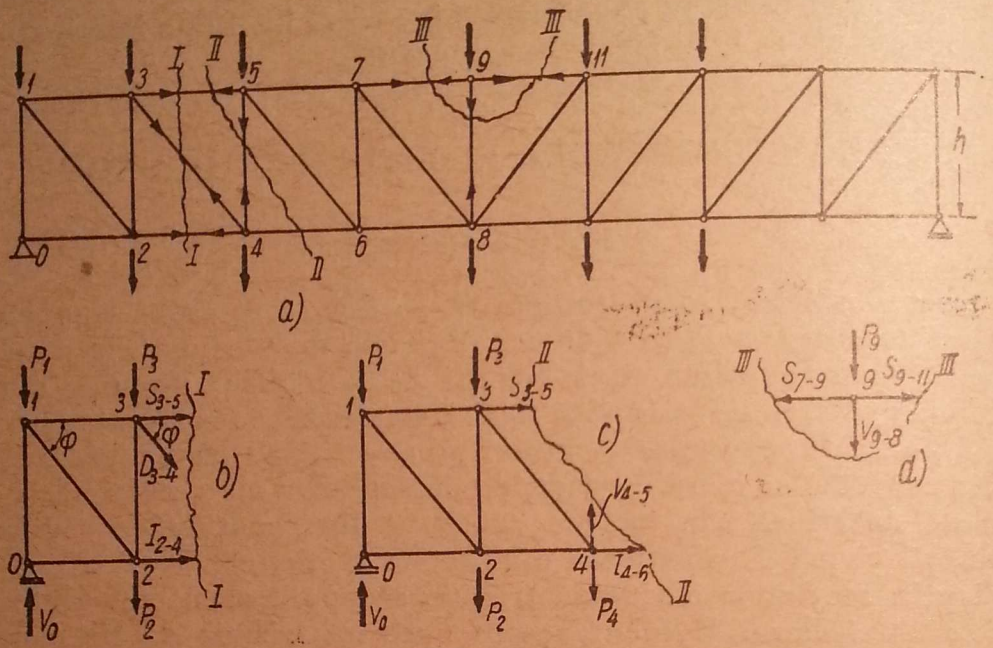


Fig. 159.

Pentru determinarea efortului S_{3-5} se vor lua momentele în raport cu punctul de intersecție al lui $2 - 4$ și $3 - 4$, adică în raport cu nodul *4*:

$$S_{3-5} \cdot h + M_4 = 0, \quad \text{de unde} \quad S_{3-5} = -\frac{M_4}{h}. \tag{4.4}$$

M_4 este momentul tuturor forțelor exterioare din stînga secțiunii $I - I$ în raport cu nodul *4*. Rezultă că talpa superioară este comprimată.

Pentru efortul în diagonala $3 - 4$ (D_{3-4}) nu se poate folosi o ecuație de momente, deoarece celelalte două bare $3 - 5$ și $2 - 4$ se întîlnesc la infinit. Se folosește ecuația de proiecție pe normala comună a celor două bare paralele. În cazul de față se proiectează pe verticală (fig. 159, *b*):

$$-D_{3-4} \sin \varphi + T_I = 0, \quad \text{de unde} \quad D_{3-4} = \frac{T_I}{\sin \varphi}; \tag{4.5}$$

cu T_I s-a notat proiecția tuturor forțelor exterioare din stînga secțiunii $I - I$ pe direcția de proiecție, adică pe verticală, și este asemănătoare cu forța tăietoare în panoul $3 - 5$ de la o grindă simplu rezemată.

Pentru determinarea efortului în montantul $4 - 5$ (V_{4-5}) se face secțiunea $II - II$ și se scrie ecuația de proiecție pe verticală a forțelor care acționează pe partea din stînga (fig. 159, *c*);

$$V_{4-5} + T_{II} = 0, \quad \text{de unde:} \quad V_{4-5} = -T_{II}, \tag{4.6}$$

în care cu T_{II} s-a notat proiecția pe verticală a tuturor forțelor care acționează pe partea din stînga față de secțiunea $II - II$ (asemănător cu o forță tăietoare).

Toate barele grinzii cu zăbrele se încadrează în unul dintre cele patru tipuri de bare arătate, cu excepția barei $8 - 9$. Pentru aceeastă bară nu se poate face o secțiune care să taie grinda complet în două și să secționeze numai trei bare. Dar se poate face secțiunea $III - III$ care scoate din grindă un singur nod. Această secțiune se numește separarea nodului 9. Scriind echilibrul forțelor care acționează pe partea scoasă afară, de secțiunea $III - III$ (fig. 159, *d*), din proiecția pe verticală rezultă :

$$V_{9-8} + P_9 = 0, \text{ de unde}$$

$$V_{9-8} = - P_9. \qquad (4.7)$$

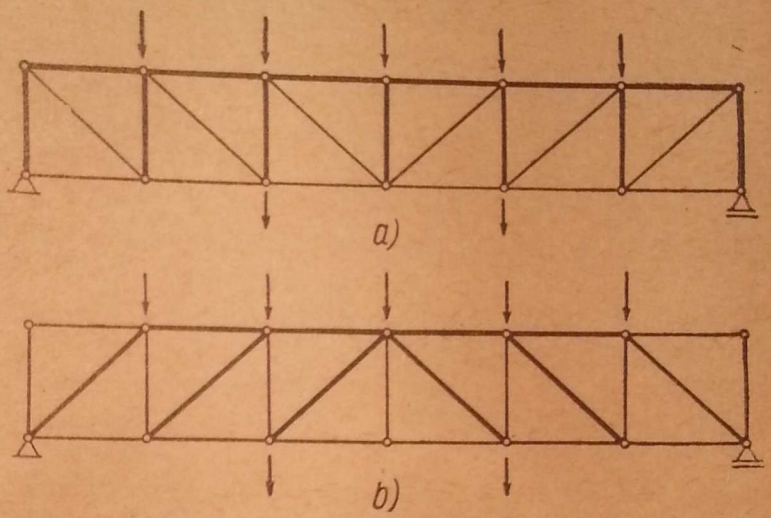


Fig. 160.

Rezultă că efortul în montantul $8 - 9$ nu depinde decît de sarcina care se aplică în nodul 9 și nu este influențat de orice altă sarcină de pe grindă. O astfel de bară cu efort numai dintr-o încărcare locală, independent de forma și de sarcinile de pe grindă, se numește bară suplimentară.

În concluzie, rezultă că pentru sarcini verticale de sus în jos, la grinda din fig. 160, *a* talpa inferioară este întinsă, talpa superioară — comprimată, diagonalele — întinse, iar montanții — comprimați (sarcina este presupusă simetrică față de mijlocul grinzii în concluzia de mai sus pentru diagonale și montanți).

Dacă însă diagonalele erau inversate în panou, adică în loc să fie descendente, erau ascendente către mijlocul grinzii (fig. 160, *b*), eforturile în tălpi aveau același semn ca în cazul fig. 160, *a*, dar semnele eforturilor în diagonale și montanți se schimbau : diagonalele erau comprimate, și montanții — întinși. În cele două fig. 160, *a* și *b*, sînt desenate gros barele comprimate, și subțire — cele întinse și fără eforturi.

Această problemă a semnului efortului în bare este foarte importantă pentru practică, deoarece compresiunea în bare necesită luarea în considerație a flambajului. De aceea, la construcțiile metalice cu bare subțiri, piesele lungi, adică diagonalele, se caută să fie întinse (fig. 160, *a*), pe cînd la alte construcții, ca cele de lemn cu tiranți metalici, se poate proceda ca în fig. 160, *b*, unde barele comprimate sînt de lemn, iar barele întinse, metalice.

2. **Grinzi cu tălpi poligonale.** În construcții sînt utilizate și grinzi cu zăbrele în care tălpile nu sînt paralele. De aceea, mai jos vor fi studiate eforturile care apar în barele unei grinzi cu un contur poligonal oarecare.

Secțiunea $I - I$ permite determinarea eforturilor în barele *24*, *34* și *35*. Se procedează ca în cazul precedent, adică se exprimă condițiile de echilibru ale părții din stînga secțiunii $I - I$ (fig. 161, *b*).

Pentru determinarea efortului I_{35} se scrie ecuația de momente în raport cu intersecția celorlalte două bare, adică față de nodul *4*:

$$-I_{35}\cdot h_4 + M_4 = 0, \quad \text{de unde} \quad I_{35} = \frac{M_4}{h_4}. \tag{4.8}$$

Pentru S_{24} se scrie ecuația de momente în raport cu nodul 3:

$$+S_{24}\cdot h_3 + M_3 = 0, \quad \text{de unde} \quad S_{24} = -\frac{M_3}{h_3}. \tag{4.9}$$

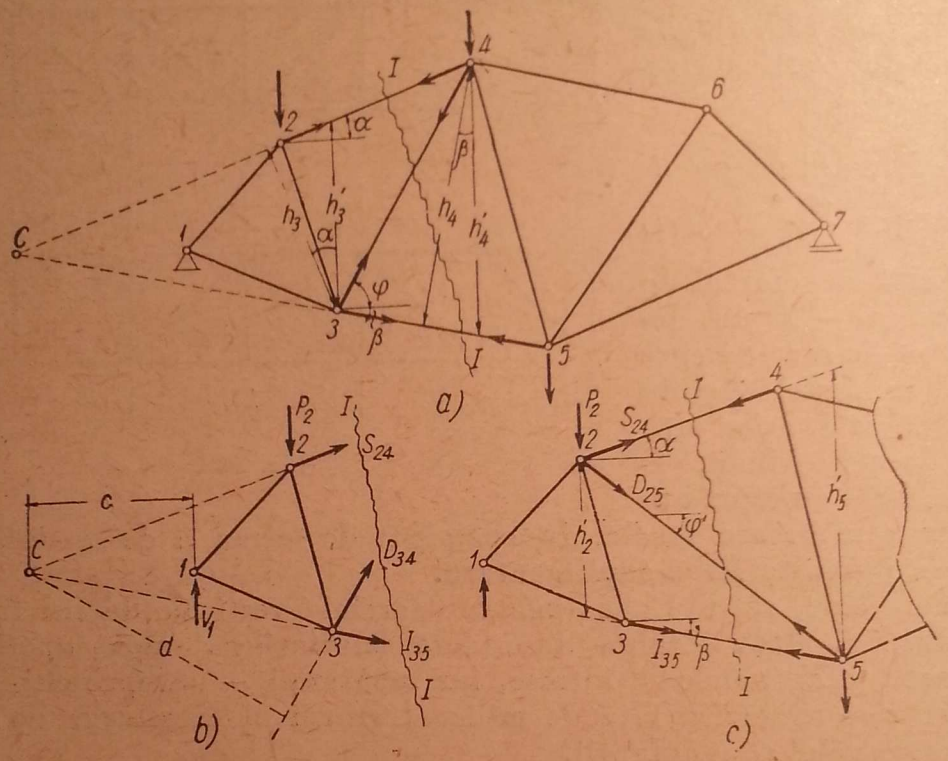


Fig. 161.

Dacă se notează cu h_3' verticala din *3* pînă la bara *24*, și cu α, înclinarea față de orizontală a barei *24*, rezultă:

$$h_3 = h_3' \cos\alpha \quad \text{și analog,}$$

$$h_4 = h_4' \cos\beta,$$

astfel încît relațiile (4.8) și (4.9) se pot scrie și sub forma:

$$I_{35} = \frac{M_4}{h_4' \cos\beta}; \tag{4.8'}$$

$$S_{24} = -\frac{M_3}{h_3' \cos\alpha}. \tag{4.9'}$$

Pentru determinarea efortului D_{34} în diagonala *34* se va lua ecuația de momente ale acelorași forțe din stînga secțiunii $I-I$, în raport

cu punctul C de intersecție al barelor 24 și 35, pentru a elimina eforturile lor din ecuația de momente, de unde rezultă :

$$-D_{34}\cdot d + M_C = 0, \quad \text{de unde} \quad D_{34} = +\frac{M_C}{d}. \tag{4.10}$$

În relațiile de mai sus M_3, M_4 și M_C reprezintă momentele tuturor forțelor exterioare (forțe date și reacțiuni) care se aplică pe partea din stînga secțiunii $I-I$ în raport cu punctele 3, 4 și C.

Punctele 3 și 4 fiind între reazeme, M_3 și M_4 sînt expresii asemănătoare momentelor încovoietoare de pe o grindă dreaptă și, deci, pentru sarcini obișnuite (verticale de sus în jos) M_3 și M_4 sînt pozitive, astfel încît, rezultă că I_{35} este pozitiv (întindere) și S_{24} este negativ (compresiune), adică talpa inferioară este întinsă, iar talpa superioară, comprimată. Din expresia (4.10) nu se pot trage tot atît de ușor concluzii asupra semnului efortului D_{34}, deoarece nu se poate anticipa semnul lui M_C, cînd C se găsește în afara grinzii.

Determinarea punctului C întîmpină uneori dificultăți, deoarece de multe ori iese din cadrul desenului, dar se pot face diferite considerente geometrice pentru a evalua distanțele d și c [1]).

Se pot folosi însă și alte relații pentru determinarea eforturilor în diagonale.

Dacă se proiectează toate forțele care acționează pe partea din stînga secțiunii $I-I$ pe verticală, se obține :

$$D_{34}\sin\varphi + S_{24}\sin\alpha - I_{35}\sin\beta + T_I = 0,$$

unde cu T_I s-a notat proiecția pe verticală a tuturor forțelor din stînga secțiunii $I-I$. Dacă se ține seamă de expresiile lui S_{24} și I_{35} din (4.8′) și (4.9′), rezultă :

$$D_{34}\sin\varphi = -T_I + \frac{M_4}{h_4'}\operatorname{tg}\beta + \frac{M_3}{h_3'}\operatorname{tg}\alpha. \tag{4.11}$$

În cazul particular al tălpilor paralele, $\alpha=\beta=0$ și $D_{34}\sin\varphi = -T_I$; rezultatul este identic cu cel din formula (4.5), dar pentru diagonală ascendentă spre mijlocul grinzii.

În cazul cînd sarcinile și reacțiunile sînt toate verticale, ecuația de proiecție pe orizontală a tuturor forțelor din stînga secțiunii $I-I$ duce la :

$$D_{34}\cos\varphi + S_{24}\cos\alpha + I_{35}\cos\beta = 0$$

și ținînd seamă de (4.8′) și (4.9′) :

$$D_{34}\cos\varphi = \frac{M_3}{h_3'} - \frac{M_4}{h_4'}. \tag{4.12}$$

Această relație este mai ușor de interpretat pentru semnul efortului din diagonală, deoarece M_3 și M_4 sînt pozitive în cazurile obișnuite. Din expresia (4.12) rezultă că semnul efortului D_{34} depinde atît de variația lui M în panou, cît și de variația lui h', adică de conturul grinzii.

---

[1]) A se vedea, de exemplu, *I. P. Prokofiev*, op. cit.

Dacă în locul diagonalei *34* ar fi fost diagonala *25* (fig. 161, c), ar fi rezultat expresia :

$$D_{25} \cos \varphi' = \frac{M_5}{h'_5} - \frac{M_2}{h'_2}. \qquad (4.12')$$

Relațiile (4.12) și (4.12′) se pot memora ușor astfel : primul termen (pozitiv) din membrul al doilea al expresiilor (4.12) și (4.12′) se referă la capătul de jos al diagonalei (nodul *3*, respectiv, nodul *5*), iar al doilea termen, ce se scade din primul, se referă la nodul de sus al diagonalei (nodul *4*, respectiv, *2*).

Toate operațiile efectuate pe partea din stînga secțiunii pot fi făcute, evident, și pe partea din dreapta, luînd în considerație eforturile și forțele exterioare de pe acea parte.

b) Soluția grafică

Aceasta constă în a exprima pe cale grafică că toate forțele care acționează pe partea din stînga secțiunii își fac echilibru. Pentru aceasta se determină rezultanta R a forțelor date și a reacțiunilor de pe partea stîngă

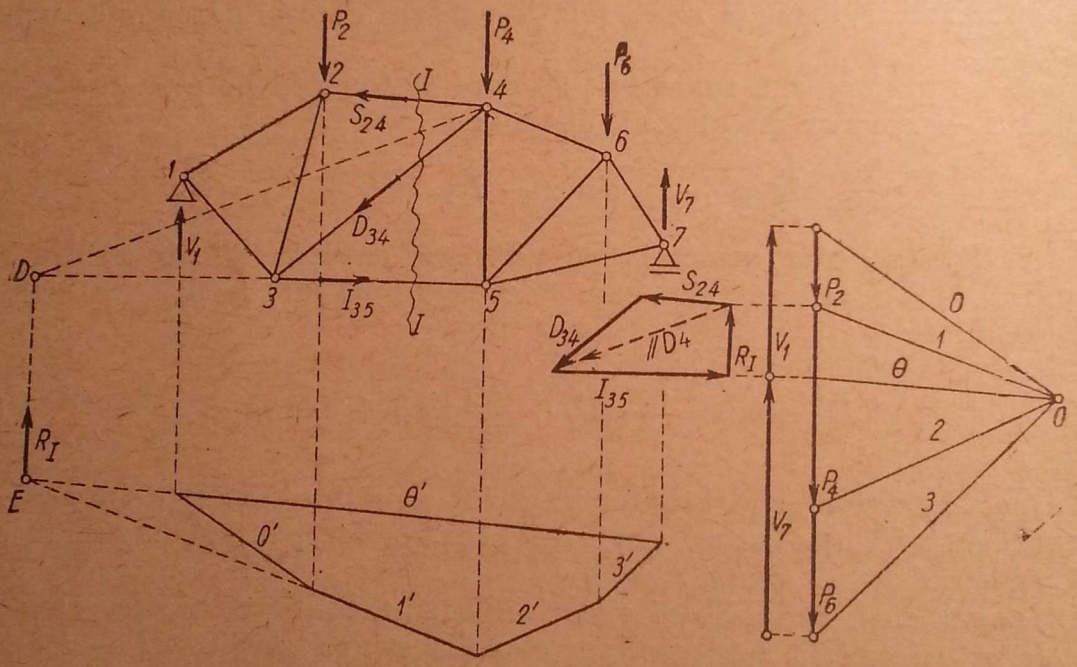


Fig. 162.

a secțiunii și se exprimă că această rezultantă este echilibrată de cele trei eforturi din barele secționate, ceea ce revine la a descompune o forță după trei direcții într-un plan.

În fig. 162 este redată această operație. Cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular se duce linia de închidere θ′, care determină reacțiunile V_1 și V_7. Apoi se face secțiunea $I - I$, care taie barele *24*, *34* și *35*. Grupul de forțe exterioare care acționează pe partea din stînga secțiunii $I - I$ este compus din V_1 și P_2. Sensul și mărimea rezultantei se găsesc în poligonul forțelor :

$$R_I = V_1 - P_2.$$

Poziția rezultantei se obține cu ajutorul poligonului funicular la intersecția primei și ultimei laturi de poligon, a grupului de forțe corespunzător, adică al lui V_1 și P_2; prima latură este $0'$ și ultima este latura $1'$, care se întîlnesc în E. Prin punctul E se duce paralela la R_I, și aceasta e linia de acțiune a lui R_I. Rezultanta R_I determinată în mărime, sens și poziție, trebuie descompusă (cu semn schimbat) după direcțiile celor trei bare secționate. Pentru aceasta se prelungește una dintre direcții, de exemplu direcția *35*, pînă întîlnește pe R_I în D, iar punctul D se unește cu punctul de intersecție al celorlalte două direcții (*24* și *34*), adică cu punctul *4*. Apoi se descompune R_I după direcțiile *35* și *D4*. Descompunerea este făcută pe poligonul forțelor, din extremitățile lui R_I fiind duse paralele la *35* și la *D4* (dreapta punctată). După aceasta, componenta după direcția *D4* se descompune după direcțiile *24* și *34* (descompunerea este făcută tot în figura alăturată). Pentru echilibru, noul poligon de forțe R_I, S_{24}, D_{34} și I_{35} trebuie să fie un poligon închis, ceea ce determină semnele eforturilor. În figură rezultă că I_{35} este întindere, iar S_{24} și D_{34}, compresiuni.

În general, metoda nu este practică, deoarece punctul E de intersecție al laturilor de poligon funicular este uneori depărtat și nu încape în cadrul desenului.

În cazul, însă, cînd în stînga secțiunii nu acționează nici o forță dată, ci numai reacțiunea, problema se simplifică, pentrucă rezultanta este chiar reacțiunea V_1 și nu necesită o construcție specială. Ar putea fi folosită această particularitate și în cazul general, despărțind forțele în două. Odată se consideră numai forțele de la dreapta secțiunii, și atunci operația se efectuează pe partea stîngă, unde rezultanta este chiar reacțiunea respectivă din *1*. Apoi, se consideră pe grindă numai forțele din stînga secțiunii și se face operația pe partea din dreapta, în care reacțiunea din *7* este chiar rezultanta din al doilea caz de încărcare. După aceasta se însumează rezultatele și se determină eforturile din încărcarea totală.

Sînt o serie de variante grafice pentru evitarea punctului E, cum este, de exemplu, înlocuirea rezultantei R_I prin două forțe cu poziții cunoscute, dar în practică nu se aplică metoda secțiunilor pe cale grafică, așa că ne rezumăm numai la aceste indicații.

B. METODA SEPARĂRII NODURILOR

a) Soluția analitică

Această metodă constă în a izola fiecare nod prin secționarea barelor care pleacă din nod și în a exprima că forțele din fiecare nod (forțele exterioare și eforturile din bare) alcătuiesc un sistem de forțe concurente în echilibru pentru care se pot scrie cîte două ecuații. Pe această cale, la o grindă cu n noduri, rezultă un sistem de $2n$ ecuații cu $2n$ necunoscute (eforturile din bare și reacțiunile : $2n = b + 3$).

Nu se aplică însă metoda sub această formă generală, deoarece ar conduce la un calcul foarte dificil.

Ecuațiile însă se simplifică în cazul cînd pot fi rezolvate pentru fiecare nod în parte, deci sisteme de numai cîte două ecuații. Pentru aceasta trebuie pornit de la un nod, unde sînt numai două necunoscute, și apoi, cu rezultatele obținute, trebuie să se găsească succesiv noduri cu cîte maximum două necunoscute. Chiar sub această formă, metoda separării nodurilor

se aplică rar sub formă analitică, deoarece barele avînd direcții diferite, ecuațiile analitice de proiecții sînt adeseori greoi de exprimat. Din această cauză se aplică pe cale grafică.

Pe cale analitică, metoda separării nodurilor se aplică curent în diferite cazuri particulare.

Cazul cel mai frecvent este cel în care efortul într-o bară se poate determina printr-o singură ecuație de proiecție. Aceasta se întîmplă cînd într-un nod se întîlnesc numai două bare (fig. 163, *a*), unde, prin separarea nodului *2*, rezultă numai necunoscutele N_{24} și N_{21} (fig. 163, *a'*). Prin ecuația de proiecție pe direcția $I - I$ perpendiculară pe bara *21* se găsește

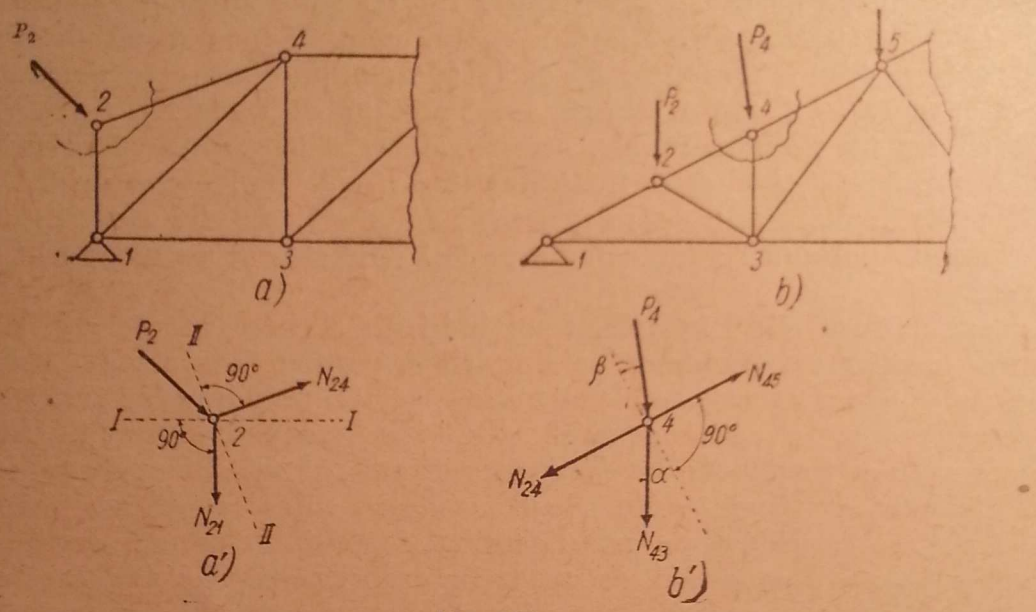


Fig. 163.

N_{24}, iar prin ecuația de proiecție pe $II - II$ perpendiculară pe bara *24*, se obține N_{21}.

Alt caz care a fost întîlnit și la formula (4.7) este cel al unui nod unde se întîlnesc trei bare, dintre care două au aceeași direcție (fig. 163, *b*, nodul *4*). Izolînd nodul *4* (fig. 163, *b'*) și scriind ecuația de proiecție pe perpendiculara la direcția comună a celor două bare în prelungire, se obține expresia efortului din bara *43*:

$$N_{43} \cos \alpha + P_4 \cos \beta = 0.$$

Evident, nu se pot determina eforturile în celelalte două bare numai prin separarea nodului, deoarece a rămas la dispoziție o singură ecuație.

Alteori se folosește metoda separării nodurilor combinată cu metoda secțiunilor pentru a găsi eforturile acolo unde fiecare în parte nu conduce repede la rezultat. În fig. 164 este reprezentată o grindă cu diagonale în K. Pentru determinarea eforturilor în barele *69*, *59*, *57* și *47*, secțiunea $I - I$ taie patru bare (fig. 164, *b*), deci nu va fi suficientă.

Se face întîi o secțiune $II - II$ care, de asemenea, taie patru bare, dar două au aceeași linie de acțiune (fig. 164, *c*). Luînd momentele în raport cu nodurile *4* și *6*, se obține:

$$S_{69} = -\frac{M_4}{h} \quad \text{și} \quad I_{47} = \frac{M_6}{h}.$$

Se face apoi separarea nodului 5 (fig. 164, *d*). Prin ecuația de proiecție pe orizontală se găsește :

$$D_{59} \cos \varphi + D_{57} \cos \varphi = 0, \text{ deci } D_{59} = - D_{57}.$$

Revenind la secțiunea $I - I$ (fig. 164, *b*) și proiectînd pe verticală, rezultă :

$$D_{59} \sin \varphi - D_{57} \sin \varphi + T_I = 0$$

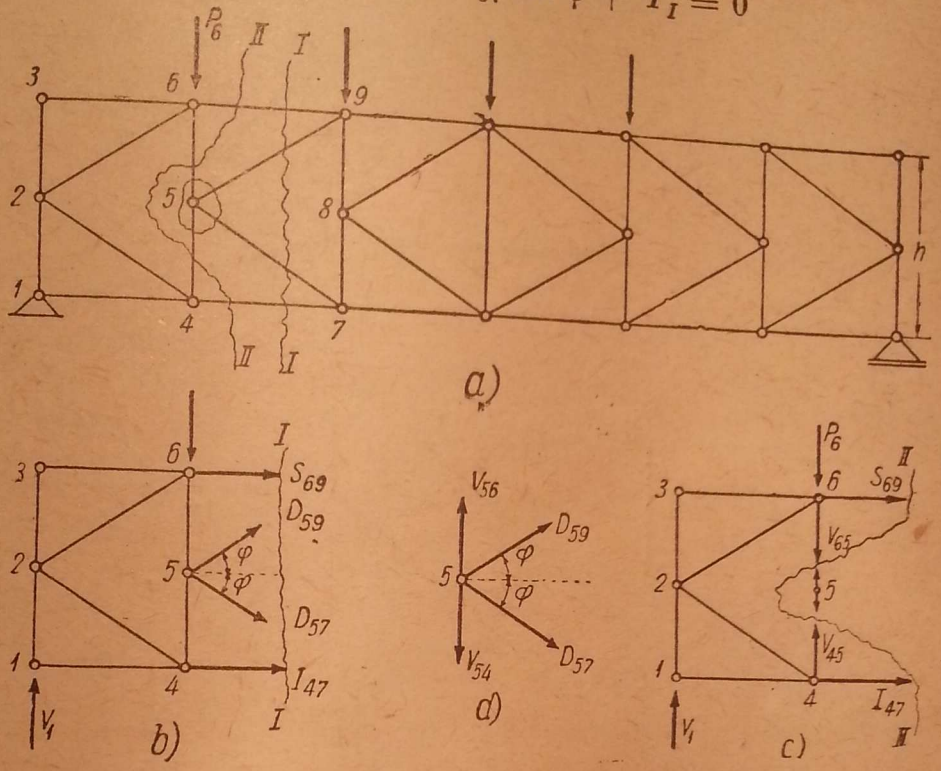


Fig. 164.

sau, în baza celor de mai sus :

$$D_{59} = - \frac{T_I}{2 \sin \varphi} \tag{4.13}$$

și, respectiv,

$$D_{57} = - D_{59} = + \frac{T_I}{2 \sin \varphi}. \tag{4.13'}$$

În aceste cazuri se aplică în practică metoda separării nodurilor pe cale analitică.

Metoda separării nodurilor nu este altceva decît un caz particular al metodei secțiunilor în care partea izolată prin secționare are un singur nod, deci un sistem de forțe concurente, cu două ecuații de echilibru.

b) Soluția grafică

Metoda separării nodurilor pe cale grafică rezolvă grafic sistemul celor două ecuații din fiecare nod. Pentru aceasta trebuie să se găsească întîi un nod cu numai două necunoscute. Rezultanta forțelor exterioare din acel

nod se descompune după direcția celor două bare cu eforturi necunoscute. Astfel, se obțin eforturile în primele două bare. Apoi se caută un alt nod, unde, ținînd seamă de eforturile cunoscute de la nodul precedent, să apară

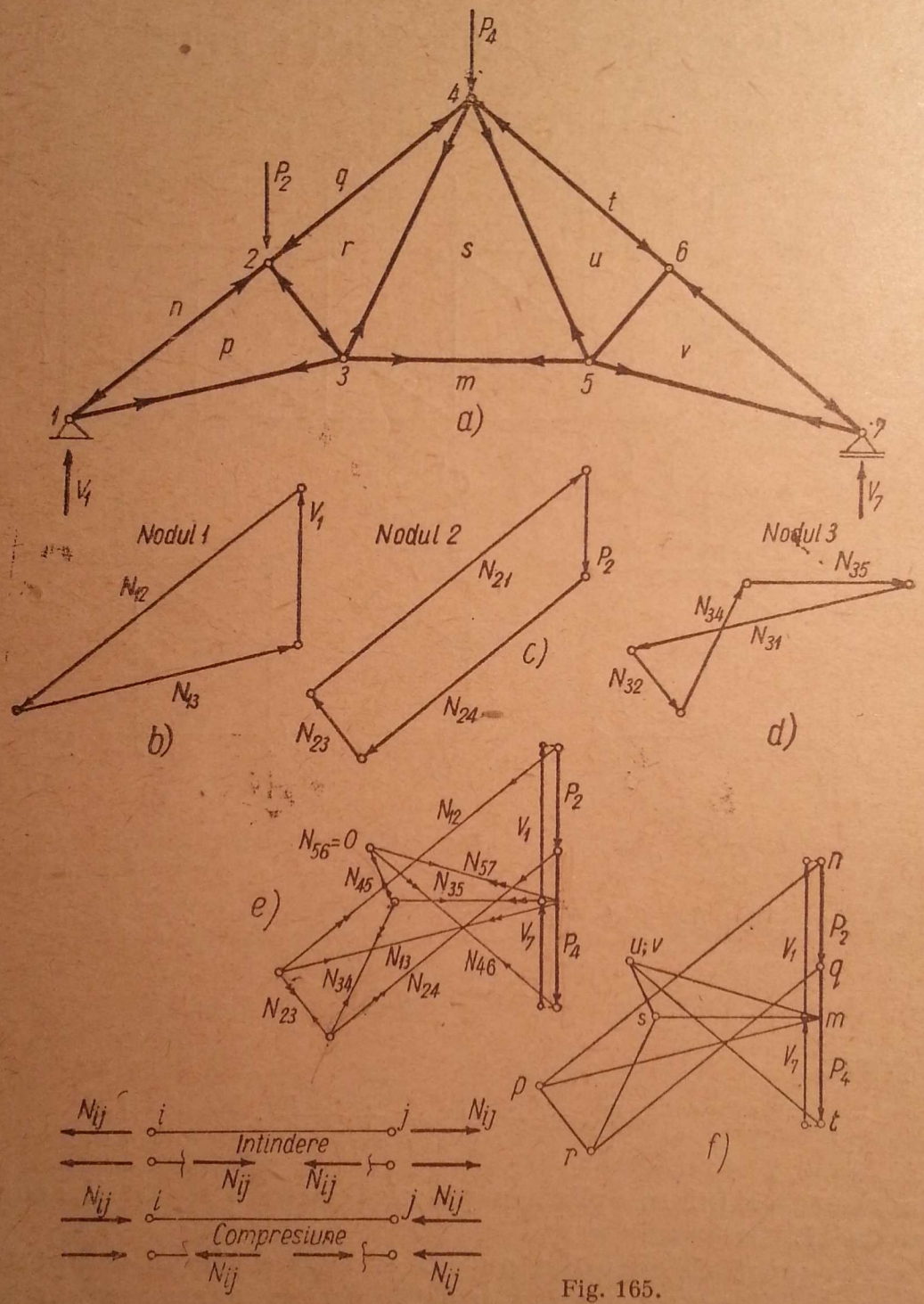


Fig. 165.

iarăși numai două necunoscute, și se repetă operația de descompunere așa mai departe, din nod în nod, pînă se determină toate eforturile.

Fig. 165, *a* reprezintă un caz în care metoda separării nodurilor pe cale grafică se aplică ușor. Pentru a avea un nod cu numai două necunoscute se determină întîi reacțiunile V_1 și V_7 pe cale grafică sau pe cale analitică, ca la o grindă simplu rezemată, deoarece ferma este un solid geometric nedeformabil. (Determinarea reacțiunilor nu e arătată în figură).

V_1 fiind cunoscut, se reprezintă grafic echilibrul nodului *1* sub acțiunea forțelor V_1, N_{12} și N_{13}. Se construiește deci triunghiul forțelor din fig. 165, *b*, iar semnele lui N_{12} și N_{13} sînt determinate din condiția de închidere a triunghiului forțelor. Au fost determinate astfel eforturile în nodul *1*. Efortul N_{12} în nodul *1* apasă pe nod, deci este compresiune, pe cînd N_{13} trage de nod, deci este întindere. Se pun săgețile respective în fig. 165, *a*.

Totodată efortul de compresiune din bara *12* apasă și în nodul *2*, iar cel de întindere din bare *13* trage și de nodul *3* și se pun săgețile corespunzătoare în nodurile *2* și *3*.

Acum se poate trece la echilibrul nodului *2*, deoarece ținînd seamă că N_{12} este cunoscut, rămîn necunoscute numai N_{24} și N_{23}.

În fig. 165, *c* este arătat poligonul închis al forțelor din nodul *2*. S-au determinat astfel și eforturile în bara *24* (compresiune) și *23* (compresiune). Se pun săgețile respective în nodul *2* și în nodurile *4* și *3*.

Acum se poate trece la nodul *3* unde N_{13} și N_{23} sînt cunoscute, iar necunoscute sînt N_{35} și N_{34}. Poligonul închis al forțelor din condiția de echilibru a nodului *3* este reprezentat în fig. 165, *d*, de unde rezultă eforturile N_{35} și N_{34}, ambele întinderi. Acum se poate trece la nodul *4*, apoi la nodurile *5*, *6* și *7*, construindu-se pentru fiecare nod cîte un poligon închis de forțe.

Se observă că fiecare efort apare în două poligoane, deoarece fiecare bară este legată de două noduri.

Aceasta îngăduie ca toate poligoanele corespunzătoare fiecărui nod să se așeze unul lîngă altul, astfel încît, în loc să se deseneze de două ori fiecare efort, să se deseneze o singură dată, dar să se parcurgă de două ori în sensuri diferite, corespunzînd celor două noduri pe care le leagă.

Rezultă construcția din fig. 165, *e*, în modul următor:

Se construiește întîi poligonul forțelor P_2, P_4, și apoi, se determină reacțiunile V_1 și V_7 de obicei pe cale grafică, care se așază tot pe poligonul forțelor P_2, P_4. Poligonul P_2, P_4, V_1, V_7 este închis.

Se pornește de la nodul *1* desenînd direcțiile în ordinea în care le întîlnim înconjurînd nodul în sensul acelor unui ceasornic. Rezultanta forțelor exterioare în nodul *1* este V_1, iar prima direcție pe care o întîlnim în sens orar este *12*, deci prin extremitatea lui V_1 se duce paralela la *12*, iar prin originea lui V_1 se duce paralela la *13*. Astfel au fost determinate N_{12} și N_{13} cu semnele respective. Se trece acum la nodul *2*. Prima forță cunoscută înconjurînd nodul în sens orar este N_{12}, parcursă acum în sens invers, de aceea se înseamnă cu două săgeți în acest sens nou de parcurgere. A doua forță întîlnită este P_2. Se observă că ea este așezată de la sine în extremitatea lui N_{12}. A treia direcție întîlnită în sens orar este *24*, deci din extremitatea lui P_2 se duce paralela la *24*, și ultima direcție se duce din originea poligonului, adică din originea lui N_{12} paralelă cu *23*. Parcurgînd în același sens N_{12}, P_2, N_{24} și N_{23}, se determină și semnele eforturilor N_{24} și N_{23}. Se trece apoi la nodul *4*, și așa mai departe.

Pentru urmărirea lesnicioasă a epurei, se obișnuiește o notație specială, care provine din observația că fiecărui nod de pe fermă îi corespunde un poligon închis pe epura eforturilor, iar fiecărui poligon închis de pe fermă îi corespunde un punct de intersecție al laturilor respective în epură. Pentru aceasta se consideră că atît barele, cît și forțele date și reacțiunile de pe fermă sînt laturi de poligoane, iar regiunile dintre forțele parale-lele se consideră închise la infinit. Astfel de figuri se numesc reciproce, de aceea și metoda se mai numește metoda poligoanelor reciproce.

Se notează intervalele de pe fermă cu literele m, n, p, q, r, s, t, u și v. În epura eforturilor (fig. 165 f) aceste litere apar în vîrfurile poligoanelor de forțe. Orice efort sau forță din epură este notată cu literele de la capete, iar pe fermă, bara sau forța respectivă se găsește între aceste litere. De exemplu, N_{12} se va numi acum np, deoarece pe fermă se găsește între n și p, iar în epură n și p sînt capetele efortului N_{12}; la fel, P_2 este nq.

Pentru ca epura să meargă corect este necesar ca direcțiile în epură să fie duse în ordinea în care se întîlnesc în fiecare nod al fermei, în sensul acelor unui ceasornic. Astfel, în nodul *2* efortul *23* se citește *rp* și are sensul de la *r* spre *p*, iar în nodul *3* se citește *pr* și are sensul de la *p* spre *r*. Construind epura pînă la capăt, se observă că atunci cînd ajungem în ultimele două noduri *6* și *7* nu mai avem cîte două necunoscute, ci într-un nod, o singură necunoscută, iar în celălalt, nici una. Acest lucru constituie deci un mijloc de control al construcției grafice, deoarece poligoanele ultimelor noduri trebuie să se închidă de la sine. Dacă aceasta nu se întîmplă, înseamnă că s-au produs erori pe drum, și construcția trebuie reluată pînă cînd poligonul se închide.

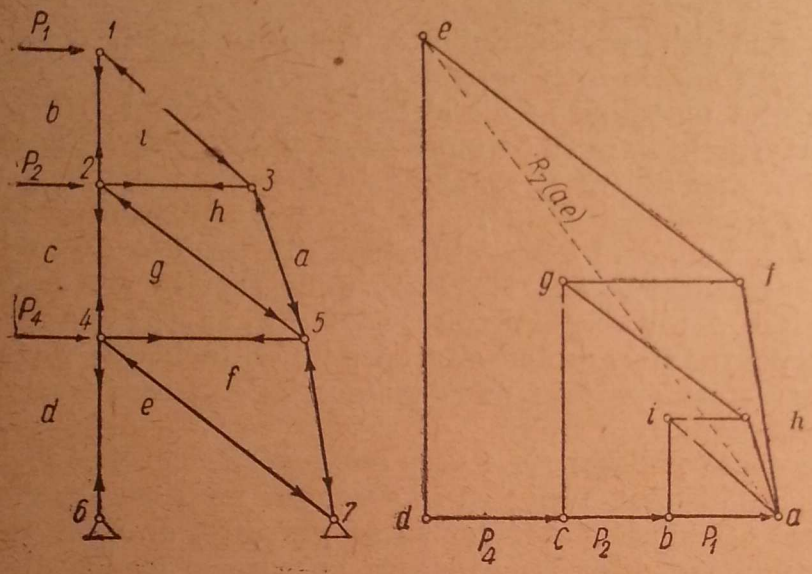


Fig. 166.

Aceste posibilități de verificare provin din faptul că au fost determinate reacțiunile V_1 și V_7 pe altă cale și au fost folosite în construcție, deci rămîn ecuații de echilibru al nodurilor, care pot servi la verificare.

Dacă însă se determină eforturile numai din echilibrul nodurilor fără să se folosească vreo relație suplimentară, adică dacă nu este necesar să se determine reacțiunile în prealabil, atunci nu apare verificarea de mai sus. Astfel, în exemplul din fig. 166 se poate începe epura de sus (nodul *1*) și se continuă pînă la sfîrșit (nodul *7*), fără să fie nevoie de determinarea reacțiunilor. În acest caz nu rezultă verificări din epură și trebuie căutate pe altă cale, de exemplu prin calculul reacțiunilor din echilibrul general și compararea lor cu rezultatele din epură.

În fig. 166 sînt scrise în schema grinzii cu zăbrele literele corespunzătoare intervalelor.

Se pun forțele *dc*, *cb* și *ba* în ordinea *d*, *c*, *b*, *a* în epură. Se exprimă echilibrul nodului *1* în sens orar: *ba*, *ai*, *ib*. Acesta este chiar sensul eforturilor în nodul *1*. De la *a* spre *i*, adică apasă pe nodul *1* (compresiune), de la *i* spre *b*, adică trage de nodul *1* (întindere). Se trece acum la nodul *3*. Parcurgerea în sens orar este *ia*, *ah*, *hi* și sensul respectiv. În nodul *2*, parcurgerea este: *cb*, *bi*, *ih*, *hg* și *gc*. Apoi în nodul *5* în ordinea: *gh*, *ha*, *af*, *fg*, și în nodul *4* în ordinea: *dc*, *cg*, *gf*, *fe*, *ed*. În felul acesta au fost determinate toate eforturile în bare. Reacțiunile se pot găsi astfel:

în 6 reacțiunea este chiar efortul *de*, iar în 7, rezultanta lui *ef*, și *fa* care se găsește direct în epură dacă unim *a* cu *e* și este chiar *ae*.

Pentru verificarea rezultatelor, trebuie să se calculeze grafic sau analitic reacțiunile din echilibrul general al construcției și să se compare cu cele din epură.

Prin notarea intervalelor cu litere pe grinda cu zăbrele, semnele eforturilor în epură sînt determinate fără nici un dubiu. De aceea nu mai trebuie desenate săgeți în epura eforturilor.

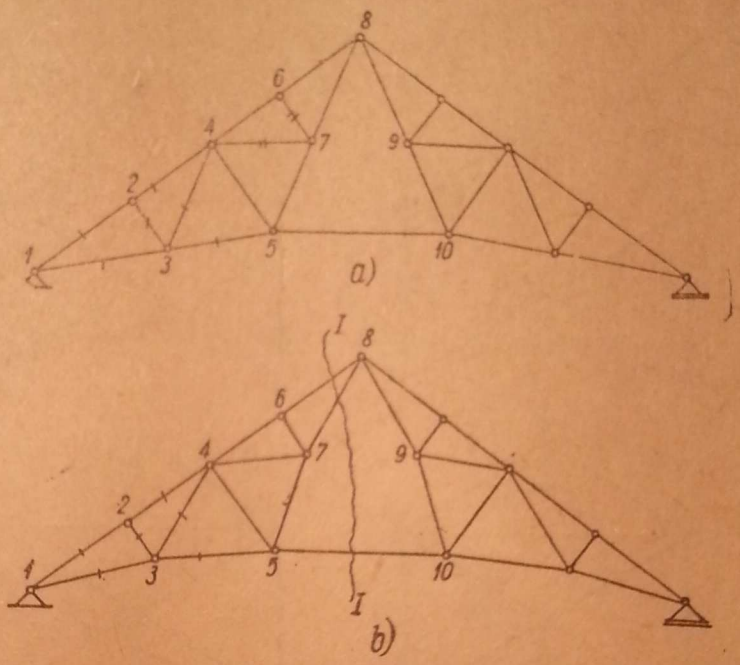


Fig. 167.

Uneori se poate ajunge la situația că nici un nod apropiat nu are numai două necunoscute. În acest caz se caută un alt nod de unde se poate face descompunerea spre a ajuta continuarea epurei. Astfel, în cazul din fig. 167, *a*, după determinarea reacțiunilor se poate merge în succesiunea următoare a nodurilor : *1*, *2*, *3* și apoi nu se poate trece nici la *4* nici la *5*, deoarece întîlnim cîte trei bare cu eforturi necunoscute. Atunci se poate începe din *6*, unde deși sînt trei bare, două sînt în prelungire, astfel că se poate afla *6 — 7* ; apoi se trece în *7* unde cu *6 — 7* cunoscută se determină *4 — 7* și astfel am ajuns în nodul *4*, unde acum sînt numai două necunoscute, *4 — 6* și *4 — 5*, și putem relua continuarea epurei.

Alteori nu se poate aplica acest procedeu. De exemplu, în fig. 167, *b*, în care barele *5 — 7* și *7 — 8* nu sînt în prelungire, efortul *6 — 7* nu mai poate servi la determinarea lui *4 — 7*. În acest caz se folosește în mod ajutător metoda secțiunilor, făcînd o secțiune *I — I* care determină efortul în bara *5 — 10* și se poate continua epura începută de la nodul *1* prin nodul *5*.

Această construcție grafică a determinării eforturilor prin poligoane reciproce este cunoscută în literatura tehnică sub numele de epura Maxwell—Cremona.

C. METODA ÎNLOCUIRII BARELOR

Prin metodele separării nodurilor și a secțiunilor se rezolvă toate sistemele simple de grinzi cu zăbrele, cum și sistemele compuse.

Sînt unele sisteme complexe în care nu există nici un nod cu numai două necunoscute, și nici o secțiune care să taie numai trei bare neconcurente. De asemenea, nici nu se pot descompune în sisteme simple la care să se aplice metodele analizate. În acest caz s-ar părea că trebuie folosit sistemul celor $2n$ ecuații cu $2n$ necunoscute, care nu constituie o cale practică de rezolvare.

Sînt însă metode care evită rezolvarea celor $2n$ ecuații chiar în cazurile acestea, și cea mai cunoscută este metoda înlocuirii barelor (fig. 168, *a*).

Deoarece nu se pot aplica metodele curente (secțiuni și separări de noduri), se scoate o bară din sistem, de exemplu bara $3-6$, în care se notează cu X efortul necunoscut. Sistemul a devenit un mecanism și trebuie să se introducă o altă bară pentru a-l face geometric nedeformabil. Această bară se așază însă astfel, încît noul sistem să poată fi rezolvat prin separări de noduri, sau secțiuni. Deci se scoate bara $3-6$ a sistemului inițial din fig. 168, *a*, care va fi numit *sistem primitiv*, și se pune în loc bara $2-4$ din fig. 168, *b*, alcătuind o grindă nouă, numită *sistem de bază* al sistemului primitiv. Noul sistem se rezolvă cu ușurință pentru orice încărcări prin separarea nodurilor. Pentru încărcarea dată se determină eforturile în *3* și *6*, apoi, cu ajutorul reacțiunilor, se trece în nodurile *1* și *5* și, în sfîrșit, la nodurile *2* și *4* (fig. 168, *c*). Într-o bară oarecare *ij* se notează efortul corespunzător $N_{ij,0}$. Apoi se descarcă sistemul de bază din fig. 168, *b*, de sarcinile date și se supune la două forțe X egale și de sens contrar, aplicate în cele două noduri *3* și *6* ale barei suprimate, după direcția $3-6$, și se determină eforturile din această încărcare. În loc să se încarce însă cu X, care este o necunoscută, se va încărca cu o pereche de forțe $X = 1$ (fig. 168, *d*). Efortul dintr-o bară oarecare *ij*, din încărcarea cu forțele $X = 1$ după direcția *36*, se notează $n_{ij,36}$.

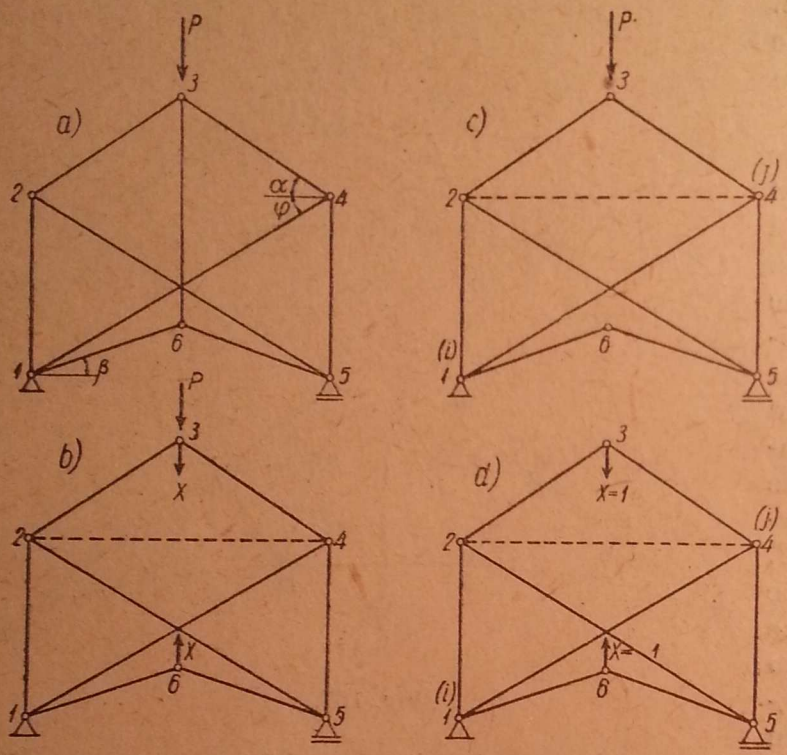


Fig 168.

Dacă în loc de perechea de sarcini unitare, vor acționa forțele X, efortul în bara *ij* va fi:

$$X \cdot n_{ij,36}$$

Din suprapunerea pe sistemul de bază a celor două încărcări efortul în bara *ij* va fi:

$$N_{ij} = N_{ij,0} + X \cdot n_{ij,36} \qquad (4.14)$$

Pentru ca sistemul de bază să se comporte la fel ca sistemul primitiv, efortul în bara *24* introdusă trebuie să fie nul. Deci,

$$N_{24} = N_{24,0} + X \cdot n_{24,36} = 0 \qquad (4.15)$$

aceasta este chiar condiția de determinare a lui X:

$$X = -\frac{N_{24,0}}{n_{24,36}}. \qquad (4.\ 15')$$

Valoarea efortului în bara *36* a sistemului primitiv este X, iar în orice altă bară este dat de relația (4.14).

Dacă prin înlocuirea unei singure bare nu se poate ajunge la o soluție convenabilă pentru sistemul de bază, se scot două bare, *15* și *37* (fig. 168 A, *a*) și se înlocuiesc cu barele *39* și *58*, necunoscutele după direcțiile *15* și *37*

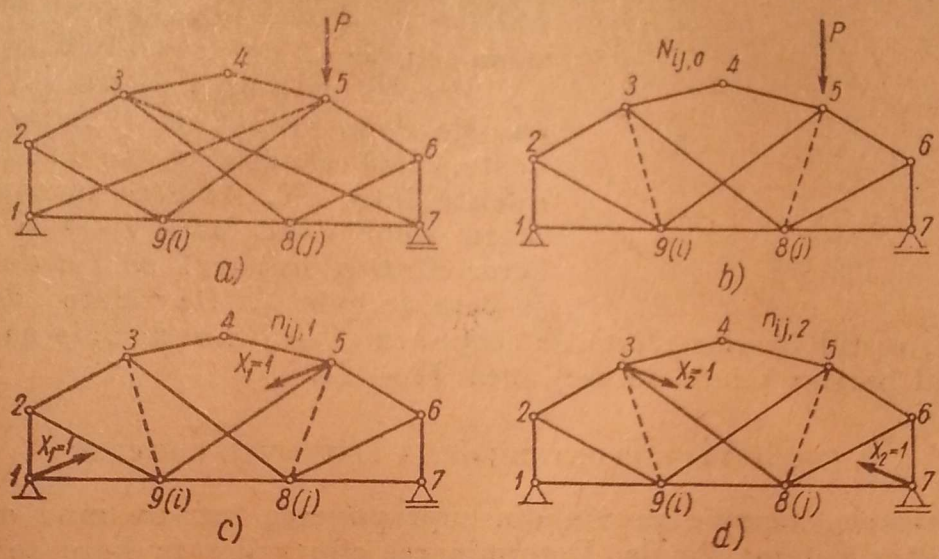


Fig. 168 A.

fiind X_1 și X_2. Sistemul de bază se încarcă de trei ori: odată cu sarcinile date (fig. 168 A, *b*) care dau într-o bară oarecare *ij* efortul $N_{ij,0}$, a doua oară — cu $X_1 = 1$, (fig. 168 A, *c*) care va da efortul $n_{ij,1}$, și a treia oară — cu $X_2 = 1$, (fig. 168 A, *d*) care va da efortul $n_{ij,2}$ în aceeași bară *ij*.

Efortul total în bara *ij* a sistemului de bază sub încărcarea dată, X_1 și X_2, va fi:

$$N_{ij} = N_{ij,0} + X_1 \cdot n_{ij,1} + X_2 \cdot n_{ij,2}. \qquad (\alpha)$$

Sistemul de bază va coincide cu sistemul primitiv, cînd eforturile în barele introduse vor fi nule:

$$N_{39} = N_{39,0} + X_1 \cdot n_{39,1} + X_2 \cdot n_{39,2} = 0;$$
$$N_{58} = N_{58,0} + X_1 \cdot n_{58,1} + X_2 \cdot n_{58,2} = 0. \qquad (\beta)$$

Relațiile (β) alcătuiesc un sistem de două ecuații care determină pe X_1 și X_2. Acestea, introduse în formula (α), determină efortul în orice bară a grinzii primitive.

D. METODA CELOR DOUĂ SECȚIUNI [1])

O metodă care, deseori, conduce la rezultate mai repede decît metoda înlocuirii barelor la grinzile cu zăbrele complexe este metoda celor două secțiuni exemplificată în fig. 169.

[1]) Metoda a fost propusă de S. A. Țaplin în 1933.

Ea constă în determinarea eforturilor în două bare prin rezolvarea a două ecuații cu două necunoscute, obținute prin două secționări diferite ale grinzii cu zăbrele. Astfel, în fig. 169, pentru determinarea eforturilor N_{14} și N_{25} se utilizează întîi secțiunea $I - I$ care taie patru bare și se ia ecuația de momente în raport cu punctul A de intersecție al barelor $2-3$ și $1-6$. Se obține o primă ecuație ce conține numai necunoscutele N_{14} și N_{25}. Apoi se folosește secțiunea $II - II$ care taie de asemenea patru bare și se iau momentele față de punctul B de intersecție al barelor $3-4$ și $5-6$. Se obține astfel a doua ecuație cu necunoscutele N_{14} și N_{25}.

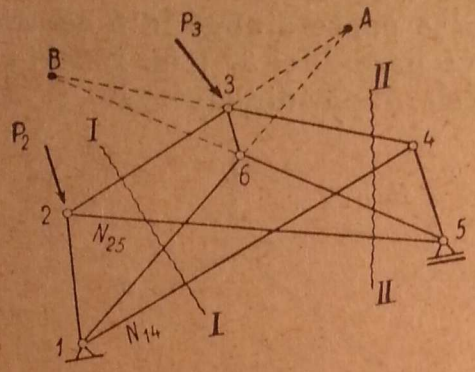


Fig. 169.

Pentru rezolvarea sistemului e necesar ca cele două ecuații să fie liniar independente, adică cele două secțiuni să fie efectiv diferite între ele. Aceasta înseamnă că în afara celor două bare $1-4$ și $2-5$, ale căror eforturi urmează să fie determinate și care trebuie să fie tăiate de ambele secțiuni, restul barelor tăiate de secțiunea $I - I$ *nu* trebuie să coincidă cu restul barelor tăiate de secțiunea $II - II$.

E. CALCULUL EFORTURILOR ÎN SISTEMELE COMPUSE

Sistemele compuse provin din suprapunerea într-un mod oarecare a mai multor sisteme simple. Determinarea eforturilor în bare se face prin descompunerea sistemelor compuse în sistemele simple din care sînt alcătuite.

Sistemele compuse se pot obține în diferite feluri :

a) Prin legarea între ele a două sau mai multe sisteme simple. Astfel, grinda din fig. 170, *a* pare complicată la prima vedere, dar dacă se examinează cu atenție, se constată că este compusă din două sisteme simple (*1*, *5*, *6*, *7*, *1*) și (*8*, *2*, *3*, *4*, *8*), legate prin trei bare *12*, *45* și *78*, deci alcătuiește un sistem geometric nedeformabil.

Dacă presupunem cele două sisteme simple în două plane paralele foarte apropiate și dacă se face secțiunea cu un plan printre ele, se observă că această secțiune taie numai trei bare : *45*, *78* și *12*, ale căror eforturi se pot deci determina prin metoda secțiunilor. Apoi se separă unul dintre corpuri (fig. 170, *b*), care este supus unui sistem de forțe date (P_5 P_6, P_7) și unui sistem de forțe de legătură cunoscute (V_1, N_{12}, N_{45} și N_{78}) în echilibru, ceea ce permite determinarea cu ușurință a eforturilor în bare.

b) Sistemele compuse se pot obține și prin înlocuirea unor bare importante cu cîte o grindă cu zăbrele (fig. 171, *a*). Nu se poate aplica direct metoda secțiunilor sau separarea nodurilor, dar se observă că atît timp cît între nodurile principale *1*, *2*, *3*, *4*, *5* nu sînt încărcări, o grindă cu zăbrele ca *23* se poate înlocui de fapt cu o bară după axa *23* în sistemul general. Se determină eforturile, între care și efortul fictiv N_{23}, și apoi grinda cu zăbrele *23* se rezolvă separat (fig. 171, *b*).

c) Cazul întîlnit mai des este cel în care peste barele unui sistem fundamental se suprapun sisteme de grinzi suplimentare (fig. 172, *a* și *b*), ale căror reazeme coincid cu nodurile sistemului fundamental.

Pentru unele bare, se poate aplica direct metoda secțiunilor și a separării nodurilor, cum este cazul din fig. 172, *b*, cu secțiunea *I — I*. O

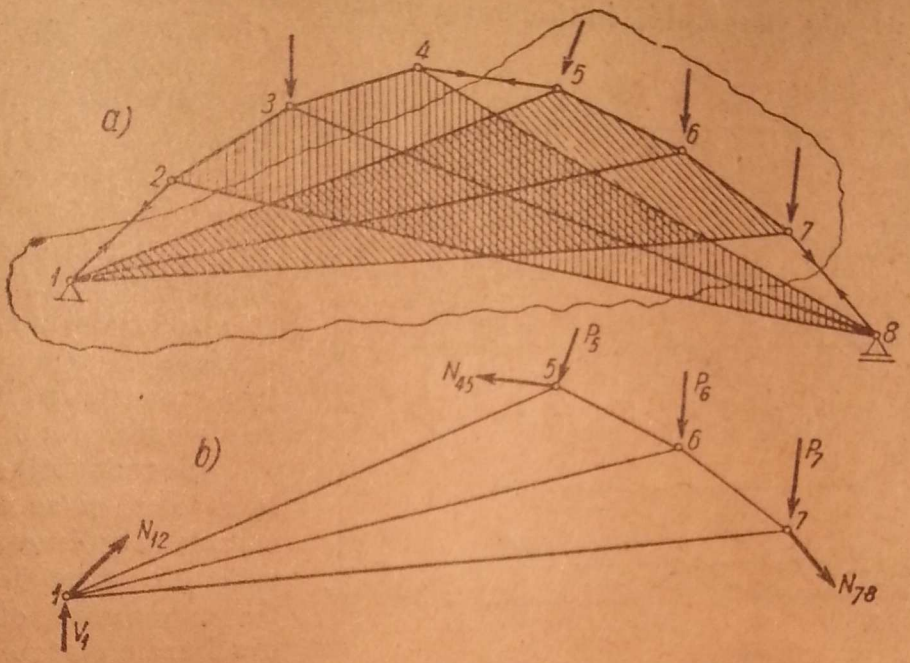


Fig. 170.

metodă practică însă pentru aceste sisteme constă în a le descompune în sisteme simple și, în acest caz, problema cea mai importantă este să se descompună

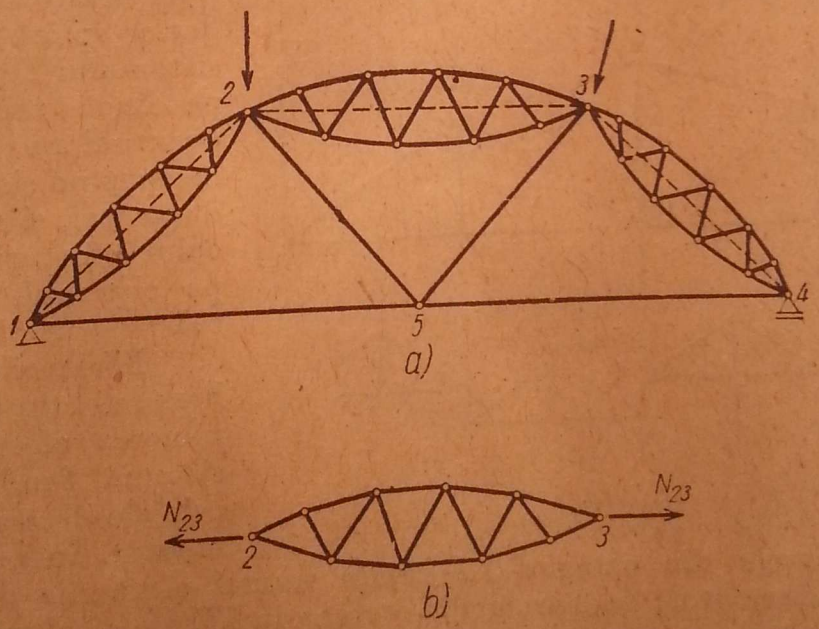


Fig. 171.

corect în sisteme *fundamentale* și în sisteme *suplimentare*, care să fie ele însele grinzi cu zăbrele corecte, cu reazeme numai în dreptul nodurilor sistemului fundamental, cum se arată în fig. 172, *a*, *a'*, *a''* și 172, *b*, *b'*, *b''*.

Barele sistemului compus sînt de trei categorii :

I) bare ale sistemului fundamental peste care nu se suprapun bare ale sistemului suplimentar ;

II) bare ale sistemului fundanental peste care se suprapun bare ale sistemului suplimentar ;

III) bare ale sistemului suplimentar, care nu se suprapun peste barele sistemului fundamental.

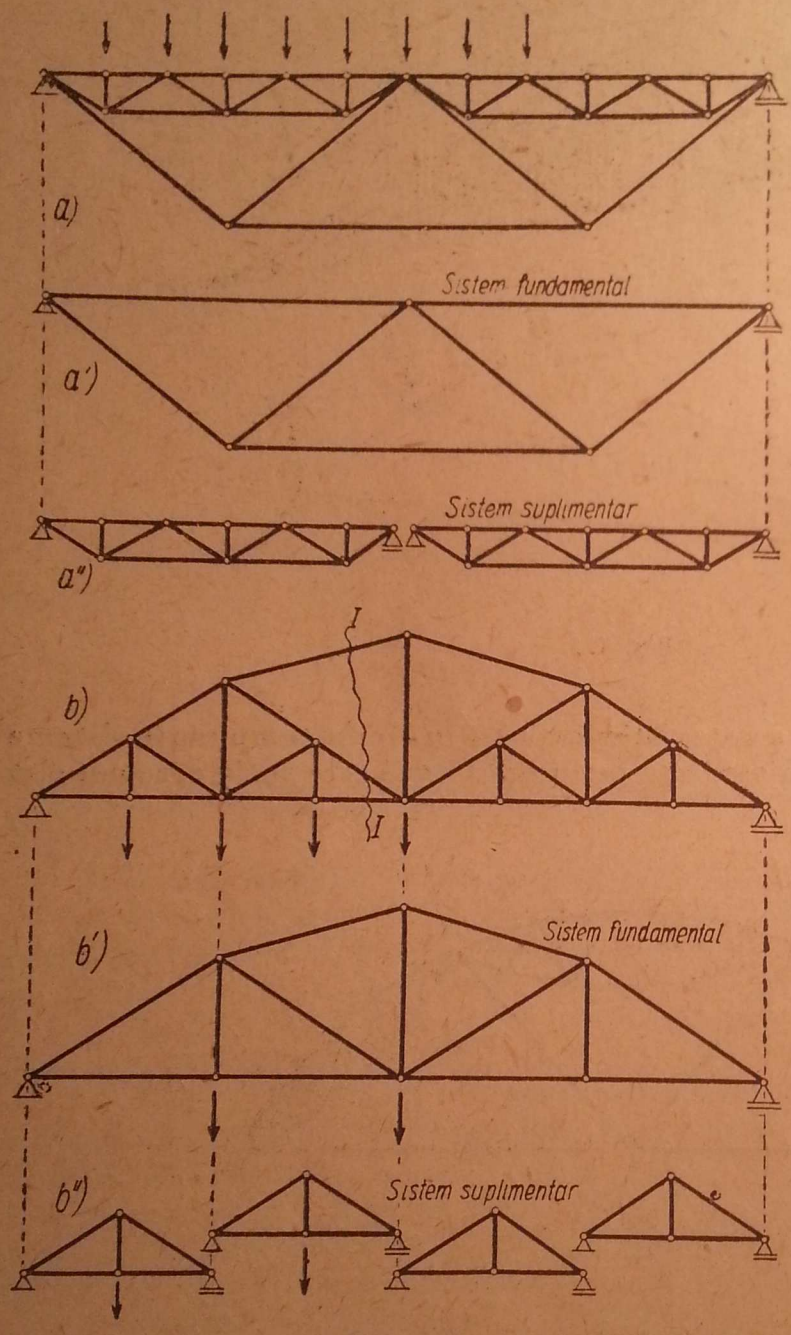


Fig. 172.

Calculul acestor sisteme compuse, cînd pot fi corect descompuse în sisteme fundamentale și în sisteme suplimentare, se poate face astfel :

Se transmit sarcinile la noduri și se scot sistemele suplimentare cu sarcinile care le revin. Se calculează eforturile din barele sistemului suplimentar ale căror reazeme se găsesc de fapt în nodurile sistemului fundamental. Apoi, reacțiunile sistemelor suplimentare cu sens schimbat se aplică în nodurile sistemului fundamental, pe lîngă sarcinile care eventual au rămas de la început pe sistemul fundamental, și se face calculul eforturilor numai pe sistemul fundamental.

Eforturile finale în bare se obțin prin suprapunerea eforturilor din sistemul fundamental cu cele ale sistemului suplimentar. În acest caz rezultă că la barele din categoria I rămîn numai eforturile din calculul sistemului fundamental ; la barele din categoria II, la eforturile din sistemul fundamental se adună cele din sistemul suplimentar, iar la barele din categoria III rămîn numai eforturile din sistemul suplimentar.

Exemplul din fig. 173 arată cum se conduc operațiile. Sarcina uniform repartizată de pe talpa inferioară a grinzii din fig. 173, *a* se repartizează prin lonjeroane și antretoaze la noduri, cum se arată în figură. În dreptul fiecărui nod al tălpii inferioare vom avea $P=4\,pa$, în locul sarcinii uniform repartizate.

Sistemul compus din fig. 173, *a* se descompune în sistemul fundamental din fig. 173, *b*, și în sistemele suplimentare din fig. 173, *c*.

Sarcinile din noduri se repartizează astfel : cele din nodurile 3, 7, *11*, *15* se aplică pe sistemele suplimentare (fig. 173, *c*), iar cele din nodurile 5, *9*, *13* rămîn pe sistemul fundamental (fig. 173, *b*).

Într-un sistem suplimentar cu sarcinile care îi revin (fig. 173, *c*) se notează cu N^s efortul dintr-o bară oarecare. Se obține :

$$N^s_{5-7} = N^s_{7-9} = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot pa = \frac{8}{3} pa;$$

$$N^s_{5-8} = N^s_{8-9} = -\frac{5}{3} \cdot 2 \cdot pa = -\frac{10}{3} pa;$$

$$N^s_{7-8} = +4pa.$$

Reacțiunile din reazemele 5 și 9 sînt $V_5 = V_9 = 2pa$.

Aceste reacțiuni cu sens schimbat sînt aplicate ca acțiuni în nodurile corespunzătoare ale sistemului fundamental (fig. 173, *d*), astfel încît într-un nod al tălpii inferioare de pe sistemul fundamental, la sarcina inițială $4pa$ trebuie adăugate sarcinile aduse de două sisteme suplimentare : $2 \cdot 2pa$. În total, în nodurile *5*, *9* și *13* ale sistemului fundamental încărcarea este $8\,pa$.

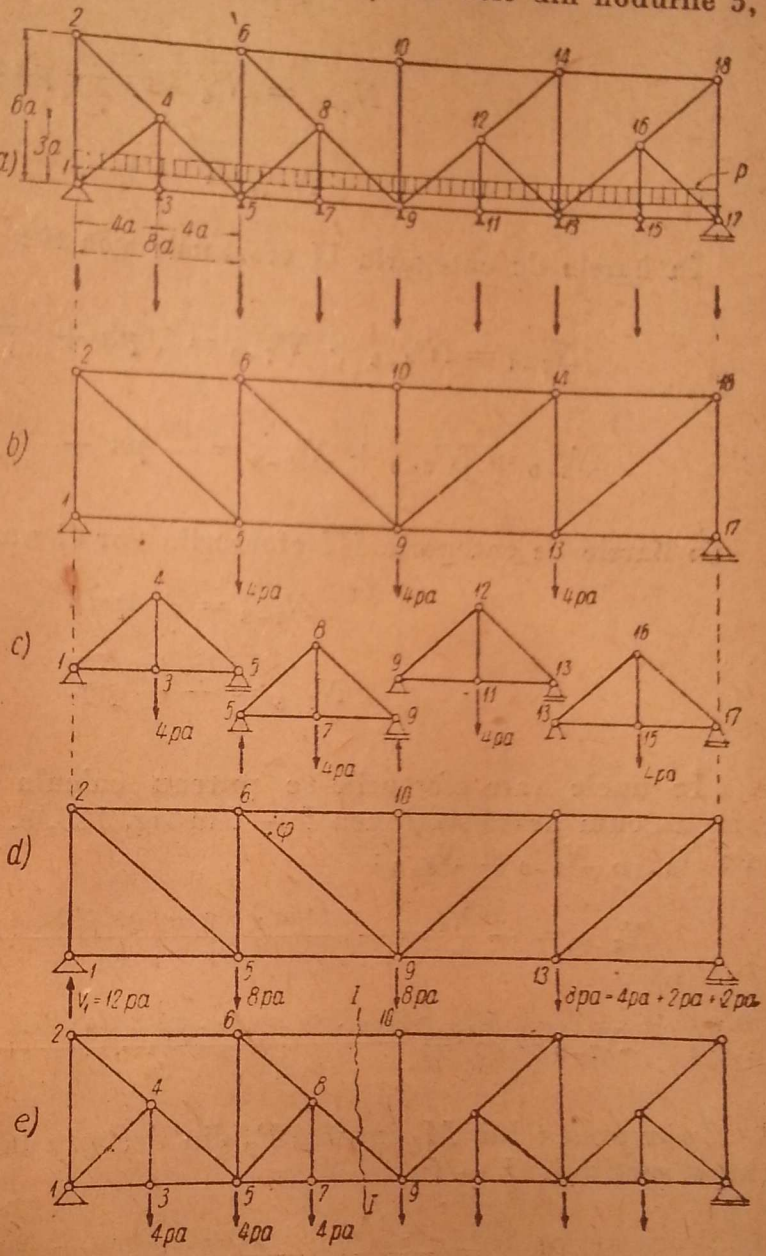


Fig. 173

Cu aceste sarcini stabilite se calculează eforturile în sistemul fundamental (fig. 173, *d*) notate cu N^0 :

$$N^0_{5-9} = \frac{M_6}{h} = \frac{12pa \cdot 8a}{6a} = 16pa;$$

$$N^0_{6-10} = -\frac{M_9}{h} = -\frac{12pa \cdot 16a - 8pa \cdot 8a}{6a} = -\frac{64}{3} pa;$$

$$N^0_{6-9} = \frac{T_{5-9}}{\sin\varphi} = \frac{4pa}{0{,}6} = \frac{20}{3} pa; \quad N^0_{5-6} = -T_{5-9} = -4pa.$$

Eforturile finale vor fi :
În barele de categoria I, numai eforturi : $N = N^0$;

$$N_{6-10} = -\frac{64}{3} pa;$$

$$N_{6-8} = N^0_{6-9} = \frac{20}{3} pa;$$

$$N_{5-6} = -4pa.$$

În barele de categoria II eforturile vor fi : $N = N^0 + N^s$;

$$N_{7-9} = N^0_{5-9} + N^s_{7-9} = 16pa + \frac{8}{3} pa = \frac{56}{3} pa;$$

$$N_{8-9} = N^0_{6-9} + N^s_{8-9} = \frac{20}{3} pa - \frac{10}{3} pa = \frac{10}{3} pa.$$

În barele de categoria III eforturile vor fi numai : $N = N^s$;

$$N_{7-8} = +4pa;$$

$$N_{5-8} = -\frac{10}{3} pa.$$

În unele bare eforturile se puteau calcula direct chiar pe sistemul compus, cum arată secțiunea $I - I$ în fig. 173, *e*. Se calculează pe această cale N_{6-10}, N_{7-9} și N_{8-9} :

$$N_{6-10} = -\frac{M_9}{h} = -\frac{14pa \cdot 16a - 4pa\ (12a + 8a + 4a)}{6a} = \frac{-64}{3} pa;$$

$$N_{7-9} = \frac{M_6}{h} = \frac{14pa \cdot 8a - 4pa \cdot 4a - 4a \cdot 0 + 4pa \cdot 4a}{6a} = \frac{56}{3} pa.$$

În expresia lui M_6 intră și P_7 din dreapta lui 6, deoarece se găsește în stînga secțiunii $I - I$:

$$N_{8-9} = \frac{T_{7-9}}{\sin \varphi} = \frac{14pa - 3 \cdot 4pa}{0{,}6} = \frac{2pa}{0{,}6} = \frac{10}{3} pa.$$

Observație. În general, pentru calculul eforturilor la grinzile cu zăbrele trebuie reținut că sarcinile se transmit prin noduri chiar cînd prin datele problemei ele apar distribuite. În realitate, în noduri sînt antretoaze, și pe antretoaze sînt lonjeroane, astfel încît, cînd se vorbește de sarcini distribuite se înțelege că se aplică indirect pe grinda cu zăbrele, numai la nodurile ei. Calculele trebuie să țină seamă de aceasta. La unele grinzi cu zăbrele, cum sînt grinzile cu montanți sistem dreptunghiular sau triunghiular simplu, eforturile în tălpi se pot calcula din momentele încovoietoare pentru sarcini distribuite, în secțiunile din dreptul nodurilor, dar nu trebuie generalizat înainte de a se face o examinare atentă. La sistemele compuse, cum a fost cazul examinat mai sus, un astfel de procedeu ar fi putut produce erori prin neglijarea unor forțe sau introducerea altora care nu se aplică de aceeași parte a secțiunii. Totdeauna trebuie să se țină seamă pe unde se face secțiunea și numai după aceea să se facă eventuale simplificări.

În acest caz, în bare apar și momente încovoietoare (fig. 174, *a* și *b*). Barele fiind considerate articulate la noduri, momentele încovoietoare și forțele tăietoare se determină independent de valoarea eforturilor axiale, luînd în considerație numai componentele forțelor normale pe axa barei, ca la o grindă simplu rezemată. Deci, problema momentelor încovoietoare care apar în astfel de bare se rezolvă pe fiecare bară în parte, independent de problema generală a eforturilor axiale în bare.

Determinarea eforturilor axiale în bare se face prin reducerea problemei la cazurile precedente cu sarcini aplicate numai la noduri. Pentru

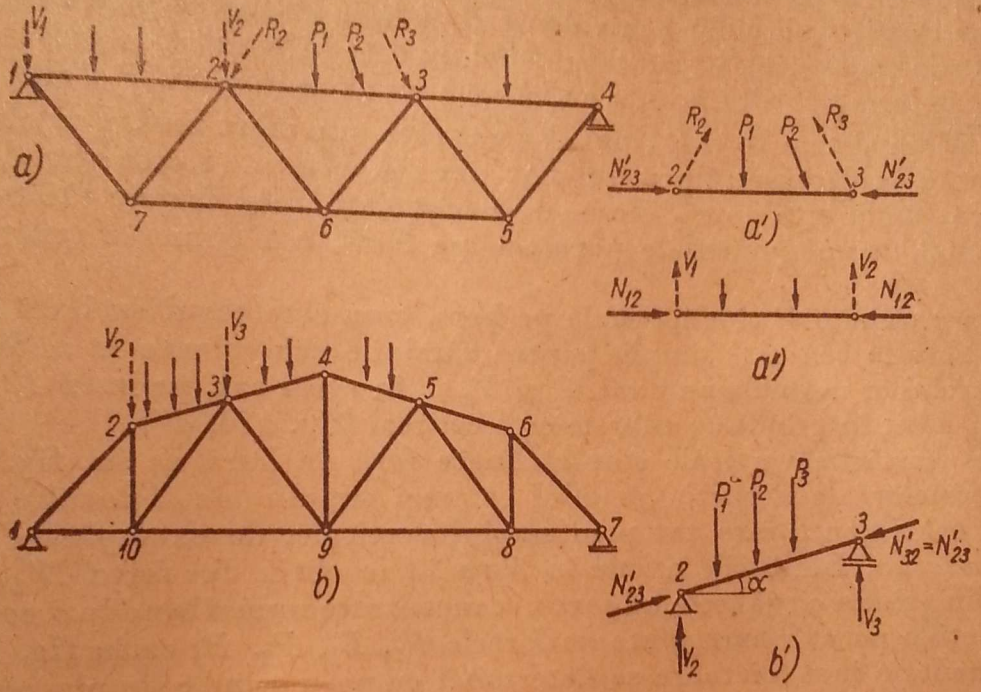


Fig. 174

aceasta se observă că dacă se înlocuiește sistemul de sarcini de pe bara *23* (fig. 174, *a*) cu un altul echivalent aplicat de asemenea pe bara *23*, starea de eforturi pe întregul sistem rămîne aceeași, cu excepția eforturilor de pe bara *23*. Pe baza acestei observații se poate înlocui sistemul de sarcini P_1 și P_2 de pe bara *23* cu un sistem de forțe R_2 și R_3 aplicate în nodurile *2* și *3* care să aibă aceeași rezultantă ca forțele date P_1 și P_2 (fig. 174, *a*). Nu este nevoie să se pună altă condiție pentru R_2 și R_3, deși înlocuirea lui P_1 și P_2 cu R_2 și R_3 în *2* și *3* se poate face într-o infinitate de moduri.

Această operație se face pe fiecare bară cu sarcini transversale și aducem astfel problema la o grindă cu zăbrele în care sarcinile sînt aplicate numai la noduri, ceea ce permite determinarea eforturilor axiale în bare prin metodele analizate. Aceste eforturi sînt valabile în toate barele care nu au sarcini transversale pe ele (barele *17*, *27*, *76* etc., din fig. 174, *a*).

Se va studia acum bara *23*. Prin înlocuirea sarcinilor reale cu R_2 și R_3 aplicate în noduri, eforturile au fost modificate numai pe bara *23*, iar înlocuirea sarcinilor de pe celelalte bare (*12*, *34*) cu sarcini echivalente la noduri nu influențează eforturile de pe bara *23*. Fie N'_{23} efortul axial în bara *23* determinat în grinda transformată cu sarcini numai

la noduri. Deoarece toate înlocuirile de forțe prin sisteme echivalente exterioare intervalului *23* nu influențează bara *23*, va fi suficient să se izoleze bara *23* (fig. 174, *a'*) cu efortul N'_{23} la capetele ei și apoi să se introducă un sistem de forțe echivalent cu zero, astfel încît să se aducă bara la starea reală de încărcare cu P_1 și P_2. Pentru aceasta, în nodurile *2* și *3* se aplică forțele R_2 și R_3 de sens contrar celor din fig. 174, *a*, și sarcinile reale P_1 și P_2 în punctele lor de aplicație. Bara *23* din fig. 174, *a'* este un corp liber acționat de un sistem de forțe în echilibru, astfel încît se pot determina eforturile din orice secțiune, și acestea vor fi eforturile datorite încărcării cu sarcini între noduri. Rezultă de aici că, dacă sarcinile reale nu sînt normale pe bară, efortul axial nu mai are aceeași valoare pe toată bara. Înlocuirea sarcinilor P_1, P_2 cu sarcinile echivalente R_2 și R_3 la noduri se poate face într-o infinitate de moduri, însă rezultatul final nu este influențat de aceasta. Efortul N'_{23} determinat din grinda cu zăbrele va avea în adevăr o altă valoare pentru fiecare sistem R_2 și R_3, dar N'_{23} nu este un efort real. Forțele axiale din bara *23* se determină prin schema din fig. 174, *a'* și este ușor de văzut că soluția finală este unică. Momentele înovoietoare și forțele tăietoare depind numai de componentele normale pe bară, așa cum s-a arătat mai înainte.

Dacă sarcinile *P* sînt normale pe bare, cum este cazul cu bara *12* (fig. 174, *a*), soluția cea mai simplă pentru sarcinile echivalente la noduri este cea a sarcinilor normale pe bară V_1 și V_2 și, în acest caz, pe bara *12* efortul axial N_{12} găsit în grinda cu zăbrele este cel real (fig. 174, *a''*).

Dacă sarcinile verticale sînt înclinate față de bară ca în fig. 174, *b* (cazul fermelor de acoperiș), modul cel mai simplu de înlocuire a lor cu forțe echivalente este tot prin sarcini verticale, de exemplu, V_2 și V_3 pentru bara *23*. Eforturile axiale în bara *23* se obțin din forța N'_{23} determinată din grinda cu zăbrele cu sarcini concentrate numai la noduri, corectată cu proiecțiile pe axa barei date de forțele V_2, P_1, P_2, P_3 ca în fig. 174, *b'*.

Momentele încovoietoare se determină ca pe o grindă simplu rezemată *23*.

La dimensionarea barelor cu sarcini aplicate între noduri este necesar să se țină seamă atît de forțele axiale, cît și de momentele încovoietoare.

Acestea sînt metodele generale de calcul ale eforturilor din grinzile cu zăbrele.

Există și altele (metoda nodurilor virtuale, a pozițiilor false etc.) [1]), dar nu au aplicație curentă.

Mai există metode de determinare a eforturilor provenind din aplicarea principiului lucrului mecanic virtual, dar orice deplasare cinematică conduce automat la linii de influență, astfel încît determinarea eforturilor pentru încărcări fixe pe grindă prin deplasări virtuale, de fapt se rezolvă tot cu liniile de influență, chiar dacă nu se desenează aceste linii.

Aplicația 35. Să se determine eforturile în barele caracteristice ale grinzii cu zăbrele din fig. 175, *a* încărcată cu sarcina $q_1 = 2$ t/m pe talpa superioară și $q_2 = 4$ t/m pe talpa inferioară.

Indicații. Se folosesc secțiunile corespunzătoare. Secțiunea $I-I$ determină eforturile în barele *68*, *79* și *78*. $I_{68} = \frac{M_7}{h}$. M_7 se poate calcula cu expresia $\frac{1}{2} q \cdot x \cdot x'$, unde

[1]) A se vedea *Gh. Filipescu*, op. cit.

$q = q_1 + q_2$, deoarece nodurile 6 și 7 în care există antretoaze se găsesc pe aceeași verticală, și panoul secționat este adiacent nodului 7. Deci, indiferent dacă se concentrează întîi sarcinile la noduri, așa cum este corect (fig. 175, *b*), sau se consideră sarcina distribuită, M_7 are aceeași valoare:

$$M_7 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \cdot 3\lambda \cdot 5\lambda = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot 15 = 405 \text{ tm și } I_{68} = \frac{405}{4} = 101{,}25 \text{ t.}$$

La fel:

$$S_{79} = -\frac{M_8}{h} = -\frac{\frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 24^2}{4} = -108 \text{ t și}$$

$D_{78} = \dfrac{T_I}{\sin \varphi}$, unde pentru calculul lui T_I trebue să se țină seamă de transmiterea indirectă a sarcinilor la noduri, așa cum se vede în fig. 175, *b*:

$$T_I = 72 - 9 - 3 \cdot 18 = 9 \text{ t}$$

și

$$\sin \varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8; \quad \text{deci:}$$

$$D_{78} = +11{,}25 \text{ t.}$$

V_{76} se obține din secțiunea *II—II*:

$V_{76} = -T_{II}$, unde T_{II} este suma forțelor verticale de la stînga secțiunii *II—II*, care taie panouri diferite pe cele două tălpi; trebuie deci să se țină seamă de transmiterea sarcinilor la noduri ca în fig. 175, *b*:

$$V_{76} = -T_{II} = -(72 - 9 - 2 \cdot 18 - 12) = -15 \text{ t.}$$

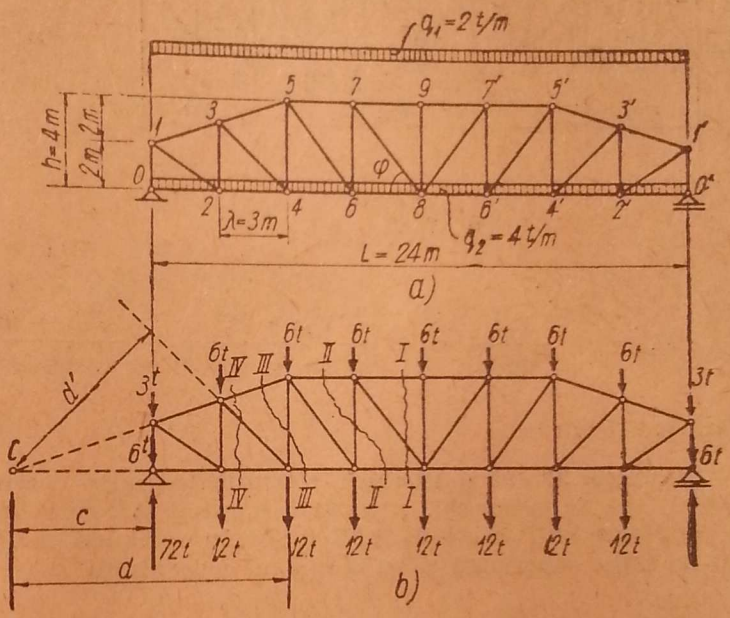


Fig. 175.

V_{45} se obține din secțiunea *III—III* prin ecuația de momente în raport cu punctul *C*:

$-V_{45} \cdot d + M_C = 0$, unde M_C este momentul în raport cu *C* al tuturor forțelor din stînga secțiunii *III—III*.

Din datele goemetrice rezultă: $d = 12$ m și $c = 6$ m

$$M_C = -(72 - 9) \cdot 6 + 18 \cdot 9 + 12 \cdot 12 = -72 \text{ tm} \quad \text{și}$$

$$V_{45} = \frac{M_C}{d} = \frac{-72}{12} = -6 \text{ t.}$$

D_{34} se obține din secțiunea *IV—IV* prin ecuația de momente în raport cu punctul *C*:

$$D_{34} \cdot d' + M'_C = 0 \quad \text{unde} \quad d' = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2};$$

$$M'_C = -63 \cdot 6 + 18 \cdot 9 = -216 \text{ tm} \quad \text{și}$$

$$D_{34} = 18 \cdot \sqrt{2} = +25{,}5 \text{ t.}$$

În mod analog se determină eforturile celorlalte bare. Se observă că, în general, înainte de a face calculele trebuie transmise sarcinile la noduri. Numai la calculul eforturilor în tălpi, datorită montanților verticali s-au putut determina momentele în dreptul nodurilor direct din sarcina distribuită.

Aplicaţia 36. Să se determine eforturile în barele caracteristice ale grinzii cu zăbrele din fig. 176, încărcată cu $q = 4$ t/m între nodurile *1* şi *7* ale tălpii superioare.

Indicaţii. Se determină întîi reacţiunile V_A şi V_B:

$$V_A = \frac{4 \cdot 9 \cdot 19{,}5}{18} = +39\text{ t}; \quad V_B = -\frac{4 \cdot 9 \cdot 1{,}5}{18} = -3\text{ t},$$

şi apoi se folosesc separări de noduri şi secţiuni corespunzătoare:

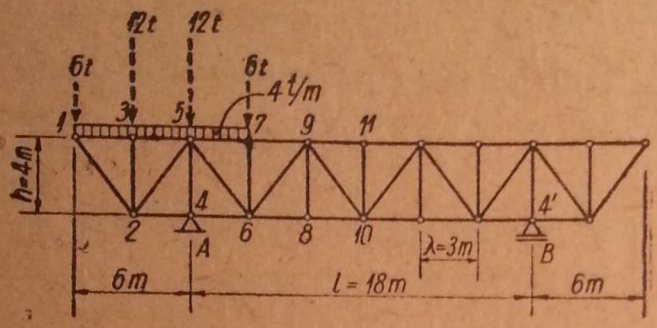


Fig. 176.

$$I_{12} = -\frac{P_1}{\sin\varphi} = -\frac{6}{0{,}8} = -7{,}5\text{ t};$$

$$S_{13} = -I_{12}\cos\varphi = 7{,}5 \cdot 0{,}6 = +4{,}5\text{ t};$$

$$V_{23} = -P_2 = -12\text{ t};$$

$$V_{45} = -V_A = -39\text{ t};$$

$$S_{57} = -\frac{M_6}{h} = -\frac{V_B \cdot 5\lambda}{h} =$$

$$= -\frac{-3 \cdot 15}{4} = +11{,}25\text{ t};$$

$$I_{46} = +\frac{M_5}{h} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6^2}{4} = -18\text{ t};$$

$$D_{56} = +\frac{T_{57}}{\sin\varphi} = +\frac{-V_B + P_7}{\sin\varphi} = +\frac{+3+6}{0{,}8} = +\frac{9}{0{,}8} = +11{,}25\text{ t}$$

şi aşa mai departe.

Aplicaţia 37. Să se găsească eforturile în barele caracteristice ale grinzii cu zăbrele din fig. 177, care, în ansamblu, reprezintă o grindă AB cu o consolă BC şi o grindă independentă CD, articulată în C de grinda ABC şi simplu rezemată în D, încărcată cu $q = 6$ t/m între C şi D pe talpa superioară şi cu o sarcină concentrată $P = 15$ t în nodul P.

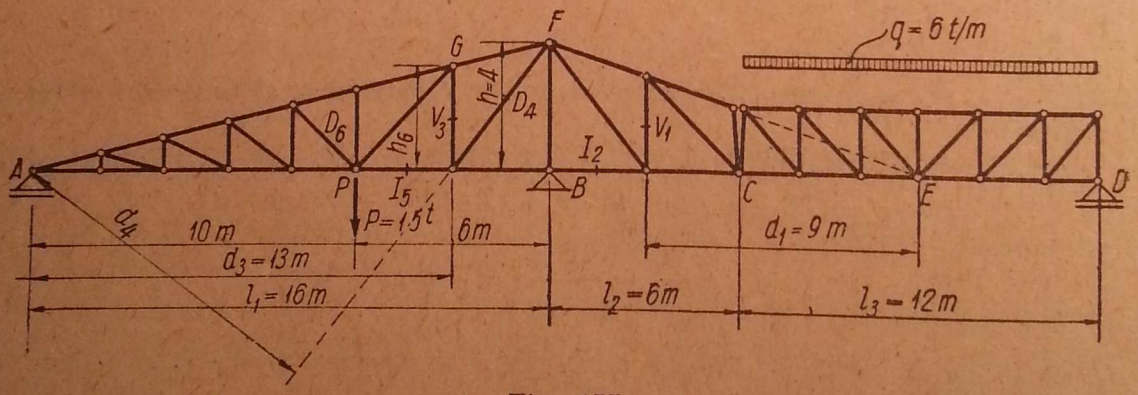


Fig. 177.

Indicaţii. Se determină reacţiunile V_D şi V_C separînd grinda independentă $C - D$ şi apoi se găsesc şi reacţiunile V_A şi V_B:

$$V_C = V_D = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36\text{ t};$$

$$V_A = \frac{15 \cdot 6 - 36 \cdot 6}{16} = -7{,}875\text{ t}; \quad V_B = \frac{15 \cdot 10 + 36 \cdot 22}{16} = 58{,}875\text{ t}.$$

Eforturile în bare se determină prin secțiuni corespunzătoare rezultînd:

$$V_1 = \frac{M_E}{d_1} = -\frac{36 \cdot 6}{9} = -24 \text{ t};$$

$$I_2 = \frac{M_F}{h_F} = -\frac{36 \cdot 6}{4} = -54 \text{ t};$$

$$V_3 = -\frac{M_A}{d_3} = -\frac{15 \cdot 10}{13} = -11{,}53 \text{ t};$$

$$I_5 = \frac{M_G}{h_G} = \frac{-7{,}875 \cdot 13 - 15 \cdot 3}{3{,}25} = -45{,}3 \text{ t} \qquad \left(h_G = \frac{4}{16} \cdot 13 = 3{,}25 \text{ m}\right);$$

$$D_4 = \frac{M_A}{d_4} = \frac{15 \cdot 10}{10{,}4} = 14{,}4 \text{ t} \qquad (d_4 = 13 \cdot 0{,}8 = 10{,}4 \text{ m});$$

$$D_6 = \frac{M_A}{d_6} = 0.$$

La fel se procedează cu toate barele.

Aplicația 38. Să se determine eforturile în barele grinzii din fig. 178, încărcată așa cum este arătat în figură. Nodurile grinzii se găsesc numai pe contur. În interior barele trec unele pe lîngă altele.

Indicații. Datorită simetriei sistemului și încărcării, eforturile vor fi simetrice, de unde rezultă $D_{31} = D_{31'}$.

Separînd nodul *3* și proiectînd pe verticală, rezultă:

$$D_{31} = D_{31'} = \frac{P_2}{2 \sin \varphi}.$$

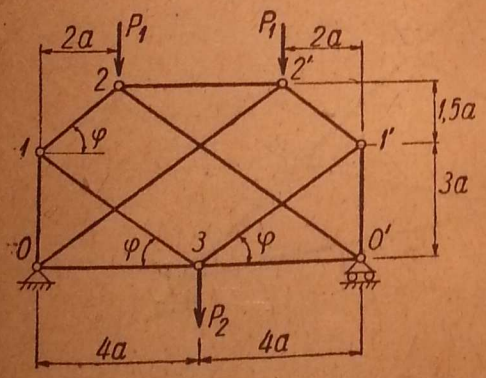
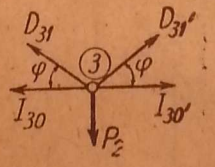


Fig. 178.



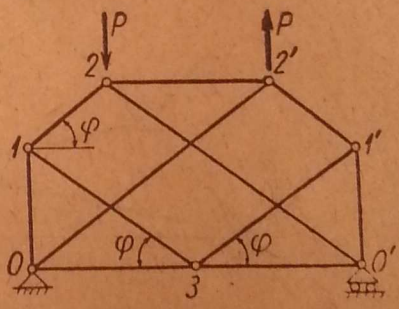


Fig. 179.

Din separarea nodului *1* rezultă:

$$N_{12} = N_{1'2'} = -\frac{P_2}{2 \sin \varphi};$$

$$N_{01} = N_{0'1'} = -P_2.$$

Din separarea nodului *2* rezultă:

$$N_{0'2} = N_{02'} = \frac{1}{2 \sin \varphi}(P_2 - 2P_1); \qquad N_{22'} = (P_1 - P_2) \operatorname{ctg} \varphi.$$

Din separarea nodului *0* rezultă :

$$N_{03} = N_{0'3} = \left(P_1 - \frac{P_2}{2} \right) \operatorname{ctg} \varphi.$$

Aplicaţia 39. Să se determine eforturile în barele grinzii din aplicaţia precedentă, încărcată însă antisimetric ca în fig. 179.

Indicaţii. Sistemul este simetric, şi încărcarea — antisimetrică. De aici rezultă $N_{22'} = 0$, şi apoi, din separarea succesivă a nodurilor *2*, *1*, *0* :

$$N_{12} = - N_{1'2'} = N_{20'} = - N_{2'0} = - N_{13} = N_{1'3} = - \frac{P}{2 \sin \varphi};$$

$$N_{01} = - N_{0'1'} = - P;$$

$$N_{03} = - N_{0'3} = - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Observaţie. Orice încărcare verticală pe grinda din fig. 178 şi 179 se poate descompune în componente simetrice şi antisimetrice, folosindu-se rezultatele obţinute în aplicaţiile 38 şi 39.

Aplicaţia 40. Să se găsească eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 180, cu încărcările date în figură.

Indicaţie. Se va folosi metoda grafică a poligoanelor reciproce, combinată cu metoda înlocuirii barelor pentru regiunea $4-5-7-5'-4'-6-4$.

Se înlocuieşte bara *67* cu bara *44'* şi se fac două poligoane reciproce : unul pentru încărcările exterioare, şi altul pe regiunea centrală, pentru încărcarea $X_{67} = 1$.

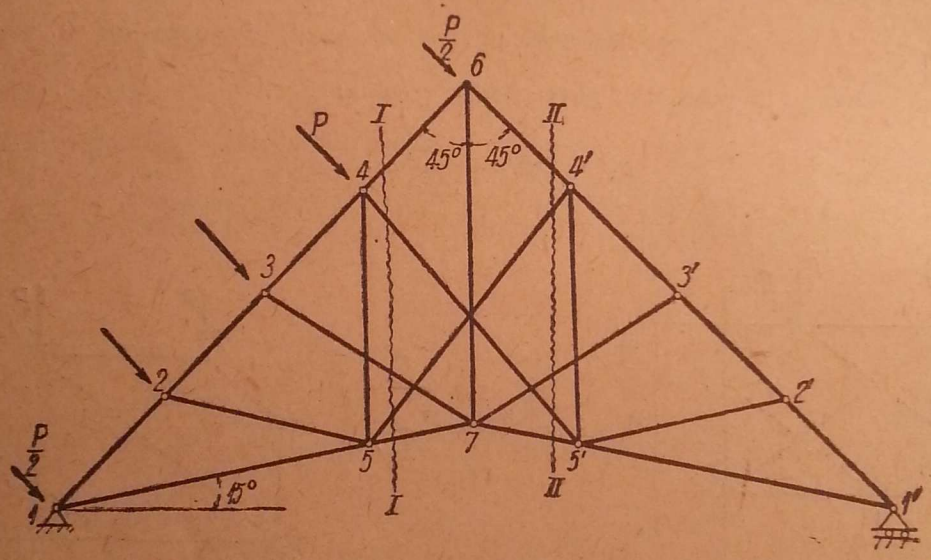


Fig. 180.

Punînd condiţia $N_{44'} = N^0_{44'} + X_{67} \cdot n_{44',67} = 0$, rezultă X_{67} ; apoi eforturile pe regiunea centrală se obţin din suprapunere. De exemplu, în bara $4-5$: $N_{45} = N^0_{45} + X_{67} \cdot n_{45,67}$

Observaţie. Pentru grinda din fig. 180, se poate aplica şi metoda celor două secţiuni. Din secţiunea $I-I$ şi ecuaţia de momente în raport cu punctul *1* se obţine o ecuaţie cu necunoscutele $N_{45'}$ şi $N_{4'5}$, ţinînd seamă că N_{37} e cunoscut din separarea nodului *3*. A doua ecuaţie cu necunoscutele $N_{45'}$ şi $N_{4'5}$ se obţine din secţiunea $II-II$ şi ecuaţia de momente în raport cu punctul *1'*.

Aplicaţia 41. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele compuse din fig. 181, *a*.

Indicaţii. Sistemul se descompune în sistemele suplimentare (fig. 181, *b*) şi în sistemul fundamental (fig. 181, *c*). Se observă că montanţii *10—11*, *12—13*, *14—15*, *16—17*

au numai rolul de a transmite o parte din sarcinile aplicate pe talpa inferioară la sistemele suplimentare care sînt suprapuse peste talpa superioară a sistemului fundamental. Fiecărui nod al tălpii inferioare îi revine sarcina $P = 5 \cdot 2 = 10$ t. Eforturile în sistemul suplimentar sînt:

$$V^s_{12-13} = P = 10 \text{ t}; \quad D^s_{3-12} = D^s_{5-12} = \frac{P}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ t};$$

$$S^s_{35} = -\frac{P}{2} = -5 \text{ t}.$$

Sistemul fundamental are încărcările corespunzătoare nodurilor sale de pe talpa inferioară, iar nodurile tălpii superioare sînt încărcate cu reacțiunile din reazemele sistemelor suplimentare ca în fig. 181, *c*. Eforturile în sistemul fundamental sînt:

$$S^0_{13} = 0; \quad S^0_{35} = -\frac{M_2}{h} = -\frac{1}{4}(40 \cdot 4 - 10 \cdot 4) = -30 \text{ t};$$

$$I^0_{02} = -S^0_{35} = +30 \text{ t};$$

$$I^0_{24} = \frac{M_5}{h} = \frac{1}{4}(30 \cdot 8 - 20 \cdot 4) = 40 \text{ t};$$

$$D^0_{03} = -\frac{T_{13}}{\sin \varphi} = -\frac{30}{\sqrt{2}/2} = -30\sqrt{2} \text{ t};$$

$$D^0_{25} = -\frac{T_{35}}{\sin \varphi} = -\frac{10}{\sqrt{2}/2} = -10\sqrt{2} \text{ t};$$

$$V^0_{01} = -\frac{P}{2} = -5 \text{ t};$$

$$V^0_{23} = +20 \text{ t};$$

$$V^0_{45} = +P = +10 \text{ t}.$$

Eforturile din barele sistemului compus se obțin prin suprapunere: $N = N^0 + N^s$, de unde rezultă:

$$S_{13} = 0 - 5 = -5 \text{ t}; \; S_{35} = -30 - 5 = -35 \text{ t};$$
$$I_{02} = 0 + 30 = 30 \text{ t}; \; I_{24} = 0 + 40 = 40 \text{ t};$$
$$D_{5-12} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = -5\sqrt{2} = -7{,}07 \text{ t};$$
$$D_{12-2} = -10\sqrt{2} + 0 = -14{,}14 \text{ t};$$
$$D_{3-12} = 0 + 5\sqrt{2} = +7{,}07 \text{ t};$$
$$V_{23} = +20 + 0 = +20 \text{ t}; \quad V_{45} = +10 + 0 = +10 \text{ t}; \text{ etc.}$$

Aplicația 42. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele compuse din fig. 182, *a*.

Indicații. Se separă sistemul compus din fig. 182, *a* în sistemele suplimentare (fig. 182, *b*) și în sistemul fundamental (fig. 182, *c*) cu sarcinile care le revin și se conduce calculul ca în aplicația precedentă.

Eforturile în sistemele suplimentare (fig. 182, *b*) sînt:

$$D^s_{4-13} = -\frac{P}{\sqrt{2}} = -\frac{20}{\sqrt{2}} = -10\sqrt{2} \text{ t}; \quad I^s_{4-14} = +\frac{P}{2} = +10 \text{ t};$$

$$S^s_{12-13} = -P = -20 \text{ t}; \quad D^s_{13-14} = +\frac{P}{\sqrt{2}} = +10\sqrt{2} \text{ t} = +14{,}14 \text{ t}.$$

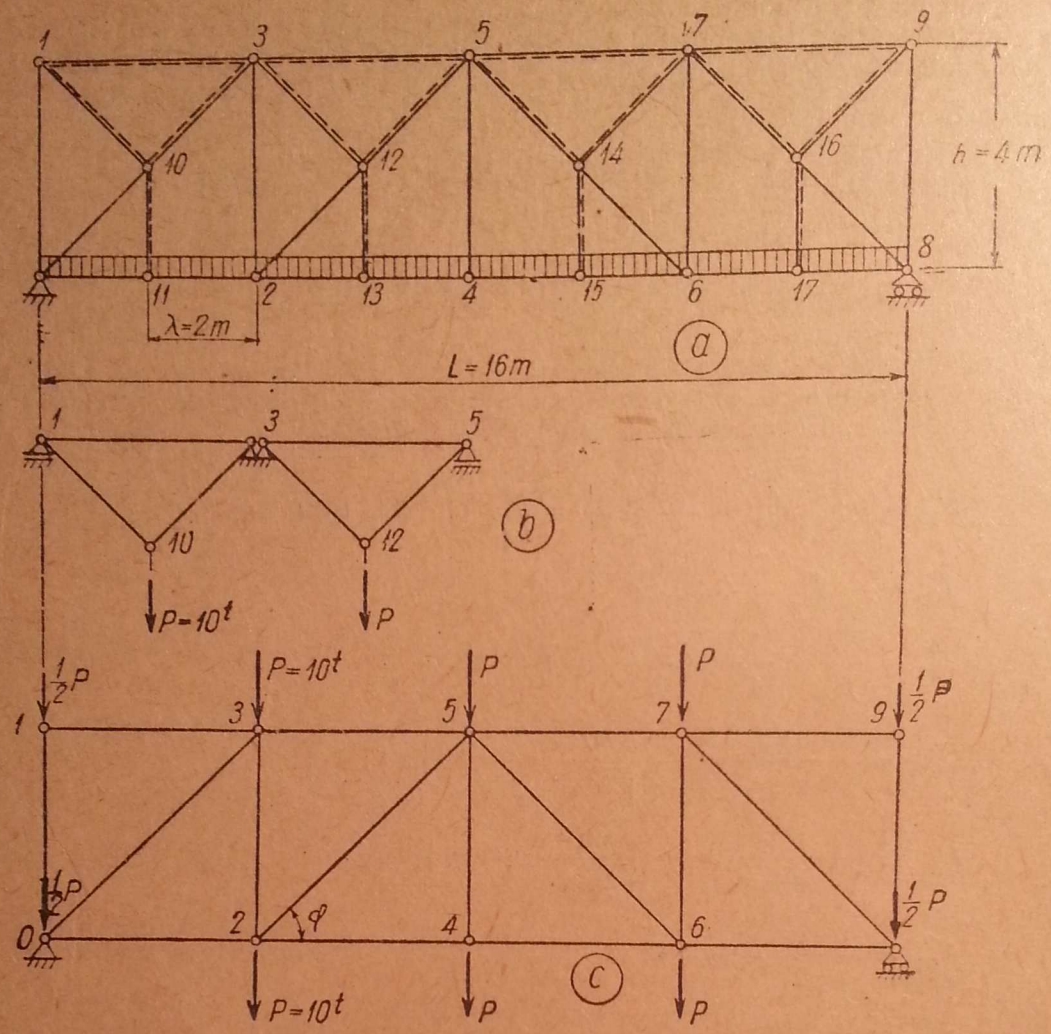


Fig. 181.

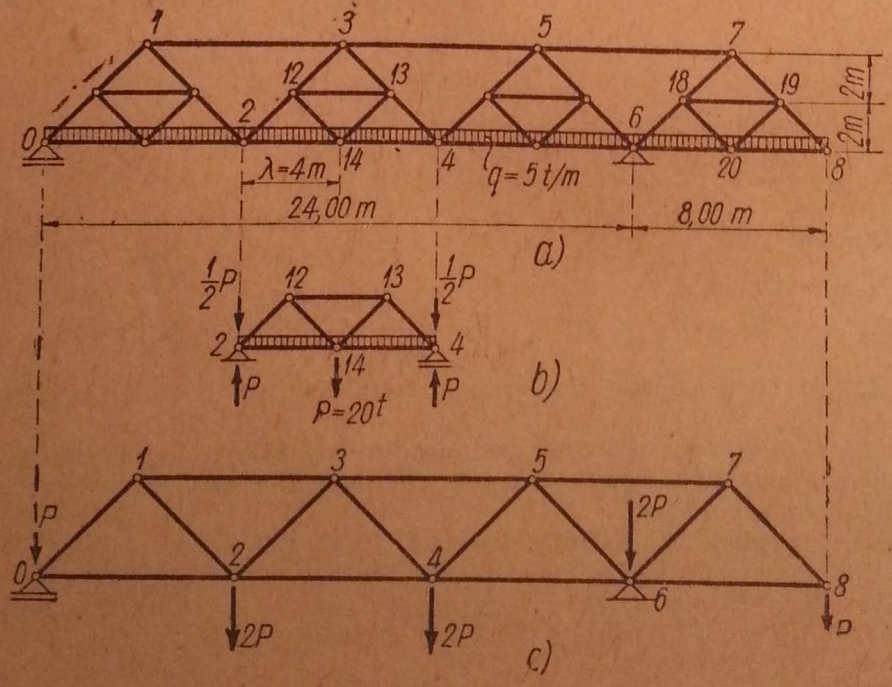


Fig. 182.

Reacțiunile și eforturile în sistemul fundamental:

$$V_0^0 = \frac{1}{24} \cdot 5 \cdot 32 \cdot 8 = 53{,}33 \text{ t}; \quad V_6^0 = \frac{1}{24} \cdot 5 \cdot 32 \cdot 16 = 106{,}67 \text{ t};$$

$$I_{24}^0 = \frac{M_3}{h} = \frac{1}{4}(33{,}33 \cdot 12 - 40 \cdot 4) = 60 \text{ t};$$

$$S_{35}^0 = -\frac{M_4}{h} = -\frac{1}{4}(33{,}33 \cdot 16 - 40 \cdot 8) = -53{,}33 \text{ t};$$

$$D_{34}^0 = (53{,}33 - 20 - 40)\sqrt{2} = -6{,}67\sqrt{2} \text{ t} = -9{,}58 \text{ t};$$

$$D_{67}^0 = -20\sqrt{2} \text{ t} = -28{,}28 \text{ t};$$

$$I_{68}^0 = -P = -20 \text{ t}.$$

Eforturile în sistemul compus:

$S_{35} = -53{,}33$ t; $S_{12-13} = -20$ t;

$_{6-20} = -20 + 10 = -10$ t;

$I_{4-14} = 60 + 10 = +70$ t;

$D_{3-13} = -9{,}58$ t;

$D_{4-13} = -9{,}58 - 14{,}14 = -23{,}72$ t;

$D_{13-14} = +14{,}14$ t;

$D_{7-18} = -28{,}28$ t;

$D_{6-18} = -28{,}28 - 14{,}14 =$

$= -42{,}42$ t; etc...

Aplicația 43. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele compuse din fig. 183, *a*.

Indicații. Se separă sistemul compus în sistemele suplimentare (fig. 183, *b*) și în sistemul fundamental (fig. 183, *c*) cu sarcinile respective și se procedează ca în cele două aplicații precedente.

Rezultă eforturile în bare:

$S_{35} = S_{35}^0 = -60$ t; $I_{24} = I_{24}^0 +$

$+ I_{24}^s = 45 + 10 = +55$ t;

$D_{3-11} = D_{3-11}^0 = +21{,}2$ t;

$D_{11-13} = D_{11-13}^0 + D_{11-13}^s = 21{,}20 -$

$- 4{,}72 = +16{,}48$ t;

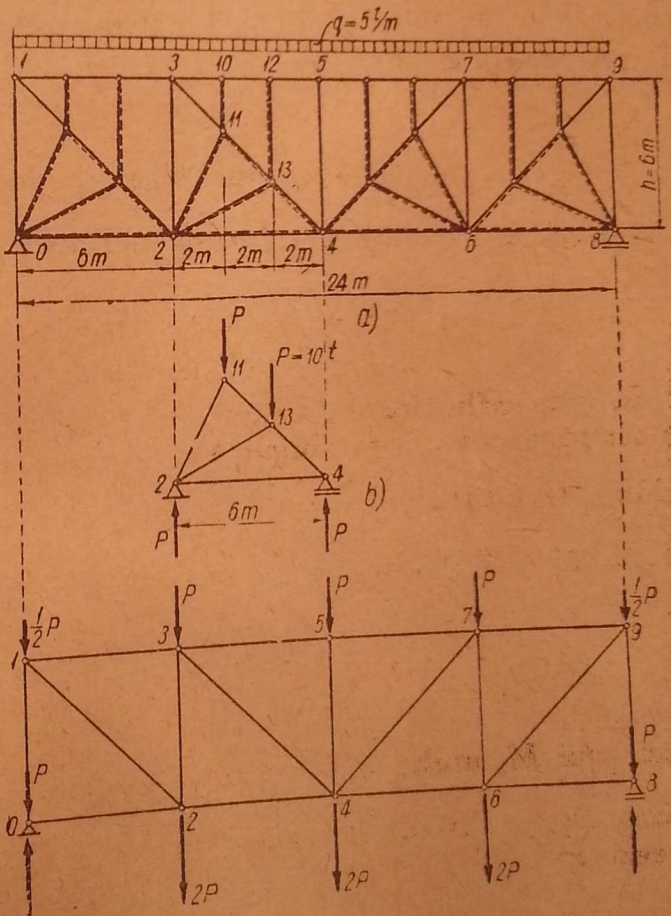


Fig. 183.

$$D_{13-4} = D_{13-4}^0 + D_{13-4}^s = 21{,}20 - 14{,}14 = 7{,}06 \text{ t};$$

$$D_{2-11} = D_{2-11}^s = -7{,}45 \text{ t}; \quad D_{2-13} = D_{2-13}^s = -7{,}45 \text{ t};$$

$$V_{23} = V_{23}^0 = -25 \text{ t}; \quad V_{45} = V_{45}^0 = -10 \text{ t}; \text{ etc...}$$

§ 22. LINII DE INFLUENȚĂ PE CALE ANALITICĂ

Efectul sarcinilor mobile asupra eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele se studiază cu ajutorul liniilor de influență, ca și la grinzile drepte.

Prin linia de influență a efortului într-o bară se înțelege reprezentarea grafică, după convenția stabilită anterior, a variației efortului din acea bară, cînd o sarcină mobilă $P = 1$ se deplasează pe linia de încărcare a grinzii.

Linia de încărcare la o grindă cu zăbrele este alcătuită din lonjeroane care se reazemă pe antretoaze, iar antretoazele sînt așezate de obicei în nodurile uneia dintre tălpile cu zăbrele, astfel încît trebuie analizată o transmitere indirectă a sarcinilor mobile în nodurile uneia dintre tălpile grinzii.

Pentru simplificarea desenelor, lonjeroanele și antretoazele nu se mai reprezintă, în general, în schema grinzii, dar se subînțelege existența acestor elemente pe talpa pe care este repezentată sarcina mobilă $P = 1$.

Liniile de influență se pot obține pe cale analitică din ecuațiile de echilibru, sau prin deplasări virtuale. În acest paragraf se va studia determinarea liniilor de influență pe cale analitică.

A. SISTEME SIMPLE

a) Grinzi cu tălpi paralele, sistem dreptunghiular (fig. 184)

Linia S_{3-5}. Prin secțiunea $I - I$ rezultă :

$$S_{3-5} \cdot h + M_4 = 0 ; \qquad S_{3-5} = -\frac{M_4}{h} . \tag{4.16}$$

Deci, linia de influență a efortului S_{3-5} este linia momentului încovoietor în secțiunea 4 la o grindă simplu rezemată de aceeași deschidere, cu semn schimbat și multiplicată cu $\frac{1}{h}$ (fig. 184, *a*).

Linia I_{2-4}. Prin aceeași secțiune $I - I$, se obține :

$$I_{2-4} \cdot h - M_3 = 0 ; \quad I_{2-4} = \frac{M_3}{h} . \tag{4.17}$$

Deci, linia lui M_3 multiplicată cu $\frac{1}{h}$ (fig. 184, *b*).

Linia D_{3-4}. Din proiecția pe verticală a forțelor din stînga secțiunii $I - I$ rezultă :

$$- D_{3-4} \sin \varphi + T_{2-4} = 0 ; \quad D_{3-4} = \frac{T_{2-4}}{\sin \varphi} . \tag{4.18}$$

Deci, linia de influență a efortului în diagonala D_{3-4} este aceeași cu linia de influență a forței tăietoare în panoul 2—4, a unei grinzi drepte cu sarcini transmise indirect, multiplicată cu $\frac{1}{\sin \varphi}$ (fig. 184, *c*).

Linia V_{4-5}. Se face o secțiune $II-II$ și, proiectînd pe verticală forțele din stînga, se obține :

$$V_{4-5} + T_{II} = 0 \; ; \qquad V_{4-5} = - T_{II}. \tag{4.19}$$

Pentru a evalua pe T_{II} trebuie să se precizeze pe unde se deplasează $P = 1$.

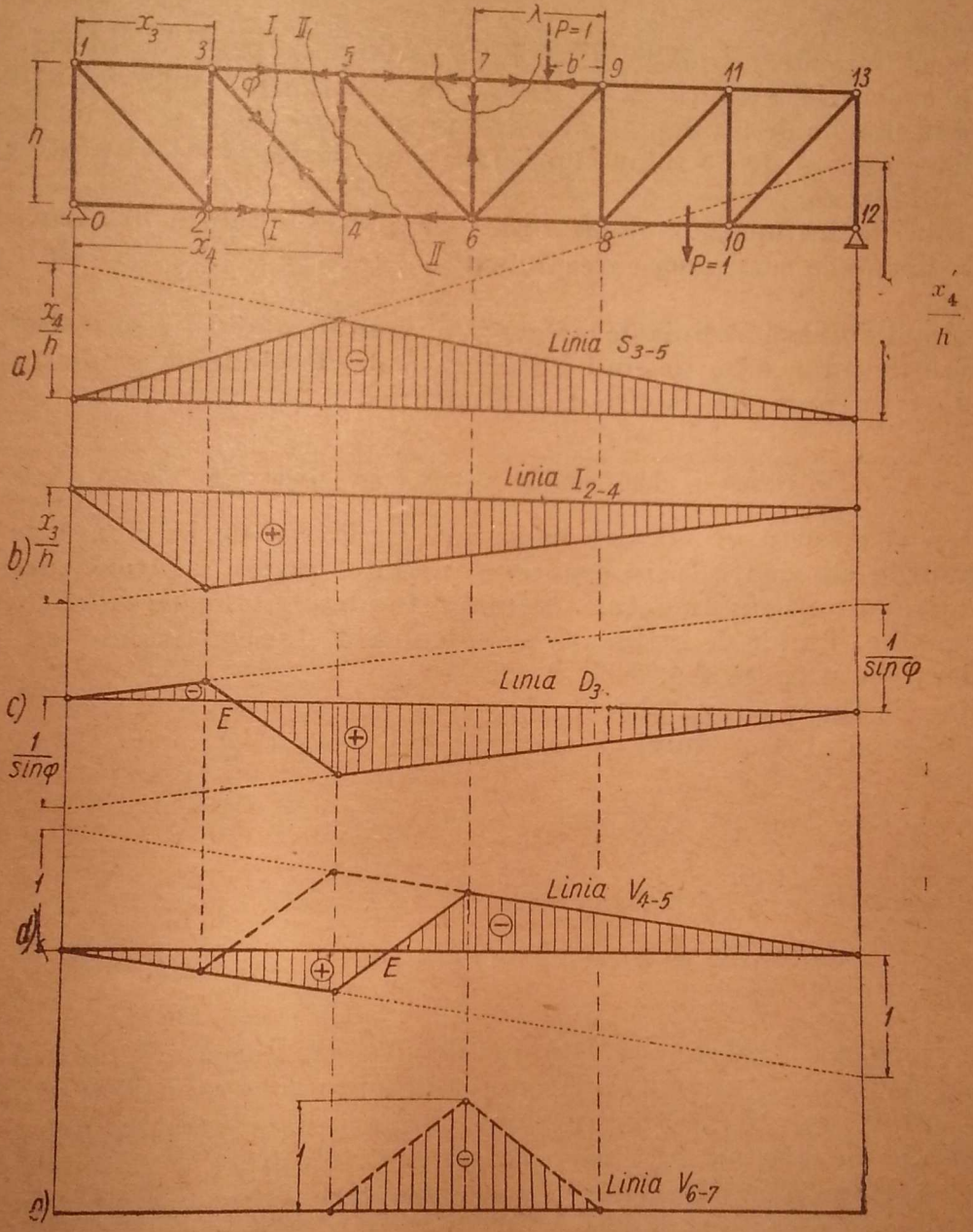


Fig. 184.

Cînd $P=1$ se deplasează pe talpa inferioară, $T_{II} = T_{4-6}$ și $V_{4-5} = - T_{4-6}$ (desenat plin în fig. 184, *d*), iar cînd $P=1$ se deplasează pe talpa superioară, $T_{II} = T_{3-5}$ și $V_{4-5} = - T_{3-5}$ (desenat punctat în fig. 184, *d*).

Linia V_{6-7}. Se obține prin separarea nodului 7. Se observă că V_{6-7} are valoare numai dacă sarcinile se aplică pe talpa superioară :

$$V_{6-7} + P_7 = 0, \quad \text{de unde} \quad V_{6-7} = - P_7. \tag{4.20}$$

Dar P_7 este componenta din nodul 7 cînd sarcina $P = 1$ se deplasează pe lonjeroanele grinzii. Reazemele lonjeroanelor sînt în antretoaze, astfel încît P_7 are valoare atît timp cît $P = 1$ se deplasează pe intervalul $9-7-5$.

Dacă $P = 1$ se deplasează între $9-7$ se obține :

$P_7 = \frac{b'}{\lambda} \cdot 1$ cu variație liniară de la zero în 9 pînă la 1 în 7. La fel, pe intervalul $5-7$.

Deci, linia de influență a lui V_{6-7} este un triunghi ca în fig. 184, *e*.

În concluzie, rezultă că la grinda cu montanți, liniile de influență în tălpi și în diagonale nu depind de talpa pe care circulă $P = 1$, deoarece prin secționare panoul de pe talpa superioară se proiectează exact peste cel de pe talpa inferioară.

Linia de influență a montanților depinde de talpa pe care se aplică $P = 1$, deoarece secțiunea corespunzătoare taie pe cele două tălpi, panouri decalate.

Se mai observă că linia de influență a montantului $6-7$ se rezumă numai la panourile adiacente, nefiind influențată de deschiderea grinzii, de aceea bara $6-7$ se numește montant suplimentar.

b) Grinzi cu tălpi paralele, sistem triunghiular (fig. 185)

Deși și această grindă are montanți, liniile lor de influență se rezumă la panourile adiacente (prin separarea nodului corespunzător), astfel încît toți sînt montanți suplimentari. Sistemul fundamental este un sistem numai cu diagonale. Liniile de influență se calculează și se construiesc ca în cazul precedent, cum arată fig. 185, *a—f*.

Sînt de făcut cîteva observații.

Din separarea nodului 5 rezultă :

$$S_{3-5} = S_{5-7}.$$

De asemenea, din separarea nodului 2 :

$$I_{2-4} = I_{0-2}.$$

Deci, spre deosebire de sistemul dreptunghiular unde efortul în tălpi diferea de la panou la panou, la sistemul triunghiular cu montanți suplimentari efortul în tălpi se schimbă la cîte două panouri, ceea ce înseamnă că aceeași secțiune a barei este valabilă pe o lungime dublă decît în sistemul dreptunghiular. Aceasta dă unele avantaje constructive, care fac ca acest sistem triunghiular cu montanți suplimentari să fie folosit la podurile metalice.

Liniile de influență ale eforturilor în diagonale sînt la fel ca cele de la sistemul dreptunghiular — ca valoare — dar semnele se schimbă cînd se trece de la un panou la cel următor, deoarece se schimbă și orientarea diagonalei. La sistemul dreptunghiular toate diagonalele sînt descendente, sau ascendente spre mijlocul grinzii, pe cînd la sistemul triunghiular diagonalele ascendente alternează cu cele descendente. (La sistemul triunghiular se poate parcurge întregul lanț de diagonale fără a parcurge montanții.)

Montanții intermediari sînt montanți suplimentari și liniile lor de influență depind de talpa pe care se aplică $P = 1$.

Dacă sistemul de sarcini mobile circulă pe talpa inferioară, barele *0 — 1* și *1—3* din stînga și *11—13*, *13—12* din dreapta se pot suprima, și grinda se numește trapezoidală.

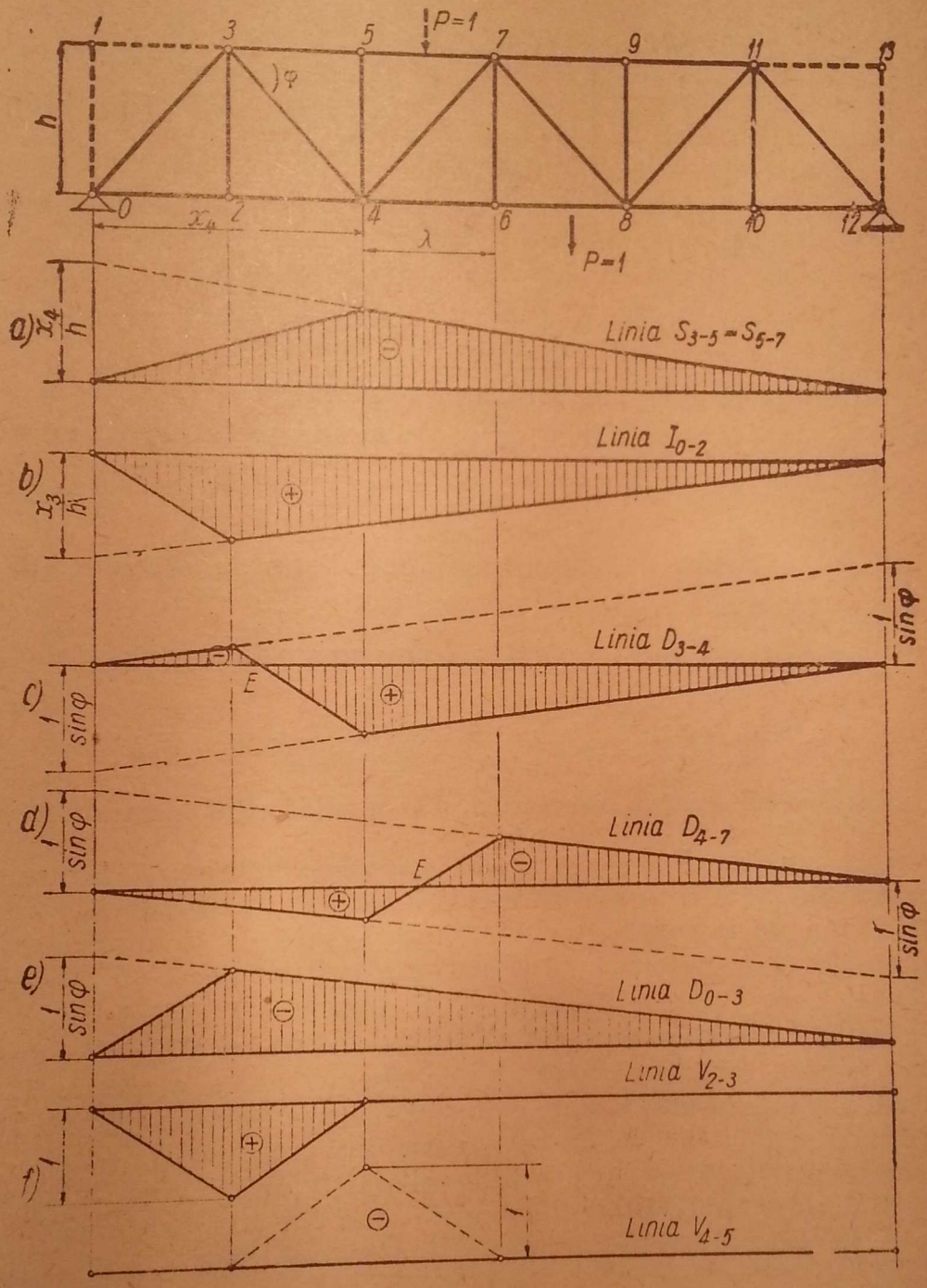


Fig. 185.

Punctul *E* din panou unde linia de influență a diagonalei (și a montanților la sistemul dreptunghiular) schimbă semnul se numește punct limită pentru diagonală, deoarece un convoi de sarcină uniform repartizată, care ar înainta de la dreapta sau de la stînga, trebuie împins pînă în *E*, pentru a găsi efortul maxim sau minim. La grinzile cu tălpi paralele, distanțele lui *E* de la capetele panoului se determină ușor. Dacă *n* este numărul total de

panouri al grinzii, iar panoul care interesează este r, și dacă se notează distanțele lui E la nodul din stînga și la cel din dreapta cu $\alpha\lambda$, respectiv, $\beta\lambda$, rezultă din considerații geometrice :

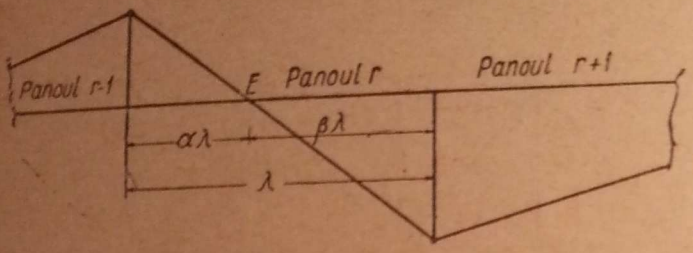


Fig. 186.

$$\alpha = \frac{r-1}{n-1}$$

$$\text{și } \beta = \frac{n-r}{n-1} \quad \text{(fig. 186).} \qquad (4.21)$$

c) Grinzi cu tălpi poligonale (fig. 187)

Făcînd secțiunea $I-I$, eforturile în barele $2-4$, $3-5$ și $3-4$ vor fi date de expresiile obținute la § 21-A-a-2.

Se presupune că $P=1$ se aplică pe talpa inferioară.

Linia S_{2-4}. Se obține din ecuația de momente în raport cu nodul 3 : $S_{2-4}\cdot h_3 + M_3 = 0$, de unde $S_{2-4} = -\frac{M_3}{h_3}$, deci se multiplică cu $-\frac{1}{h_3}$ linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea 3, de pe o grindă simplu rezemată (fig. 187, *a*).

Linia I_{3-5}. Se obține din ecuația de momente în raport cu nodul 4 :

$$-I_{3-5}\cdot h_4 + M_4 = 0, \quad \text{de unde} \quad I_{3-5} = +\frac{M_4}{h_4},$$

și este linia de influență a momentului încovoietor M_4 înmulțită cu $\frac{1}{h_4}$.

Deoarece sarcina $P=1$ se aplică pe talpa inferioară, iar punctul 4 nu se proiectează pe nici una dintre cele două antretoaze ale panoului $3-5$ secționat, linia de influență trebuie reprezentată ca la sarcini transmise indirect, adică se corectează cu o dreaptă pe panoul $3-5$ (fig. 187, *b*).

Linia D_{3-4}. Se face uz de aceeași secțiune $I-I$, folosindu-se ecuația de momente în raport cu punctul C de intersecție al celorlalte două bare secționate, pentru forțele care rămîn de aceeași parte a secțiunii.

Pentru a o interpreta și a o construi, se presupune întîi că $P=1$ se găsește între 5 și 7, adică la dreapta panoului secționat.

În acest caz, dacă se scrie echilibrul părții din stînga în ecuația de momente în raport cu C, intervin numai două forțe : reacțiunea V_1 și efortul D_{3-4} de pe partea stîngă, adică de la 3 spre 4. Deci :

$$-D_{3-4}\cdot d - V_1\cdot c = 0, \quad \text{unde} \quad V_1 = \frac{1\cdot b}{l}, \text{ și rezultă}$$

$$D_{3-4} = -\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{l}; \qquad (4.22)$$

această expresie este valabilă numai la dreapta nodului 5 și conține o singură variabilă, b. Pentru a construi dreapta corespunzătoare se iau două valori

extreme ale lui b, și anume : $b = 0$ și $b = l$ și se obțin ordonatele : zero pe reazemul din dreapta și $-\frac{c}{d}$ pe reazemul din stînga, cum se vede în fig. 187, *c*. Evident, din această dreaptă este valabilă numai porțiunea de la dreapta lui 5.

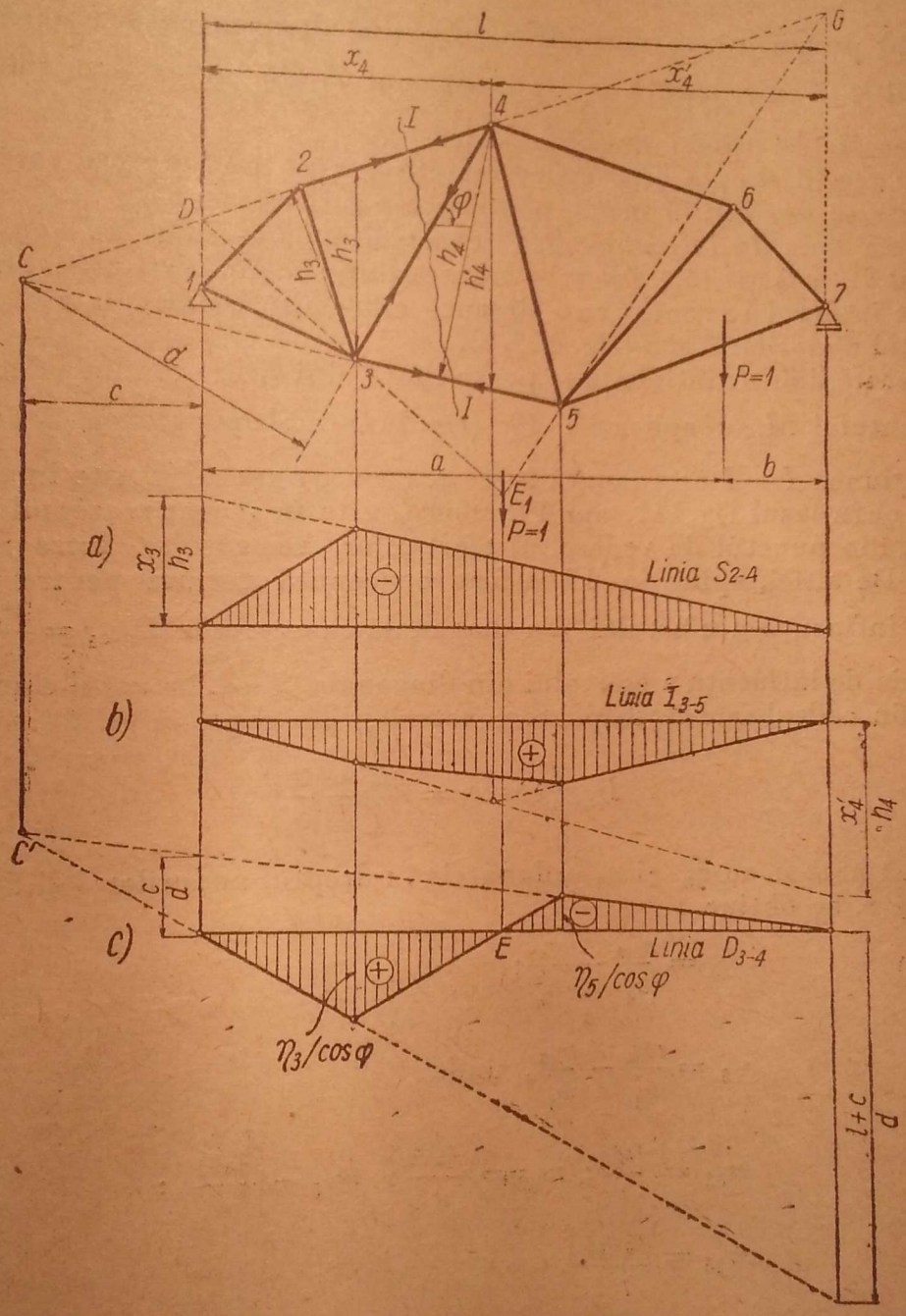


Fig. 187.

Se presupune acum că $P = 1$ se găsește la stînga panoului secționat, adică la stînga lui 3. În acest caz este mai ușor să se exprime echilibrul părții din dreapta secțiunii prin ecuația de momente în raport cu C, deoarece intervin numai două forțe : reacțiunea din dreapta V_7 și efortul D_{3-4} de pe partea

din dreapta, adică dirijat de la 4 spre 3 :

$$D_{3-4} \cdot d - V_7 \cdot (l + c) = 0, \text{ iar } V_7 = \frac{a}{l} \cdot 1, \text{ de unde}$$

$$D_{3-4} = \frac{+c}{d} \cdot \frac{a}{l} \cdot \tag{4.22'}$$

În (4.22') numai a este variabil și se obține dreapta cu ordonată nulă pe reazemul 1, și cu ordonata $\frac{l+c}{d}$ pe reazemul 7, din care este valabilă numai porțiunea de la stînga nodului 3.

Din realții simple geometrice rezultă că cele două drepte care au fost construite se vor întîlni în C', pe verticala lui C.

Avem linia de influență D_{3-4} construită pe toată grinda cu excepția panoului 3—5 secționat. Sarcinile transmițîndu-se indirect, numai la noduri, pe acest interval se vor uni cu o dreaptă extremitățile ordonatelor obținute în dreptul nodurilor 3 și 5 (fig. 187, c).

Această linie de influență se poate construi și direct, din linia de influență a momentului M_0 a aplicației 19 (fig. 111) multiplicată cu $\frac{1}{d}$, deoarece, deși secțiunea $I-I$ este făcută între reazeme, punctul C este în afara reazemelor ca în cazul fig. 111, apl. 19, unde C este în stînga reazemului A, dar de fapt, din punctul de vedere al eforturilor, se găsește între reazemele A și B. De altfel, aplicația 19 a fost concepută tocmai pentru a se găsi linia de influență a efortului din diagonală cu expresia $D_{3-4} = \frac{M_c}{d}$.

Linia de influență a efortului din diagonala 3—4, în cazul cînd punctul C iese din cadrul figurii, se poate construi și din expresia (4.12) :

$$D_{3-4} \cos \varphi = \frac{M_3}{h_3'} - \frac{M_4}{h_4'}.$$

Dacă notăm cu η_3 și η_5 ordonatele în dreptul nodurilor 3 și 5 ale liniei $D_{3-4} \cos \varphi$, se obține. :

$$\eta_3 = \frac{m_{33}}{h_4'} - \frac{m_{43}}{h_4'};$$

$$\eta_5 = \frac{m_{35}}{h_3'} - \frac{m_{45}}{h_4'}, \text{ unde}$$

$$m_{33} = \frac{x_3 x_3'}{l}; \quad m_{43} = \frac{x_4' x_3}{l}; \quad m_{35} = \frac{x_3 x_5'}{l};$$

$$m_{45} = \frac{x_4 x_5'}{l}$$

și, deci,

$$\eta_3 = \frac{x_3}{l}\left(\frac{x_3'}{h_3'} - \frac{x_4'}{h_4'}\right);$$

$$\eta_5 = \frac{x_5'}{l}\left(\frac{x_3}{h_3'} - \frac{x_4}{h_4'}\right). \tag{4.23}$$

Acestea, împărțite prin cos φ, dau valorile ordonatelor liniei de influență ale lui D_{3-4} în dreptul nodurilor 3 și 5, cu ajutorul cărora se poate construi toată linia de influență.

Formula (4.12) duce la o construcție grafică ușoară a punctului limită E.

Dacă s-ar construi diagrama momentelor pe cale grafică, cu o distanță polară H, expresia (4.12) ar deveni :

$$D_{3-4}\cos\varphi = \frac{M_3}{h_3'} - \frac{M_4}{h_4'} = H\left(\frac{m_3}{h_3'} - \frac{m_4}{h_4'}\right), \qquad \text{(a)}$$

unde m_3 și m_4 sînt segmentele în dreptul secțiunilor 3 și 4 din diagrama momentelor pe cale grafică, obținute din poligonul funicular corectat pentru sarcini indirecte prin dreapta $3'-5'$ (fig. 188).

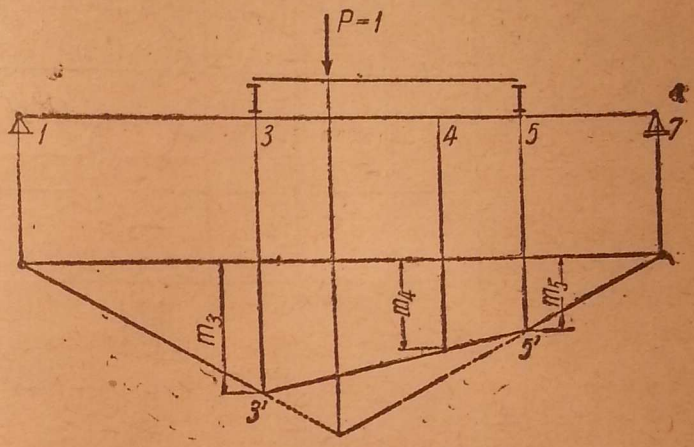


Fig. 188.

Pentru ca paranteza din formula (a) să fie nulă, adică D_{3-4} să fie nul, trebuie ca :

$$\frac{m_3}{h_3'} = \frac{m_4}{h_4'}, \qquad \text{(b)}$$

și aceasta s-ar putea obține dacă s-ar face o construcție astfel încît $m_3 = h_3'$ și $m_4 = h_4'$, care se realizează astfel : se prelungește în fig. 187 bara $2-4$ a tălpii opuse celei pe care se plimbă $P = 1$ pînă întîlnește liniile de acțiune ale reacțiunilor din reazeme în punctele D și G. Se duc apoi dreptele $D-3$ și $G-5$, care se intersectează în punctul $E_1 \cdot E_1$ va fi poziția lui $P = 1$, pentru care $D_{3-4} = 0$, și se proiectează în E pe linia de reper a liniei de influență.

Se va considera acum cazul din fig. 189 în care grinda are talpa superioară concavă. Această formă este justificată atunci cînd grinda are console (figurate punctat).

Liniile de influență ale eforturilor în tălpi nu prezintă nimic deosebit față de cele precedente.

Linia de influență D_{4-5}. Dacă se face secțiunea $I - I$, punctul de intersecție C se găsește între reazemele grinzii.

Dacă se face același raționament ca în cazul precedent, rezultă că atunci cînd $P = 1$ se găsește în dreapta lui 5 :

$$D_{4-5} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{l},$$

iar dacă $P = 1$ se găsește în stînga lui 3 :

$$D_{4-5} = \frac{l-c}{d} \cdot \frac{a}{l}$$

Cele două drepte sînt construite în fig. 189, *a*, iar pe panoul 3—5 s-a tras dreapta corespunzătoare sarcinilor indirecte.

Se remarcă identitatea acestei linii cu cea a lui M_0 din aplicația 19 (fig. 112), o interpretare fiind ușor de făcut, deoarece punctul C se găsește între reazeme, dar nu în panoul secționat.

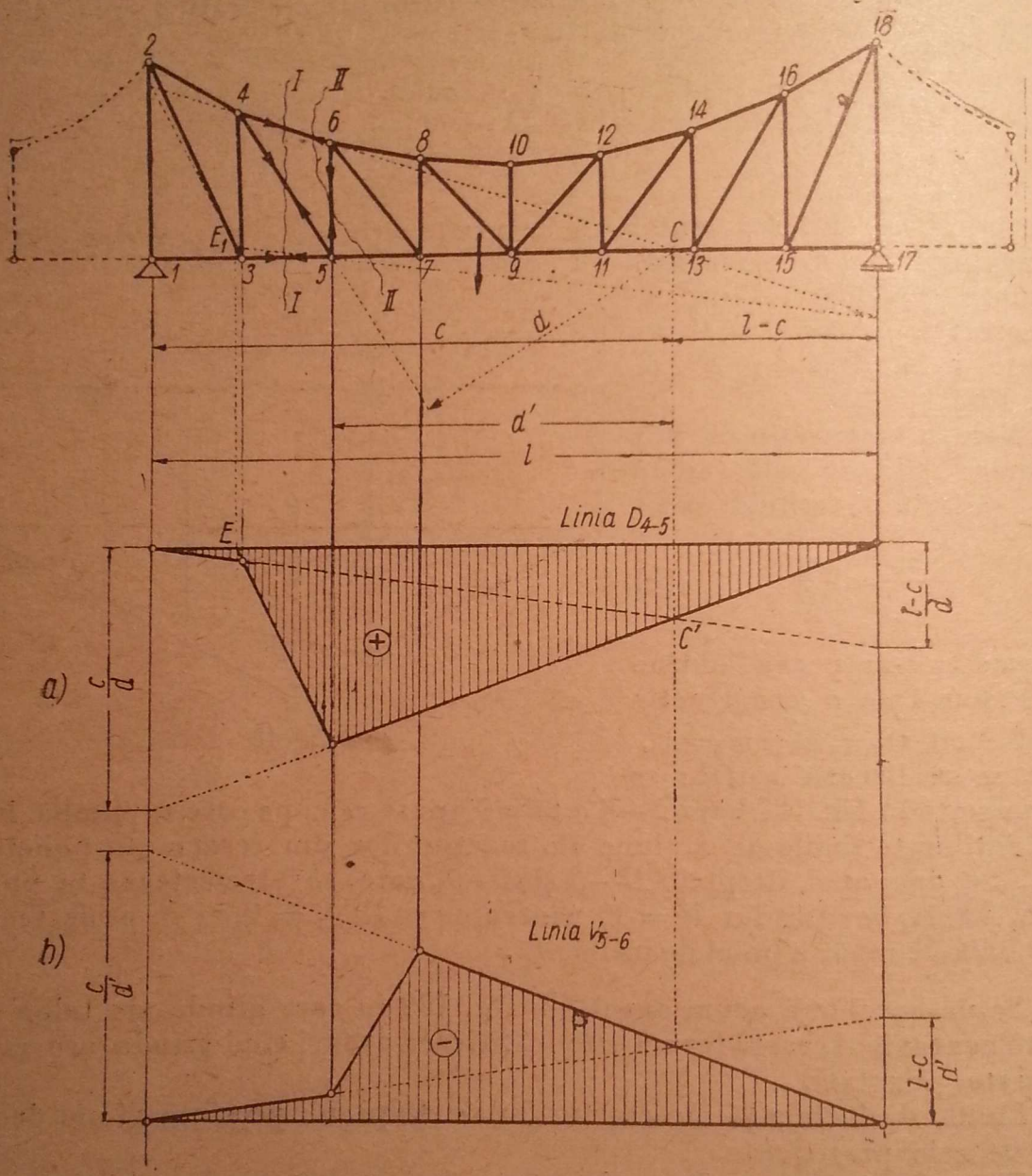


Fig. 189.

Se observă că linia de influență a lui D_{4-5} nu mai schimbă de semn, ceea ce se explică prin faptul că punctul C fiind între reazeme, momentul încovoietor respectiv este mereu pozitiv pentru încărcări în deschiderea l.

În consecință, nici punctul limită E nu mai are semnificația de pînă acum. El rămîne un punct fictiv, în afara panoului și se construiește ca în cazul precedent.

Secțiunea $II - II$ dă linia V_{5-6} reprezentată în fig, 189, *b*.

d) Grinzi cu diagonale în K

De obicei, au tălpile paralele (contravîntuiri orizontale la poduri metalice), cum se vede în fig. 190.

Liniile I_{7-10}, S_{9-12}, D_{8-10}, D_{8-12}. Cum s-a văzut în fig. 164, prin secțiunile $I-I$, $II-II$ și separarea nodului 8 se obțin:

$$I_{7-10} = \frac{M_9}{h}; \quad S_{9-12} = -\frac{M_7}{h}; \quad D_{8-10} = -D_{8-12} = \frac{T_{7-10}}{2\sin\varphi},$$

iar liniile de influență corespunzătoare sînt construite în fig. 190, *a* și *b*.

Liniile V_{7-8} și V_{8-9}. Sarcina se aplică pe talpa inferioară. Din separarea nodului 9 (fig. 190, *c'*) rezultă:

$$V_{8-9} + D_{5-9}\sin\varphi = 0; \text{ dar cum } D_{5-9} = -\frac{T_{4-7}}{2\sin\varphi}, \text{ se obține:}$$

$$V_{8-9} = \frac{T_{4-7}}{2} \text{ (fig. 190, } c\text{).}$$

Din separarea nodului 7 (fig. 190, *d'*) rezultă:

$$V_{7-8} + D_{5-7}\sin\varphi - P_7 = 0; \text{ dar cum } D_{5-7} = \frac{T_{4-7}}{2\sin\varphi},$$

se obține:

$$V_{7-8} = -\frac{T_{4-7}}{2} + P_7 \text{ (fig. 190, } d\text{).}$$

Deci, la ordonatele liniei de influență $-\frac{T_{4-7}}{2}$ se va adăuga valoarea lui P_7, care are o variație liniară locală avînd valori nule în nodurile *10* și *4*, și valoarea 1 în nodul 7.

Linia V_{13-14}. Din separarea nodului *14* (fig. 190, *e'*) rezultă:

$$V_{13-14} + D_{11-14}\sin\varphi + D_{14-16}\sin\varphi = 0,$$

dar

$$D_{11-14} = -\frac{T_{10-13}}{2\sin\varphi} \text{ și } D_{14-16} = \frac{T_{13-15}}{2\sin\varphi},$$

deci

$$V_{13-14} = \frac{T_{10-13}}{2} - \frac{T_{13-15}}{2}.$$

Dacă se face scăderea acestor lunii (fig. 190, *e*), rămîne numai suprafața hașurată între nodurile *10* și *15*, care, raportată la orizontală, reprezintă un triunghi ca în fig. 190, *e''*.

B. SISTEME COMPUSE

La astfel de grinzi liniile de influență se pot construi ca la sistemele simple, cel puțin pentru unele bare în măsura în care se pot face secțiuni și separări de noduri care să ducă la expresii ușor de construit; altă cale mai practică este cea care a fost aplicată și pentru eforturi din sarcini permanente, adică descompunerea sistemului compus, într-un sistem fundamental simplu și o serie de sisteme suplimentare tot simple, ale căror reazeme să fie noduri în sistemul fundamental, pe talpa pe care se deplasează sarcina mobilă $P = 1$.

Se construiește apoi linia de influență atît în sistemul fundamental, cît și în sistemele suplimentare, și apoi se suprapun. Ca și la sarcini fixe vor fi, în general, trei categorii de bare:

1) Bare ale sistemului fundamental peste care nu se suprapun bare ale sistemului suplimentar; liniile lor de influență rămîn cele din sistemul fundamental.

2) Bare ale sistemului fundamental peste care se suprapun bare ale sistemului suplimentar; liniile de influență se vor obține din suprapunerea liniilor de influență pe cele două sisteme.

3) Bare ale sistemului suplimentar, care nu se suprapun peste bare ale sistemului fundamental; liniile lor de influență rămîn cele din sistemul suplimentar. Aceste bare se mai numesc și bare suplimentare.

Sistemul compus din fig. 191, *a* este alcătuit din sistemul fundamental din fig. 191, *b* și din sistemele suplimentare din fig. 191, *c*. Pe această cale se poate obține ușor orice linie de

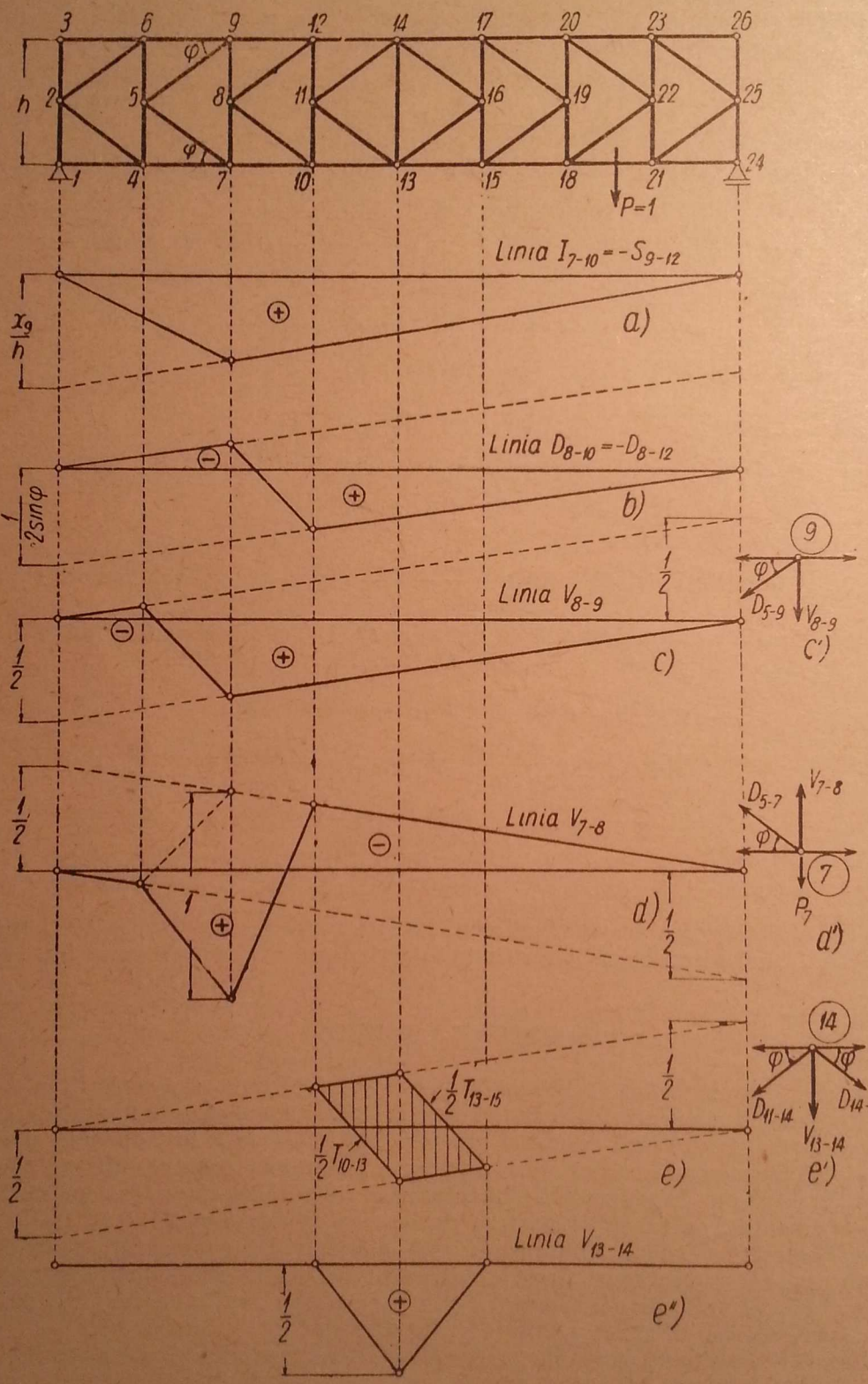

3 6 9 12 14 17 20 23 26
h
2 5 8 11 16 19 22 25
φ
1 4 7 10 13 15 18 21 24
P=1
Linia $I_{7-10} = -S_{9-12}$
$\frac{x_9}{h}$
a)
Linia $D_{8-10} = -D_{8-12}$
$\frac{1}{2\sin\varphi}$
b)
Linia V_{8-9}
$\frac{1}{2}$
c)
9
D_{5-9}
V_{8-9}
C')
Linia V_{7-8}
d)
D_{5-7}
V_{7-8}
7
P_7
d')
$\frac{1}{2}T_{13-15}$
$\frac{1}{2}T_{10-13}$
e)
14
D_{11-14}
D_{14-16}
V_{13-14}
e')
Linia V_{13-14}
e'')

Fig. 190.

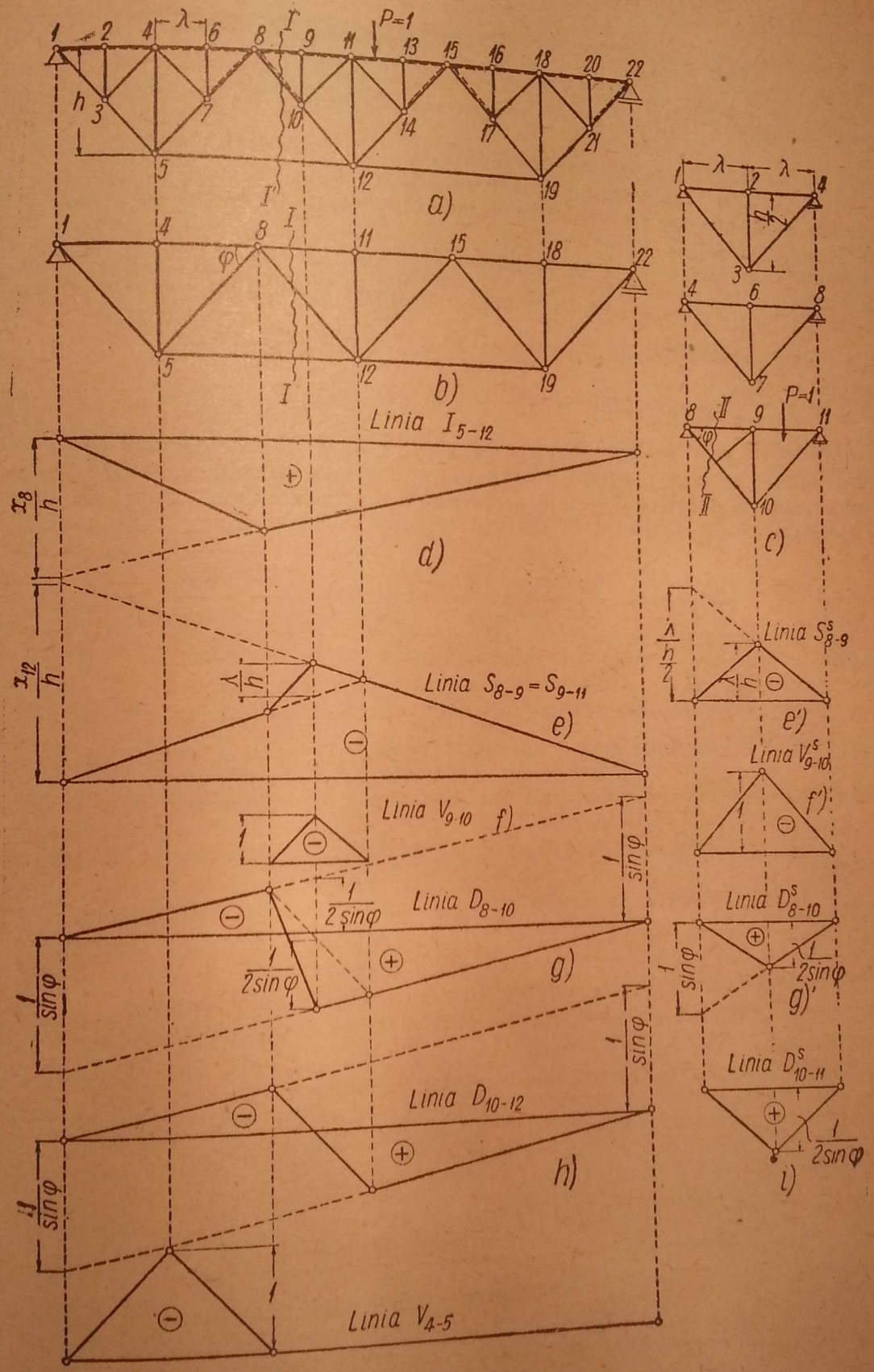

P=1
Linia I_{5-12}
Linia $S_{8-9}=S_{9-11}$
Linia V_{9-10}
Linia D_{8-10}
Linia D_{10-12}
Linia V_{4-5}
Linia S^s_{8-9}
Linia V^s_{9-10}
Linia D^s_{8-10}
Linia D^s_{10-11}
a)
b)
c)
d)
e)
e')
f)
f')
g)
g')
h)
i)

Fig. 191.

influență. Sarcina mobilă se aplică pe talpa superioară. Pe aceeași talpă se găsesc și reazemele sistemelor suplimentare.

Linia I_{5-12}. Aparține numai sistemului fundamental, și se determină prin secțiunea $I-I$ în acesta (fig. 191, *b*):

$$I_{5-12} = I^0_{5-12} = \frac{M_8}{h}$$ și este reprezentată în fig. 191, *d*.

Dacă s-ar fi făcut secțiunea $I'-I'$ în sistemul compus (fig. 191, *a*), s-ar fi obținut același rezultat.

Bara *5—12* face parte din categoria întîi.

Linia S_{8-9}. Din separarea nodului *9* rezultă că $S_{8-9} = S_{9-11}$.

Această bară aparține sistemului fundamental, ca bară *8—11* (*b*), și, în același timp, și sistemului suplimentar, ca bară *8—9* (*c*).

În sistemul fundamental, prin secțiunea $I-I$ avem:

$S^0_{8-11} = -\frac{M_{12}}{h}$; construcția este reprezentată în fig. 191, *e*.

În sistemul suplimentar, prin secțiunea $II-II$, avem (fig. 191, *c*):

$S^s_{8-9} = -\frac{M_{10}}{h/2}$ și este reprezentată în fig. 191, *e'*.

Trebuie suprapus *e'* peste *e*: $S_{8-9} = S^0_{8-9} + S^s_{8-9}$. Se observă că prin această suprapunere partea din dreapta a liniei de influență, *22—11*, se continuă spre stînga, în linie dreaptă, pînă în dreptul nodului *9*, deoarece diferența de ordonate dintre cele două ramuri ale liniei de influență a sistemului fundamental în dreptul nodului *9* este:

$$\frac{x_{12}}{h}\cdot\frac{\lambda}{l} + \frac{x'_{12}}{h}\cdot\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda}{lh}\left(x_{12} + x'_{12}\right) = \frac{\lambda l}{lh} = \frac{\lambda}{h}$$

atît cît este și ordonata vîrfului triunghiului din *e'*.

Deci, barele S_{8-9} și S_{9-11} fac parte din categoria a doua.

Același rezultat se obține dacă se face secțiunea $I'-I'$ în sistemul compus:

$S_{8-9} = -\frac{M_{12}}{h}$; sarcinile fiind transmise la noduri și panoul secționat fiind panoul *8—9*, partea din dreapa ține pînă în *9* și se racordează cu partea din stînga prin dreapta din panoul *8—9*.

Linia V_{9-10}. Această bară aparține numai sistemului suplimentar și din separarea nodului *9* se obține:

$V^s_{9-10} = P_9$, și reprezintă un triunghi cu ordonata -1 în dreptul lui *9*. Deoarece $V^0_{8-9} = 0$, rezultă că $V_{9-10} = V^s_{9-10}$ (fig. 191, *f* și *f'*).

Deci, această bară face parte din categoria a treia.

Același rezultat se obține din izolarea nodului *9* al sistemului compus.

Linia D_{8-10}. Face parte atît din sistemul fundamental, cît și din cel suplimentar:

$D_{8-10} = D^0_{8-12} + D^s_{8-10}$.

Din secțiunea $I-I$ în sistemul fundamental se obține:

$D^0_{8-10} = \frac{T_{8-11}}{\sin\varphi}$ și este reprezentată în fig. 191, *g*.

În sistemul suplimentar prin secțiunea $II-II$ se obține:

$D^s_{8-10} = \frac{M_9}{h'_9} = \frac{M_9}{\lambda \sin\varphi}$ și este reprezentată în fig. 191, *g'*.

Dacă se suprapune D^s_{8-10} peste D^0_{8-10} se observă că ordonata vîrfului triunghiului mic, care este egală cu $\frac{1}{2\sin\varphi}$, face ca partea din dreapta a lui D^0_{8-10} să se prelungească cu un panou.

Bara D_{8-10} face parte din categoria a doua.

Același rezultat se obține direct din secțiunea $I'-I'$ în sistemul compus:

$D_{8-10} = \frac{T_{8-9}}{\sin\varphi}$, panoul secționat fiind acum *8—9*.

Linia D_{10-12}. Face parte numai din sistemul fundamental și, deci :

$$D_{10-12} = D^0_{8-12} = \frac{T_{8-11}}{\sin \varphi}$$ (fig. 191, *h*).

Această bară intră în categoria întîi.

În mod direct, pe sistemul compus această linie de influență se construiește mai greu, deoarece nu există o secțiune care să-i dea expresia direct. Trebuie să se facă o secțiune și o izolare de nod.

Linia D_{10-11}. Face parte numai din sistemul suplimentar și, deci :

$D_{10-11} = D^s_{10-11}$ și este aceeași ca linia D^s_{8-10}

Construcția este reprezentată în fig. 191, *i*.

Face parte din categoria a treia.

Linia V_{4-5}. Face parte numai din sistemul fundamental, și linia de influență se obține prin separarea nodului *4* în fig. 191, *b* :

$$V_{4-5} = V^0_{4-5} = -P_4$$ (fig. 191, *j*).

Face parte din categoria întîi.

Liniile D_{10-11} și V_{4-5}, deși sînt foarte simple, ar fi fost mai greu de construit direct din sistemul compus, deoarece nu se pot încadra în secțiuni care să taie numai trei bare. Se vede deci ce avantaj are metoda descompunerii sistemului compus în sisteme simple.

În concluzie, rezultă că din categoria întîi fac parte toate barele peste care nu se suprapun barele sistemului suplimentar. Acestea sînt : *3—5, 5—7, 12—10, 12—14, 19—17, 19—21, 5—12, 12—19, 4—5, 11—12, 18—19.*

Din categoria a doua fac parte : toată talpa superioară și barele : *1—3, 7—8, 8—10, 14—15, 15—17, 21—22.*

Din categoria a treia fac parte : montanții scurți suplimentari : *2—3, 6—7, 9—10, 13—14, 16—17, 20—21* și diagonalele scurte suplimentare : *3—4, 4—7, 10—11, 11—14, 17—18, 18—21.*

Acestea sînt metodele uzuale de a construi liniile de influență pe cale analitică. Deși au fost studiate numai grinzile cu o singură deschidere, fără console, totuși, ca și la grinzile drepte, este foarte ușor să se construiască

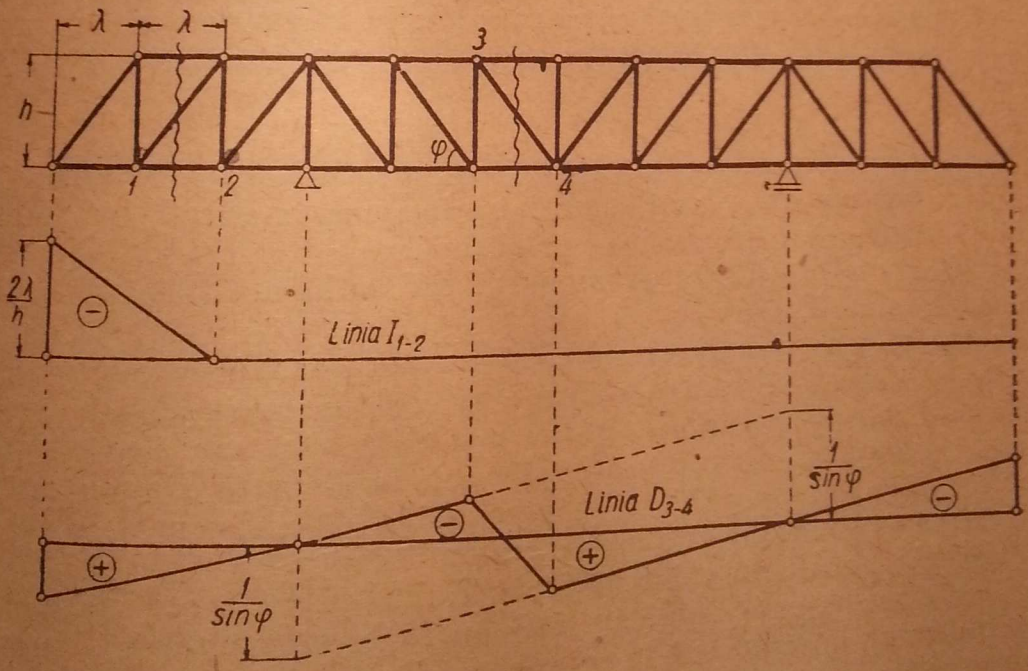


Fig. 192.

liniile de influență ale barelor pe porțiunile în console, pe baza celor stabilite pînă acum (fig. 192). De asemenea, în cazul cînd sistemul general este al-

căutuit după modelul grinzilor drepte cu console și articulații, liniile de influență se pot construi fără să fie nevoie de explicații suplimentare (fig. 193).

Acestea se vor vedea mai intuitiv cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Nu ne ocupăm cu linii de influență pe cale analitică la sisteme complexe (de exemplu prin metoda înlocuirii barelor), deoarece sînt greu de executat și avem căi mult mai rapide prin deplasări virtuale, în special sub forma

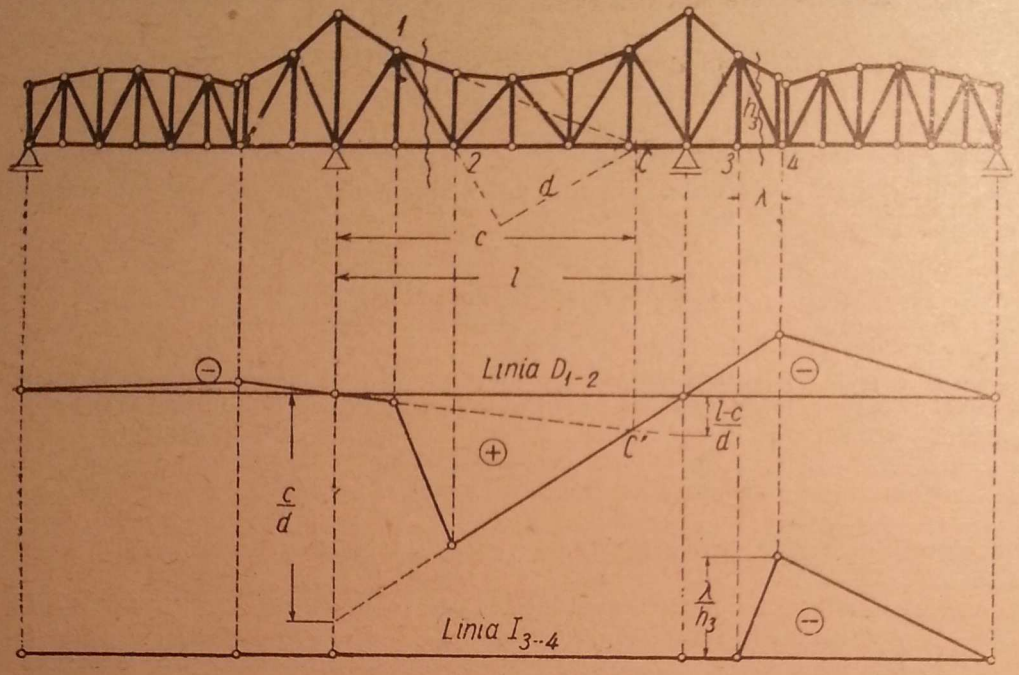


Fig. 193.

diagramelor vitezelor, așa cum am văzut chiar la început în Cap. II § 11—C, metodă ce va fi tratată mai în detaliu în alt paragraf.

§ 23. EFORTURI MAXIME ÎN BARE

Efortul maxim într-o bară se obține prin așezarea convoiului mobil față de linia de influență, astfel încît să se obțină :

$N = \Sigma P_i \cdot \eta_i$ în valoare maximă, η_i fiid ordonata liniei de influență în dreptul sarcinii P_i.

Aceasta se face prin încercări. Se știe că totdeauna o sarcină trebuie să se găsească într-unul dintre vîrfurile liniei de influență.

În cazul grinzii cu zăbrele simplu rezemate, fără console, se pot folosi rezultatele care au fost obținute la grinda dreaptă simplu rezemată, pentru M_{max} și T_{max}, în măsura în care liniile de influență în bare au aceeași formă ca liniile M și T de la grinda dreaptă.

Astfel, la grinzile cu tălpi paralele, liniile de influență ale eforturilor în tălpi sînt aceleași cu liniile de influență ale momentelor încovoietoare într-o grindă simplu rezemată, la care secțiunile x se iau în dreptul nodurilor. Deci, efortul maxim într-o talpă se poate obține din momentul încovoietor maxim pe grinda dreaptă, prin simplă împărțire cu înălțimea grinzii h. Momentul maxim în secțiunea corespunzătoare nodului respectiv se poate găsi pe cale analitică și pe cale grafică, cum s-a arătat în Cap. III § 15—D.

La grinzi cu tălpi paralele, eforturile maxime în diagonale și montanți se deduc direct din forța tăietoare maximă pe grindă cu sarcini transmise indirect (v. Cap. III, § 15—C).

Dacă grinda are contur poligonal, problema pentru eforturile în tălpi este aceeași ca la grinda cu tălpi paralele și se reduce la căutarea momentului

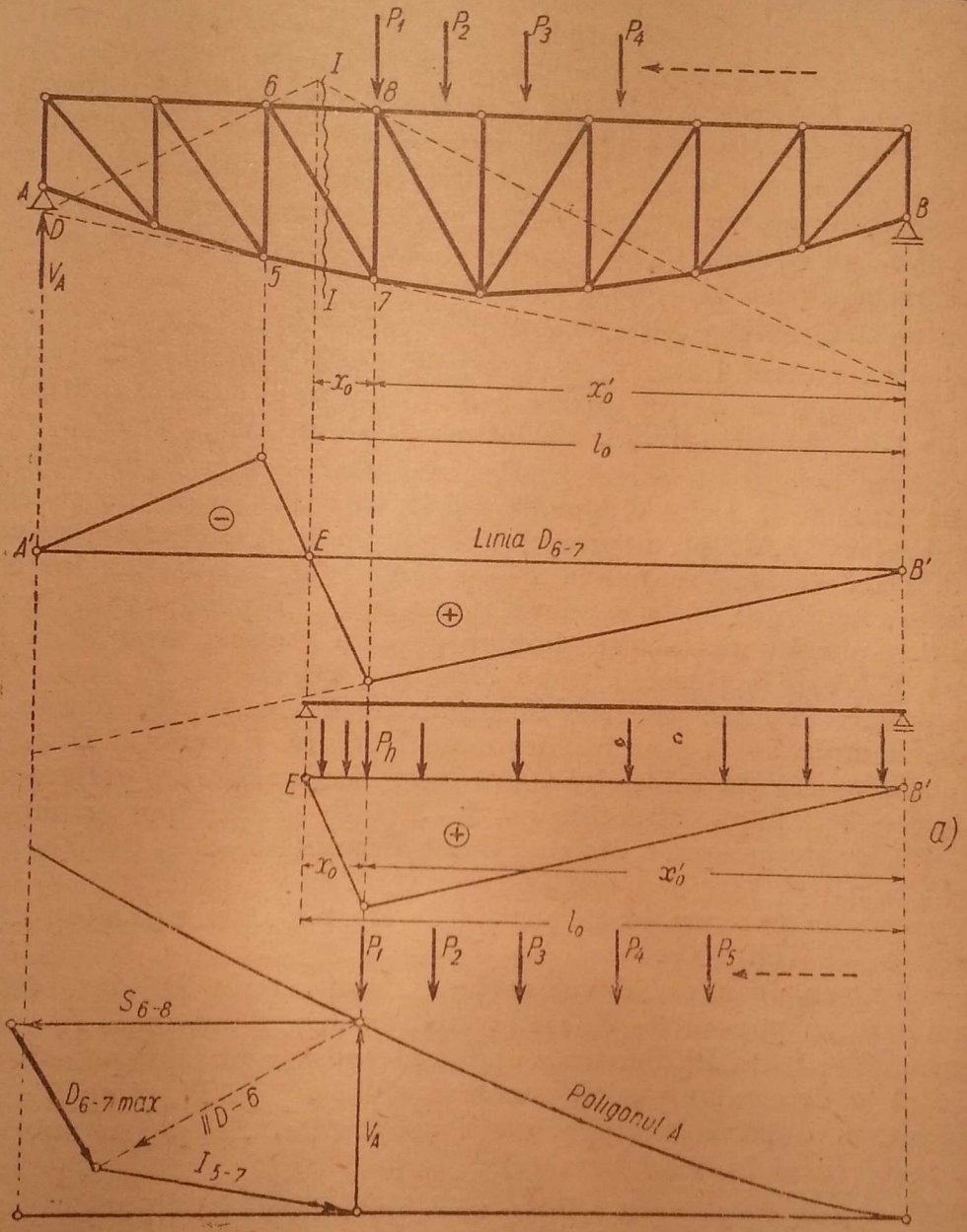


Fig. 194.

maxim pe grindă. La fiecare bară se va împărți momentul maxim cu h corespunzător.

Pentru eforturile din diagonale și montanți, pe grinda cu contur poligonal, problema se schimbă, deoarece cele două ramuri principale ale liniei de influență nu mai sînt paralele și deci nu ne mai putem referi la forța tăietoare (fig. 194).

Să determinăm efortul $D_{6-7\ max}$ pentru un convoi care înaintează de la dreapta spre stînga.

Se poate proceda prin încercări, punînd întîi pe P_1 în 8, apoi deplasîndu-l și punînd P_2 în 8, și așa mai departe, calculînd de fiecare dată $\Sigma P_i \cdot \eta_i$ și comparînd valorile.

Numărul încercărilor se poate micșora astfel :

Deoarece linia de influență D_{6-7} are semne diferite pe deschiderea grinzii, va trebui încărcată numai regiunea pozitivă de la punctul limită E pînă în reazemul B. Dacă se admite că $D_{6-7\,max}$ are loc fără ca vreo forță să treacă la stînga punctului limită E, linia de influență D_{6-7} pe intervalul care interesează, anume $E-B'$, are aceeași formă ca linia de influență a momentului încovoietor pe o grindă simplu rezemată EB' de deschidere l_0, într-o secțiune situată la x_0, respectiv x_0', de reazeme (fig. 194, *a*).

Astfel, se obține $D_{6-7\,max}$, cînd M_{x0} va fi maxim pe grinda de deschidere l_0. Se pot folosi relațiile (3.33), relativ la deschiderea l_0, care arată exact ce forță trebuie pusă în dreptul nodului 8

Așa se determină poziția convoiului pentru $D_{6-7\,max}$.

Valoarea efortului $D_{6-7\,max}$ se poate obține din momentul încovoietor maxim, în secțiunea x_0 pe grinda EB', înmulțindu-l cu raportul dintre înălțimile triunghiurilor liniilor de influență ale lui D_{6-7} și M_{x0}.

Se poate face și un calcul grafic, mai ales cînd trebuie determinate eforturile maxime în toate diagonalele și în toți montanții. Se construiește poligonul A (v. § 15, C – b). Se prespune că poziția de maxim este cea cu P_1 în nodul 8. Dacă se face secțiunea $I - I$ (fig. 194), rezultanta forțelor din stînga este reacțiunea V_A a cărei valoare o găsim în poligonul A, în dreptul nodului 8. Aplicînd metoda secțiunilor pe cale grafică, trebuie să se descompună V_A care acționează după direcția verticală în A, după cele trei bare secționate. Pentru aceasta se prelungește una dintre barele secționate, de exemplu $5-7$, pînă înlîlnește pe V_A în D, și punctul D se unește cu nodul 6, intersecția celorlalte două bare secționate. În poligonul A se descompune V_A după direcțiile lui $5-7$ și $D-6$ și apoi componenta, după $D-6$, se descompune din nou după direcțiile $6-8$ și $6-7$ și astfel se obține D_{6-7max}.

Să presupunem acum că în poziția de efort maxim primele forțe intră în panoul $6-7$ (fig. 195).

În acest caz, în nodul 6 va acționa componenta P' dată de forțele care au intrat în panoul $6-8$, astfel încît în stînga secțiunii $I - I$ rămîn reacțiunea V_A și forța P'. Pentru a aplica metoda secțiunilor pe cale grafică, ar trebui să se determine poziția rezultantei lui V_A și P', și apoi să se facă descompunerea după cele trei direcții secționate. Se poate evita aflarea poziției rezultantei în felul următor :

Forțele V_A, P', S_{6-8}, D_{6-7} și I_{5-7} care acționează pe partea din stînga secțiunii $I - I$ trebuie să fie în echilibru. Dar, pe de o parte, V_A și I_{5-7} sînt concurente în D, deci rezultanta lor parțială R' va trece prin D, iar pe de altă parte, celelalte forțe P', S_{6-8} și D_{6-7} sînt concurente în 6, deci rezultanta lor parțială va trece prin 6. Cele două rezultante parțiale trebuie să-și facă echilibru, deci ele vor acționa după direcția $D-6$. Se poate afla rezulanta parțială R' din D în felul următor : se cunosc V_A care este ordonata în poligonul A, în dreptul forței P_1, și două direcții : $D-6$ după care acționează R' și $5-7$. Se construiește triunghiul lor în poligonul A. Parcurgînd acest triunghi în același sens, se obțin I_{5-7} și rezulztanta R' care acționează în 6 (punctat în fig. 195).

În extremitatea ei punem pe P' și cu cele două direcții $6-8$ și $6-7$ se închide poligonul, astfel încît R' să fie rezultanta lui S_{6-8}, D_{6-7} și P'. Astfel se obține $D_{6-7\,max}$.

Pentru a obține D_{6-7min} trebuie încărcată partea din stînga liniei de influență, și raționamentul de mai sus se repetă pentru porțiunea AE din fig. 194. Pe cale grafică trebuie folosit poligonul B al reacțiunii din B.

Pentru montantul $7-8$, poziția convoiului fiind aceeași ca pentru diagonala D_{6-7}, spre a folosi construcția grafică precedentă (fig. 195), se

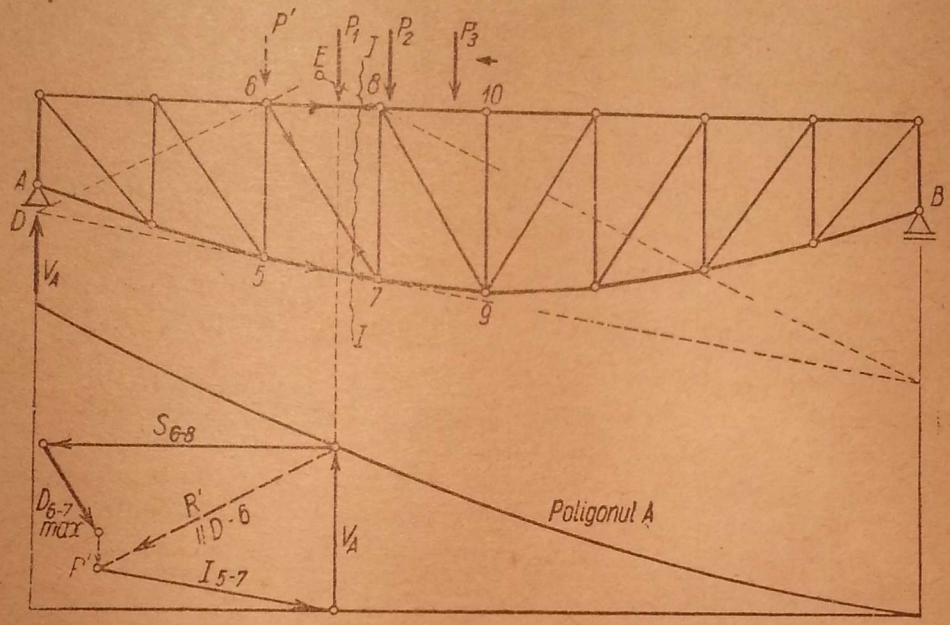


Fig. 195.

face uz tot de secțiunea $I-I$, și apoi, cu I_{5-7} și D_{6-7} aflate se face echilibrul nodului 7 care dă pe $V_{7-8\,max}$. Efectuarea unei secțiuni care să taie barele $6-8$, $7-8$ și $7-9$ nu ar fi îngăduit considerațiile din fig. 195.

În aplicarea criteriului pentru găsirea poziției celei mai defavorabile a convoiului trebuie să se țină seamă că, în cazul cînd prima sarcină este mică în raport cu celelalte, se poate ca ea să treacă dincolo de punctul limită E. La determinarea efortului pe cale grafică, acest lucru nu modifică cele de mai sus, atît timp cît forța P_1 nu trece în stînga panoului.

Aplicația 44. Să se determine liniile de influență ale eforturilor în barele caracteristice din grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 196.

Indicație. Se folosește metoda secțiunilor. Secțiunea $I-I$ determină liniile eforturilor I_{6-8}, S_{7-9} și D_{7-8}, iar secțiunea $II-II$, linia V_{6-7}. Linia V_{4-5} se obține prin secțiunea $III-III$ și ecuația de momente în raport cu punctul C, iar linia D_{3-4}, prin secțiunea $IV-IV$ și ecuația de momente în raport cu același punct C.

Aplicația 45. Să se determine liniile de influență ale eforturilor în barele caracteristice ale sistemului din fig. 197.

Indicație. Partea $C-D$ a sistemului este o grindă independentă care reazemă în D și pe consola grinzii ABC în C. Deci, alura generală a liniilor de influență va fi cea de la grinzile drepte cu console și articulații. Grinda independentă $C-D$ nu reprezintă vreo particularitate, iar pentru liniile de influență ale eforturilor din grinda ABC, partea CD va fi reprezentată printr-o dreaptă cu ordonata nulă în D.

Linia V_1. Se face secțiunea $I-I$ și se folosește ecuația de momente în raport cu punctul E, unde se întîlnesc cele două tălpi secționate, pentru partea din dreapta secțiunii $I-I$. Rezultă

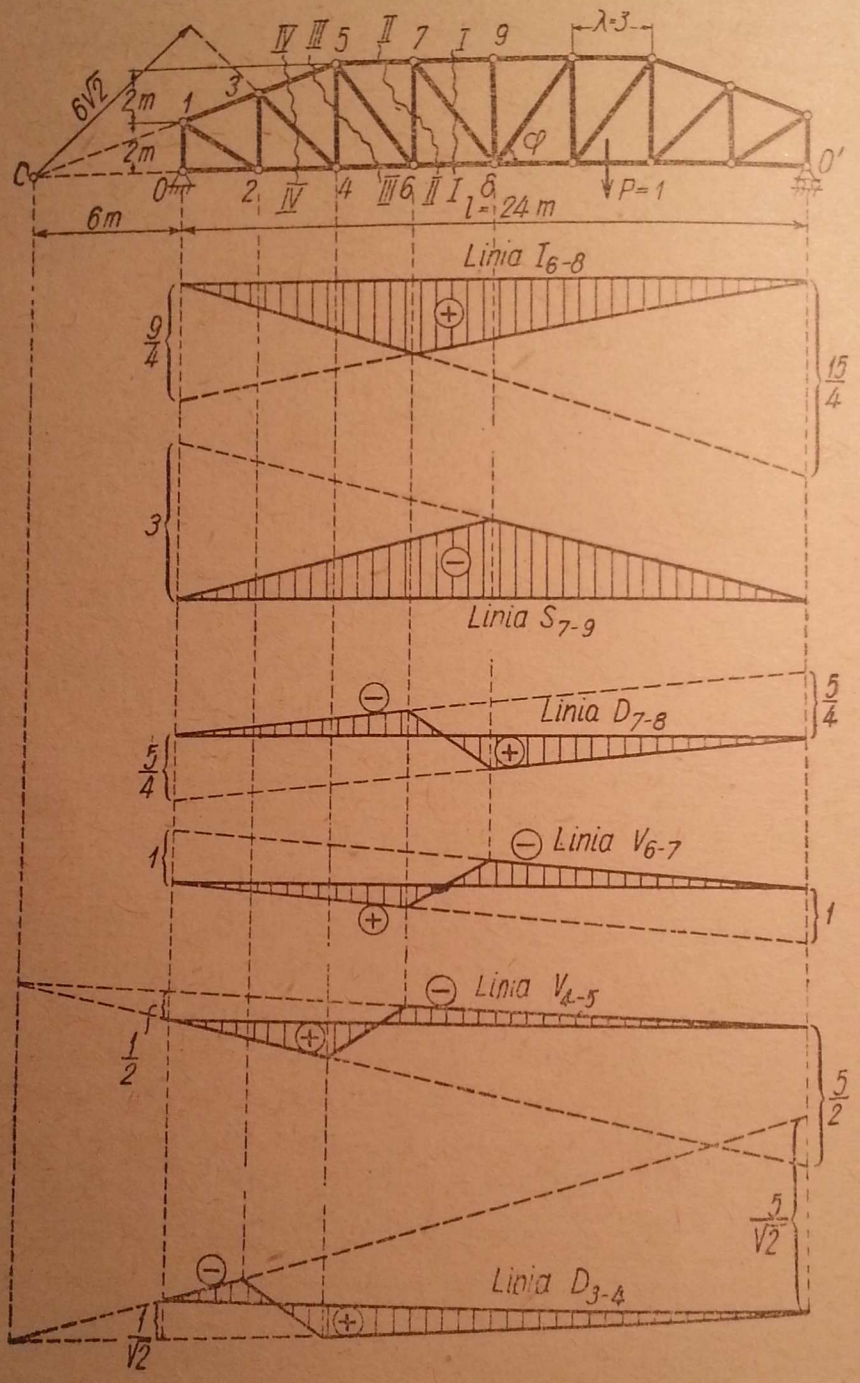

λ=3
6√2
2m
2m
6m
P=1
l=24 m
Linia I_{6-8}
Linia S_{7-9}
Linia D_{7-8}
Linia V_{6-7}
Linia V_{4-5}
Linia D_{3-4}
9/4
15/4
3
5/4
5/4
1
1
1/2
5/2
5/√2
1/√2

Fig. 196.

atunci că sarcinile de la stînga montantului V_1 nu produc efort în această bară, iar cînd $P = 1$ se găsește la dreapta lui V_1 avem : $V_1 \cdot d_1 + 1 \cdot b_1 = 0$, de unde : $V_1 = -\frac{1}{d_1} \cdot b_1$, care este reprezentată în figură de dreapta punctată $C'E'$. Din această dreaptă este valabil un singur punct, C'. La stînga lui trebuie corectată linia pentru sarcini indirecte, iar la dreapta lui, linia de influență este reprezentată de $C' - D'$.

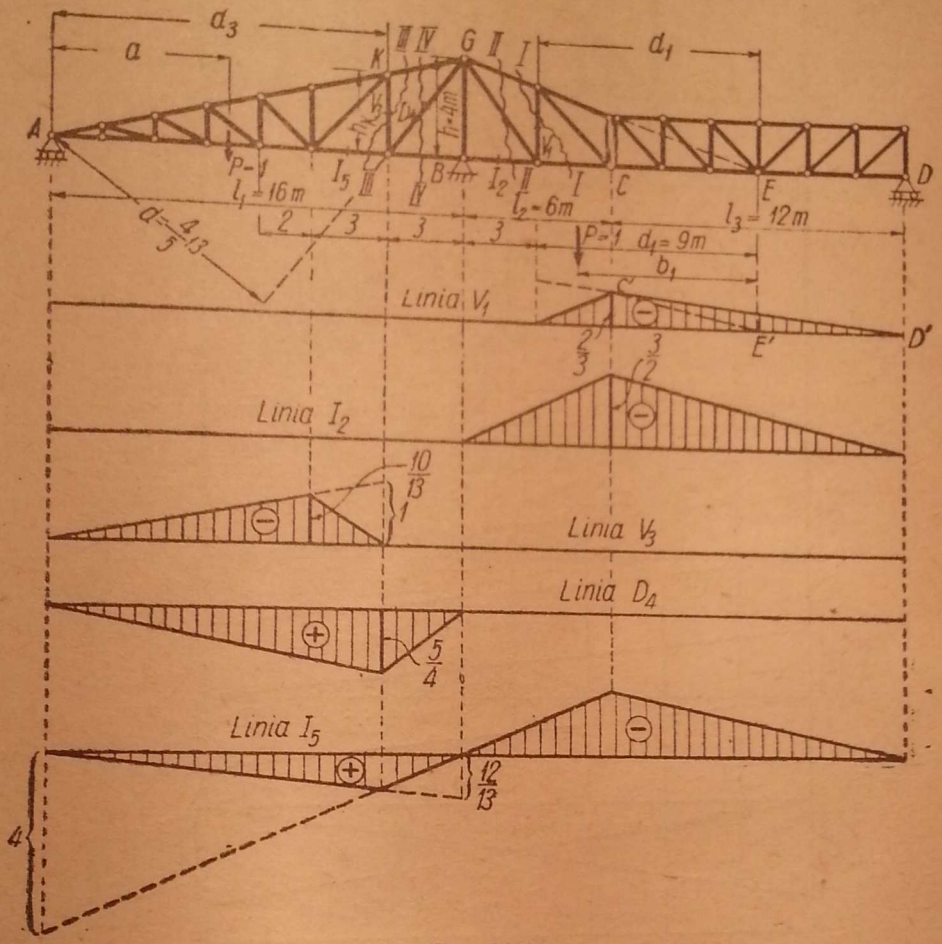


Fig. 197.

Linia I_2. Se face secțiunea $II-II$ și se folosește ecuația de momente în raport cu G : rezultă $I_2 = \frac{M_B}{h}$, adică linia lui I_2 se deduce din linia momentului încovoietor pe reazem într-o grindă cu console și articulații.

Linia V_3. Se face secțiunea $III-III$ și se exprimă ecuația de momente a părții din stînga în raport cu A, de unde rezultă că sarcinile de la dreapta lui V_3 nu produc efort în acest montant.

Pentru $P = 1$ între A și V_3 rezultă :

$V_3 \cdot d_3 + 1 \cdot a = 0$; $V_3 = -\frac{1}{d_3} \cdot a$, o dreaptă cu ordonata teoretică 1 în dreptul lui V_3, dar pe panoul secționat din stînga lui V_3 se face corecția pentru sarcini indirecte.

Linia D_4. Se scrie ecuația de momente în raport cu A pentru forțele de la stînga secțiunii $IV-IV$.

Aceleași observații de la V_3.

Linia I_5. Se face secțiunea $III-III$ și se scrie ecuația de momente în raport cu punctul K : $I_5 = \frac{M_K}{h_K}$; $\left(h_K = \frac{13}{4}\text{ m}\right)$, ceea ce înseamnă că I_5 se deduce din linia de influență a momentului încovoietor M_K într-o grindă cu console și articulații.

Aplicația 46. Să se construiască liniile de influență caracteristice ale eforturilor din barele sistemului compus din fig. 198.

Indicație. Se desparte sistemul compus în sistemele suplimentare și sistemul fundamental, astfel încît reazemele sistemelor suplimentare să coincidă cu nodurile tălpii inferioare, deoarece $P = 1$ se deplasează pe talpa inferioară. Sistemele suplimentare sînt reprezentate

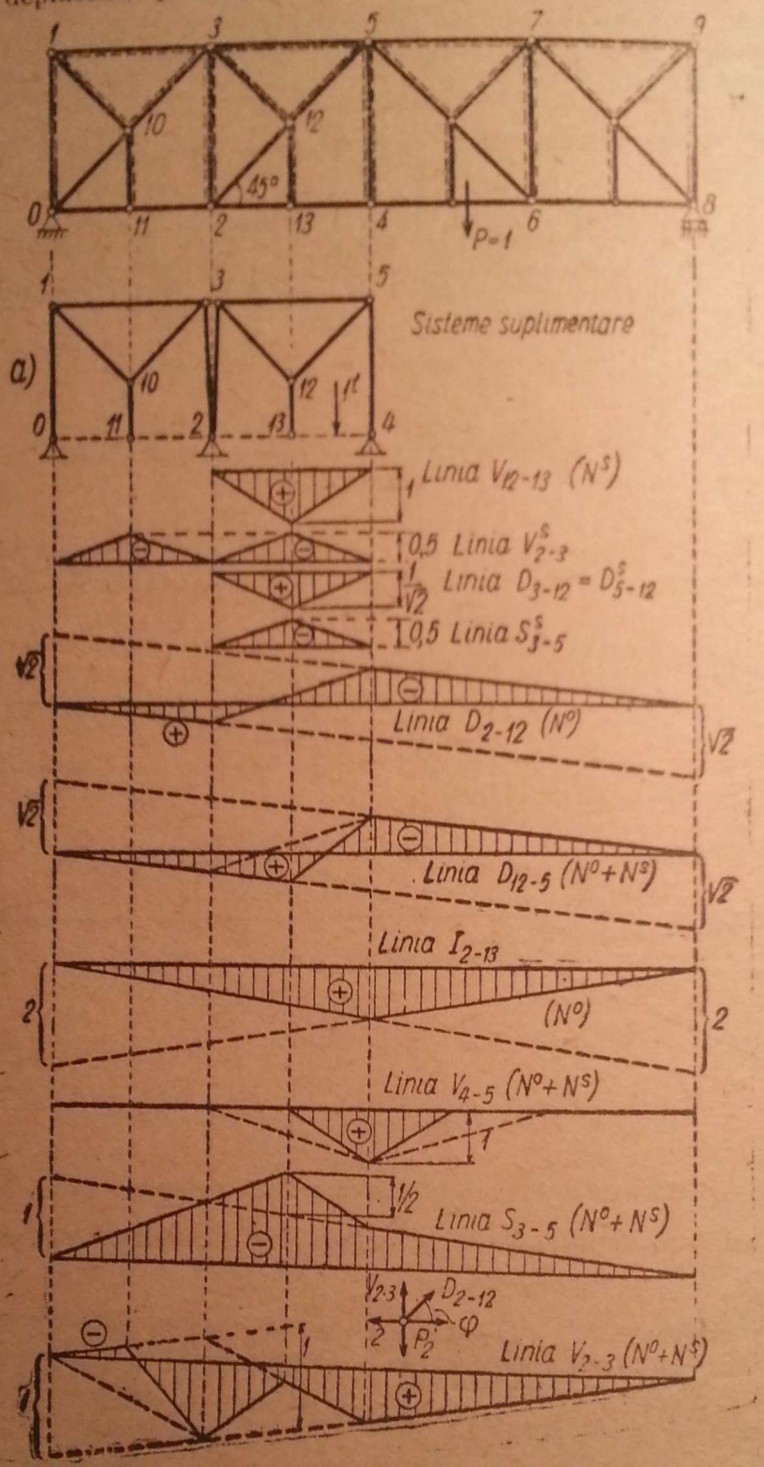


Fig. 198.

în fig. 198, *a*. Se construiesc apoi în mod obișnuit liniile N^0, N^s și $N = N^0 + N^s$. Astfel, linia V_{2-3} se obține din V^0_{2-3} la care trebuie să se adauge linia V^s_{2-3}:

$$V_{2-3} = V^0_{2-3} + V^s_{2-3}.$$

Același rezultat se obține din izolarea nodului 2:

$$V_{2-3} = -D_{2-12} \sin \varphi + P_2.$$

Aplicația 47. Să se construiască liniile de influență caracteristice ale eforturilor în barele sistemului compus din fig. 199.

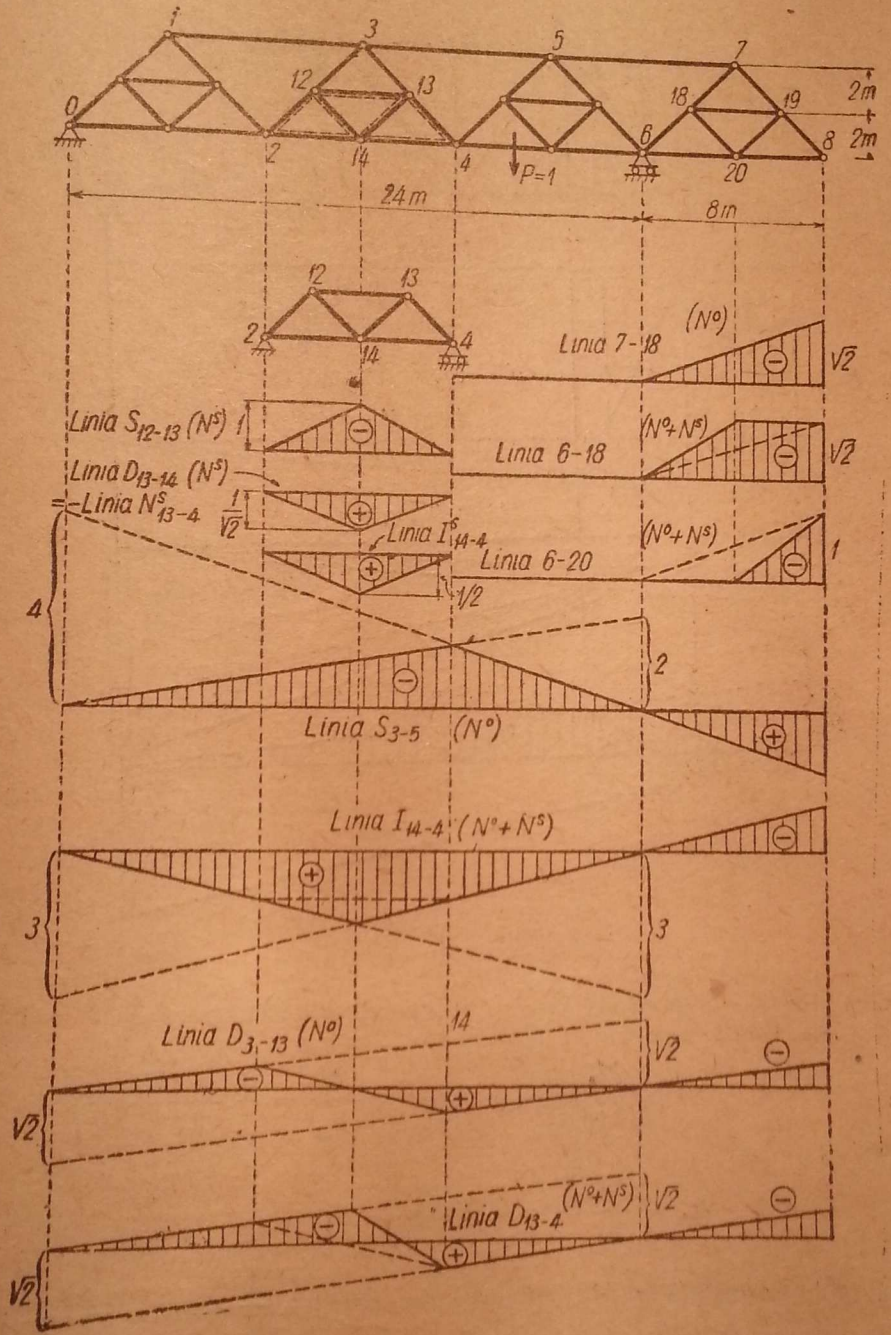

1
3
5
7
12
13
18
19
2m
0
2
14
4
P=1
6
20
8
2m
24m
8m
12
13
2
14
4
Linia 7-18
(N°)
√2
Linia S12-13 (N°) 1
Linia 6-18
(N°+N°)
√2
Linia D13-14 (N°)
Linia N°13-4
1/√2
Linia I°14-4
Linia 6-20
(N°+N°)
1
1/2
4
2
Linia S3-5 (N°)
Linia I14-4 (N°+N°)
3
3
Linia D3-13 (N°)
14
√2
√2
Linia D13-4
(N°+N°)
√2
√2

Fig. 199.

Indicație. Sistemul compus se desparte în sistemele suplimentare și sistemul fundamental, ca în aplicația 42; se construiesc liniile N^0 pe sistemul fundamental și liniile N^s, pe sistemele suplimentare, apoi se suprapun: $N = N^0 + N^s$.

Aplicația 48. Să se găsească liniile de influență V_{23} și D_{25} ale grinzii din fig. 200.

Răspuns. Linia V_{23}. Din separarea nodului *3* (fig. 200, *a*) rezultă:

$$V_{23} = -S_{13}\sin\alpha + S_{35}\sin\beta - (P_3); \qquad (a)$$

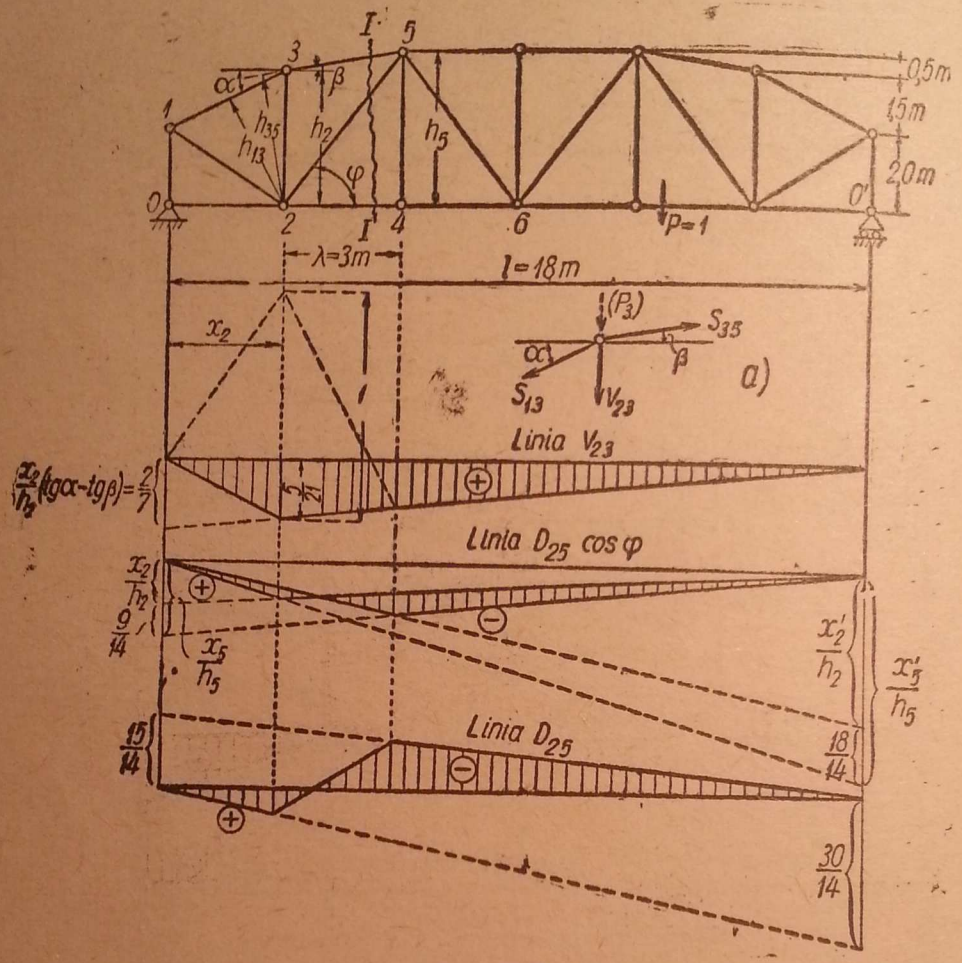


Fig. 200.

(P_3) este pus în paranteză, pentru că are valoare numai dacă sarcina mobilă $P = 1$ se găsește între nodurile *1—5* ale tălpii superioare. Dar,

$$S_{13} = -\frac{M_2}{h_{13}} = -\frac{M_2}{h_2\cos\alpha} \quad \text{și} \quad S_{35} = -\frac{M_2}{h_{35}} = -\frac{M_2}{h_2\cos\beta},$$

care, introduse în (a), dau:

$$V_{23} = \frac{M_2}{h_2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) - (P_3);$$

deci linia lui V_{23} se deduce din linia lui M_2 prin multiplicarea cu: $\frac{1}{h_2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, așa cum este reprezentată în figură. Dacă $P = 1$ se deplasează pe talpa superioară, intervine și (P_3), cum este arătat punctat în figură. Din datele geometrice rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1{,}5}{3};\ \operatorname{tg}\beta = \frac{0{,}5}{3};\ \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3};\ h_2 = 3{,}5\ \text{m};\ x_2 = 3\ \text{m},$$

astfel încît multiplicatorul liniei M_2 este: $\frac{1}{3\cdot 3{,}5}$, iar ordonata pe reazemul *A* devine:

$$\frac{x_2}{h_2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \frac{3}{3\cdot 3{,}5} = \frac{1}{3{,}5} = \frac{2}{7}.$$

Rezultă că în cazul cînd $\alpha = \beta$, V_{23} devine un montant suplimentar.

Linia D_{25}. Deoarece prin secțiunea $I-I$ tălpile $3-5$ și $2-4$ se întîlnesc în afara desenului, se face proiecția pe orizontală a forțelor din stînga secțiunii $I-I$ și se obține [formula (4.12)]:

$$D_{25} \cos \varphi = \frac{M_2}{h_2} - \frac{M_5}{h_5}.$$

Se construiesc liniile de influență : M_2 împărțită prin h_2, și M_5 împărțită prin h_5, și se scad. Rezultatul va fi linia de influență a lui D_{25} cos φ, cum se vede în fig. 200. Se împarte apoi aceasta

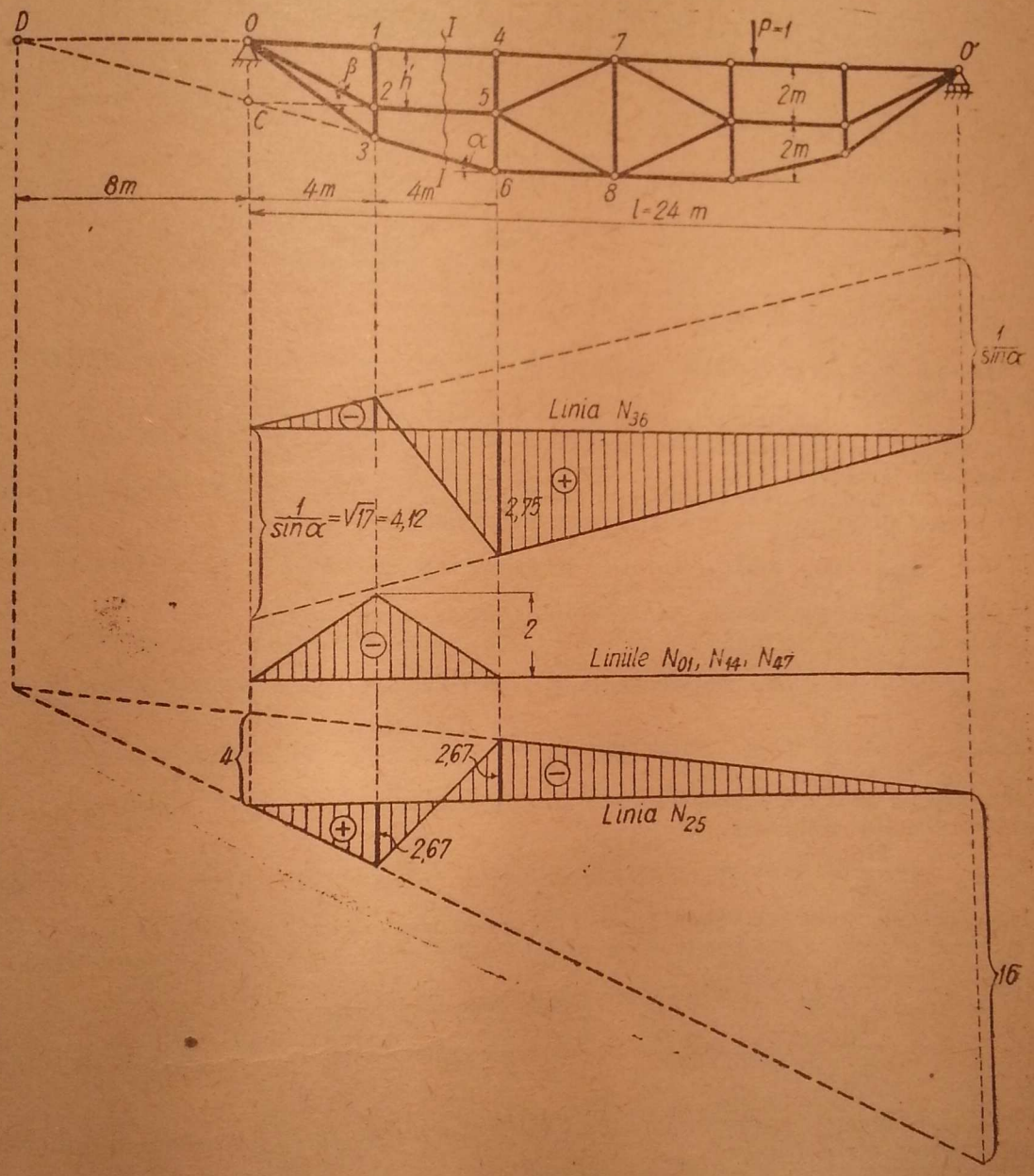


Fig. 201.

prin cos φ și se raportează la o linie de reper orizontală, obținîndu-se astfel linia D_{25} sub forma obișnuită.

Aplicația 49. Să se construiască liniile de influență ale eforturilor în barele N_{36}, N_{25}, N_{01}, N_{02} N_{68} și N_{65} din fig. 201.

Indicații. Secțiunea $I-I$ determină eforturile în barele *14*, *25* și *36*:

$$N_{36} = \frac{T_I}{\sin\alpha}; \quad N_{14} = -\frac{M_C}{h'}; \quad N_{25} = \frac{M_D}{h'} \quad \left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}; \ \frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{17} = 4{,}12\right).$$

Rezultă că N_{14} are valoare numai pentru sarcini aplicate între *0—4*. Apoi $N_{01} = N_{14} = N_{47}$, și toate trei sînt bare suplimentare.

Pentru linia N_{25} se exprimă echilibrul părții din stînga secțiunii $I-I$, cînd $P = 1$ se găsește la dreapta lui *4*, și echilibrul părții din dreapta, cînd $P = 1$ se găsește la stînga lui *1*.

Din separarea nodului *2* se obține:

$$N_{02} = \frac{N_{25}}{\cos\beta} = 1{,}118\, N_{25} \qquad \left(\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}; \ \frac{1}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118\right).$$

Deci, linia lui N_{02} se deduce din linia N_{25}, multiplicînd ordonatele cu coeficientul $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118$.

La fel, din separarea nodului *6* se obține:

$$N_{68} = N_{36}\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot N_{36} \text{ și } N_{65} = -N_{36}\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}N_{36}.$$

Să se găsească liniile de influență N_{58}, N_{57} și N_{78}.

Aplicația 50. Să se construiască liniile de influență caracteristice pentru eforturile în barele din fig. 202.

Indicație. Patrulaterul *13—14—15—16* constituie o articulație fictivă în C, cum se arată în fig. 202, *a*, care reprezintă o grindă cu console și articulații, principial asemănătoare cu aceea din aplicația 45.

Liniile de influență se găsesc ca la aplicația 45, dar trebuie dată o atenție deosebită modului de transmitere al sarcinilor în raport cu articulația fictivă.

Linia I_{18-20}. Avem: $I_{18-20} = \frac{M_{19}}{h_{19}}$ pe grinda independentă $C-D$, corectată pe intervalele *18—20* și *14—16* datorită transmiterii indirecte a sarcinilor.

Linia D_{18-19}. Din secțiunea $I-I$ și ecuația de momente în raport cu E rezultă:

$D_{18-19} = \frac{M_E}{d_1}$ pe grinda independentă $C-D$ corectată pentru sarcini indirecte.

$d_1 = \frac{4}{5}\cdot 21 = 16{,}8$ m. Ordonatele importante sînt date în figură.

Linia I_{9-12}. Se face secțiunea $II-II$ și se scrie ecuația de momente în raport cu *11* pentru partea din dreapta secțiunii $II-II$:

$I_{9-12} = -\frac{M_{11}}{h_{11}}$. Se obține dreapta punctată $11'-C'$ cu ordonata $\frac{15}{4} = 3{,}75$ în dreptul lui C. Din această dreaptă este valabilă numai porțiunea cuprinsă între nodurile *12* și *14*. Dreapta $D'C'$ reprezentînd grinda independentă se prelungește pînă în *16'*, și apoi se completează linia cu dreptele $B'-12'$ și $14'-16'$.

Linia D_{11-12}. Aceeași secțiune $II-II$ și se ia momentul în raport cu F:

$D_{11-12} = -\frac{M_F}{d_2}$. Rezultă dreapta $F'-12'$ cu ordonata $\eta_{12} = \frac{21}{16{,}8} = 1{,}25$ în dreptul nodului *12*.

Din această dreaptă este valabilă numai porțiunea dintre *12—14* și ordonata din dreptul articulației fictive C, unde:

$$\eta_C = \frac{1{,}25}{21}\cdot 9 = 0{,}535.$$

Apoi, prin D' și C' se duce dreapta $C'D'$ prelungită pînă în dreptul nodului *16* și se completează linia cu dreptele $B'-12'$ și $14'-16'$.

Linia D_{6-7}. Se face secțiunea $III-III$ și se folosește ecuația de momente în raport cu punctul G ($d_3 = 10{,}5\cdot\sqrt{2}$ m).

376

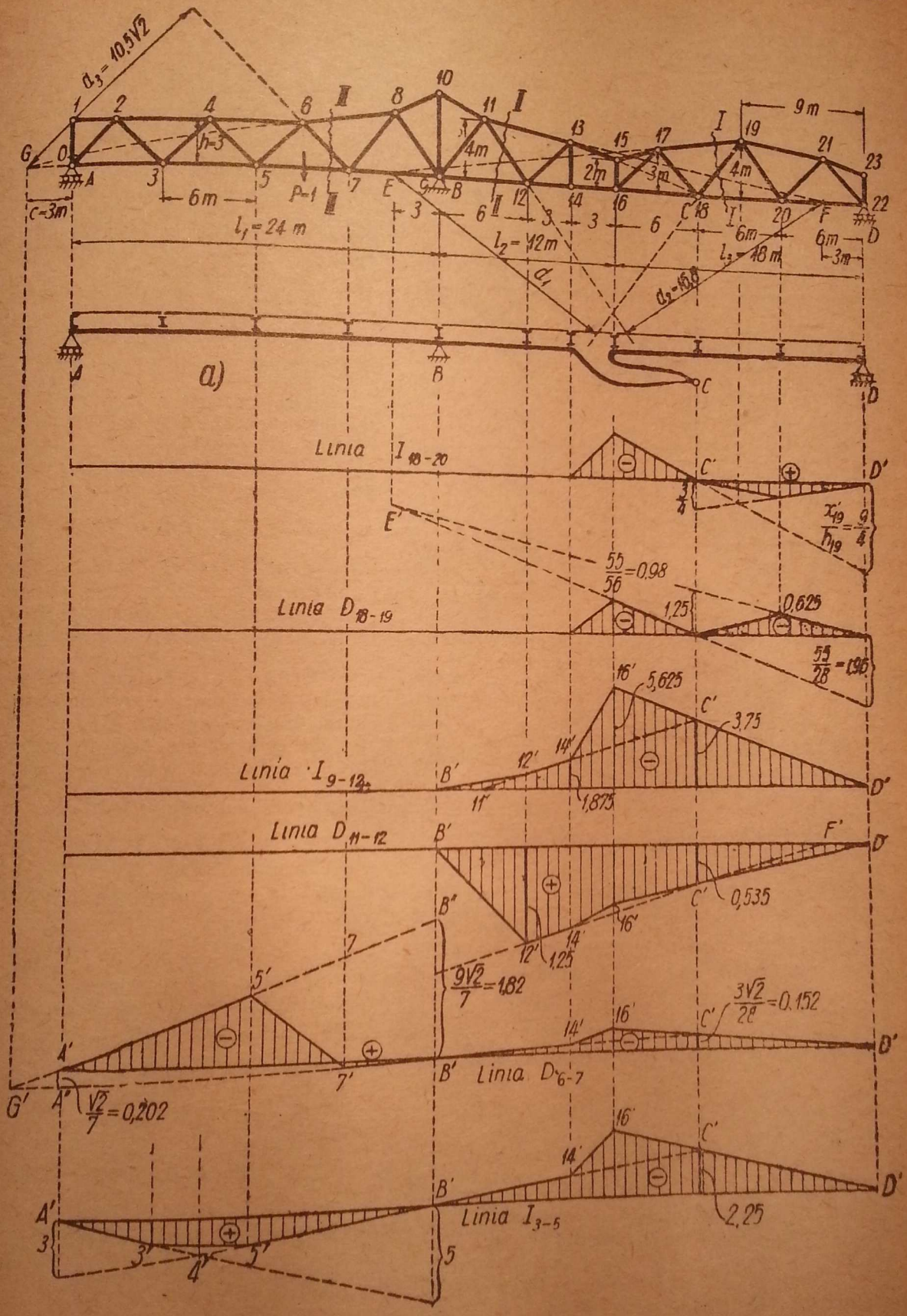

a)
Linia I_{18-20}
Linia D_{18-19}
Linia I_{9-12}
Linia D_{11-12}
Linia D_{6-7}
Linia I_{3-5}
$d_3 = 10,5\sqrt{2}$
$l_1 = 24$ m
$l_2 = 12$ m
$l_3 = 18$ m
d_1
$d_2 = 10,5$
$\frac{55}{56} = 0,98$
$\frac{55}{28} = 1,96$
$\frac{9\sqrt{2}}{7} = 1,82$
$\frac{3\sqrt{2}}{28} = 0,152$
$\frac{\sqrt{2}}{7} = 0,202$
5,625
3,75
1,875
0,535
1,25
0,625
2,25

Fig. 202.

Dacă $P = 1$ se găsește în stînga lui *5*, se scrie echilibrul părții din dreapta, iar dacă $P = 1$ este la dreapta lui *7*, se scrie echilibrul părții din stînga.

Cînd $P = 1$ este la stînga lui *5*:

$$D_{6-7} = -\frac{V_B \cdot (c + l_1)}{d_3}$$ cu ordonata în B:

$$\eta_B = -\frac{27}{10{,}5\sqrt{2}} = -\frac{27\sqrt{2}}{21} = -\frac{9}{7}\sqrt{2} = -1{,}82.$$

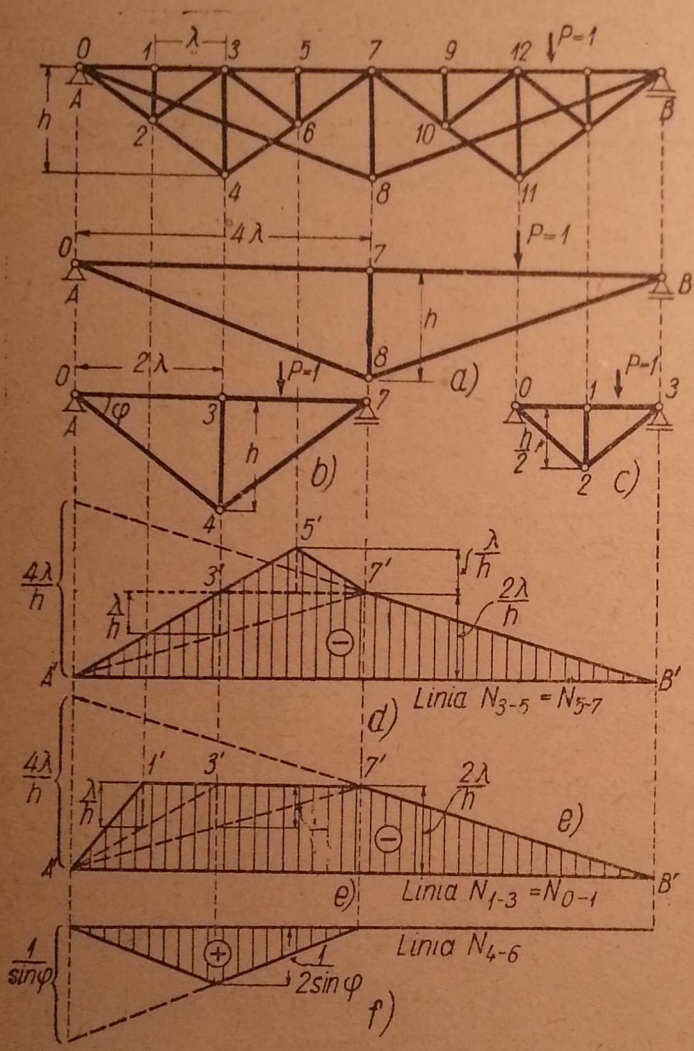


Fig. 203.

Cînd $P = 1$ este la dreapta lui *7*, rezultă:

$$D_{6-7} = \frac{V_A \cdot c}{d_3}$$ cu ordonata în A:

$$\eta_A = \frac{3}{10{,}5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{7} = 0{,}202.$$

Dreapta $A''B'$ este valabilă între nodurile *7* și *14* și în articulația fictivă C'. Apoi se duce dreapta $D'-C'$ valabilă pînă la *16'* și se completează linia cu *14'—16'* și *5'—7'*.

Linia I_{3-5}. Avem $I_{3-5} = \frac{M_5}{h_4}$ și construcția rezultă ca în cazurile de mai sus.

Aplicația 51. Să se construiască liniile de influență în barele caracteristice ale grinzii din fig. 203[1]).

Indicații. Sistemul se poate despărți în trei sisteme independente, cum se arată în fig. 203, *a*, *b*, *c*.

Se construiește linia de influență pentru fiecare în parte N^a, N^b, N^c, și apoi se suprapun:

$$N = N^a + N^b + N^c.$$

Rezultă:

$$N_{3-5} = N^a_{3-5} + N^b_{3-5} + N^c_{3-5}$$

și

$$N_{1-3} = N^a_{1-3} + N^b_{1-3} + N^c_{1-3},$$

iar fig. 203, *d* și *e* le reprezintă.

Astfel, în fig. 203, *d*, triunghiul $A'7'B'$ reprezintă: $N^a_{3-5} = N^a_{0-7}$, triunghiul $A'3'7'$ reprezintă: $N^b_{3-5} = N^b_{3-7}$ și triunghiul $3'5'7'$ reprezintă: N^c_{3-5}.

În fig. 203, *e*, triunghiul $A'B'7'$ reprezintă: $N^a_{1-3} = N^a_{0-7}$, triunghiul $A'3'7'$ reprezintă: $N^b_{1-3} = N^b_{0-3}$ și triunghiul $A'1'3'$ reprezintă: N^c_{1-3}.

Liniile de influență ale barelor verticale și înclinate fac parte numai dintr-unul sau două sisteme independente. Astfel, rezultă:

$$N_{4-6} = N^b_{4-7},$$

cum se arată în fig. 203, *f*.

---

[1]) *I. P. Prokofiev*, op. cit., vol. I.

§ 24. LINII DE INFLUENȚĂ PRIN DEPLASĂRI VIRTUALE

A. NOȚIUNI GENERALE

Se aplică direct teoria generală de la § 11 B, adică se suprimă legătura corespunzătoare efortului căutat; în cazul de față se suprimă bara a cărei linie de influență interesează, iar sistemului cinematic cu un grad de libertate astfel obținut i se dă deplasarea corespunzătoare. Proiecția pe verticală a deplasărilor liniei de încărcare este chiar linia de influență a efortului căutat. Tot din teoria generală s-a stabilit că pentru a avea direct scara și semnul, se dă deplasarea astfel, încît deplasarea eforturilor care au înlocuit legătura suprimată să fie egală cu 1 și de sens contrar efortului.

Efortul în bara suprimată se presupune inițial pozitiv (întindere), adică prin suprimarea barei în fiecare dintre cele două noduri efortul este îndreptat spre nodul opus. Prin urmare, deplasarea virtuală se va da în sens contrar, astfel încît să se depărteze nodurile cu cantitatea 1.

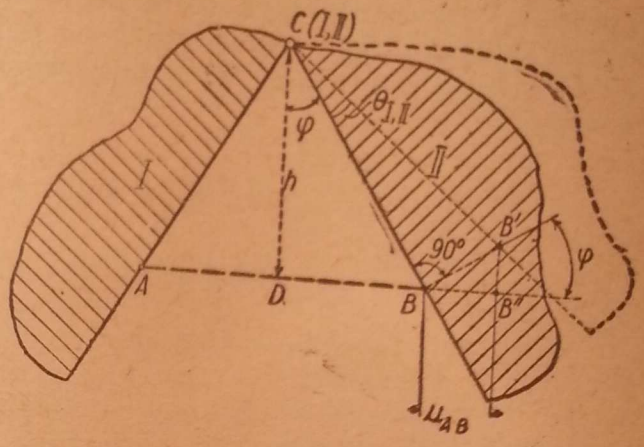


Fig. 204.

Partea din linia de încărcare ce se coboară are semnul plus, iar partea ce se ridică are semnul minus.

Depărtarea dintre noduri nu apare însă, în general, direct în epura deplasărilor, astfel încît nu poate fi folosită direct pentru scară. Unghiurile cu care se rotesc diferite părți ale sistemului cinematic apar însă totdeauna în epura deplasărilor. Se va căuta să se lege deci depărtarea unitară a nodurilor de unul dintre unghiurile de pe epură, și aceasta se face în felul următor (fig. 204).

Dacă două corpuri I și II se rotesc unul față de altul cu unghiul $\theta_{I,II}$ în jurul unui centru de rotație C (I,II) și luăm două puncte: A pe corpul I și B pe corpul II, variația distanței $A\,B$ prin rotația cu $\theta_{I,II}$ este: $u_{AB} = h \cdot \theta_{I,II}$, unde h este distanța de la centrul (I,II) la dreapta $A-B$ (fig. 204).

În adevăr, dacă I stă pe loc, și II se rotește față de el cu $\theta_{I,II}$, punctul B se deplasează normal pe raza $C - B$ cu cantitatea

$$BB' = CB \cdot \theta_{I,II}. \qquad \text{(a)}$$

BB' face cu AB unghiul φ. Același unghi φ face și CB cu normala CD din C pe AB.

Proiecția deplasării BB' pe AB este:

$u_{AB} = BB'' = BB' \cos\varphi$ și dacă se înlocuiește BB' cu valoarea sa din (a):

$$u_{AB} = CB \cdot \theta_{I,II} \cdot \cos\varphi = (CB \cos\varphi) \cdot \theta_{I,II},$$

dar, $CB \cos \varphi = CD = h$ și deci :

$$u_{AB} = h \cdot \theta_{I,II}. \tag{4.24}$$

Dacă A și B sînt cele două noduri ale barei suprimate și se depărteaz între ele cu cantitatea $u_{AB} = 1$, rezultă :

$$1 = h \cdot \theta_{I,II}$$

sau

$$\theta_{I,II} = \frac{1}{h} \tag{4.25}$$

expresie ce servește pentru scară, deoarece unghiul $\theta_{I,II}$ se găsește totdeauna pe epura deplasărilor, adică pe linia de influență.

În cele ce urmează se va aplica mereu teoria generală cu precizările date aici.

B. GRINZI CU TĂLPI POLIGONALE

a) Linia de influență I_{2-4} (fig. 205)

Se suprimă bara $2-4$ și se depărtează nodul 2 de 4 cu cantitatea 1 Partea 1, 2, 3 formează un triunghi geometric nedeformabil I; de ase menea, sistemul $3-4-9$ (II) este geometric nedeformabil. Centrul absolut de rotație (I, T) se găsește în articulația din 1, centrul relativ de rotație (I, II) este în articulația din 3, iau centrul absolut de rotație (II, T) se găsește odată pe direcția pendulului care reprezintă reazemul simplu din 9, iar altă dată, pe dreapta $(I, T) - (I, II)$, deci se va găsi în 9.

Dacă se depărtează nodul 2 de nodul 4, articulația din 3 se lasă în jos, deci, linia de încărcare se lasă și ea, și semnul liniei de influență este pozitiv pe toată deschiderea. Cele două părți geometric nedeformabile I și II se proiectează după dreptele I' și II', care fac între ele unghiul $\theta_{I,II}$. Deoarece depărtarea u_{2-4} a fost luată egală cu unitatea, după formula (4.25), $\theta_{I,II}$ are valoare $\theta_{I,II} = \frac{1}{h_3}$, h_3 fiind distanța de la nodul 3 [centrul (I, II)] la bara $2-4$.

Sarcina aplicîndu-se pe talpa superioară, linia de încărcare, alcătuită din lonjeroane, se deplasează cu cele două părți I și II fără să fie nevoie de vreo corecție.

Scara este determinată prin valoarea unghiului $\theta_{I,II} = \frac{1}{h_3}$. Astfel, dacă se prelungește II' pînă în dreptul reazemului A, ordonata respectivă va fi :

$$x_3 \cdot \theta_{I,II} = x_3 \cdot \frac{1}{h_3}.$$

(Calculele se fac bineînțeles pentru valorile infinit mici ale unghiurilor de rotație).

Scara grafică a ordonatelor liniilor de influență se determină cu ușurință la o distanță orizontală egală cu h_3 în deschizătura unghiului $\theta_{I,II}$.

Segmentul cuprins între laturile unghiului $\theta_{I,II}$ are valoarea:

$$h_3\,\theta_{I,II} = h_3 \cdot \frac{1}{h_3} = 1;$$

cu această valoare se desenează scara ordonatelor pe epură.

La deplasări virtuale este mai sugestivă reprezentarea reazemelor prin pendule, în special pentru reazemul simplu, deoarece pune mai clar în

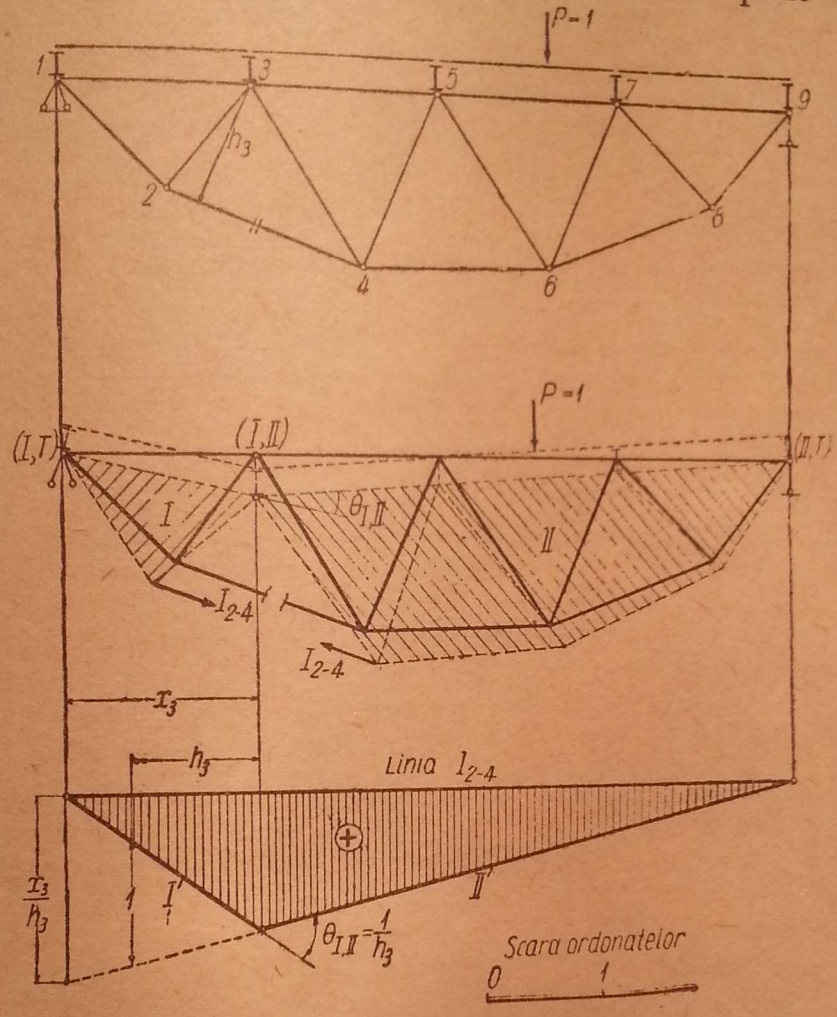


Fig. 205.

evidență proprietățile cinematice ale acestuia. Direcția pendulului indică direcția reacțiunii din reazem. El arată totodată că centrul absolut de rotație al corpului respectiv trebuie să se găsească pe această dreaptă.

De aceea, la deplasări virtuale reazemele vor fi reprezentate prin pendule.

b) **Linia de influență S_{3-5} (fig. 206)**

Se suprimă bara $3-5$. Centrele de rotație sînt: (I,T) în punctul 1, (I,II) în nodul 4, iar (II,T) se găsește odată pe direcția verticală a pendulului din 9, și altă dată pe dreapta $(I,T)-(I,II)$, deci la intersecția lor.

Depărtînd nodurile 3 și 5, grinda se ridică, deci ordonatele sînt negative pe toată deschiderea.

Corpurile *I* și *II* se proiectează în *I'* și *II'* și fac între ele unghiul $\theta_{I,II} = \frac{1}{h_4}$, h_4 fiind distanța de la centrul *I,II* la bara *3—5*.

Linia de influență este proiecția deplasărilor liniei de încărcare alcătuită de lonjeroanele care se reazemă pe talpa superioară. După deformarea sistemului, lonjeronul *3—5* se reazemă cu un capăt pe corpul *I* în *3*, și cu celălalt capăt, pe corpul *II* în *5*, așa încît proiecția deplasărilor lui este

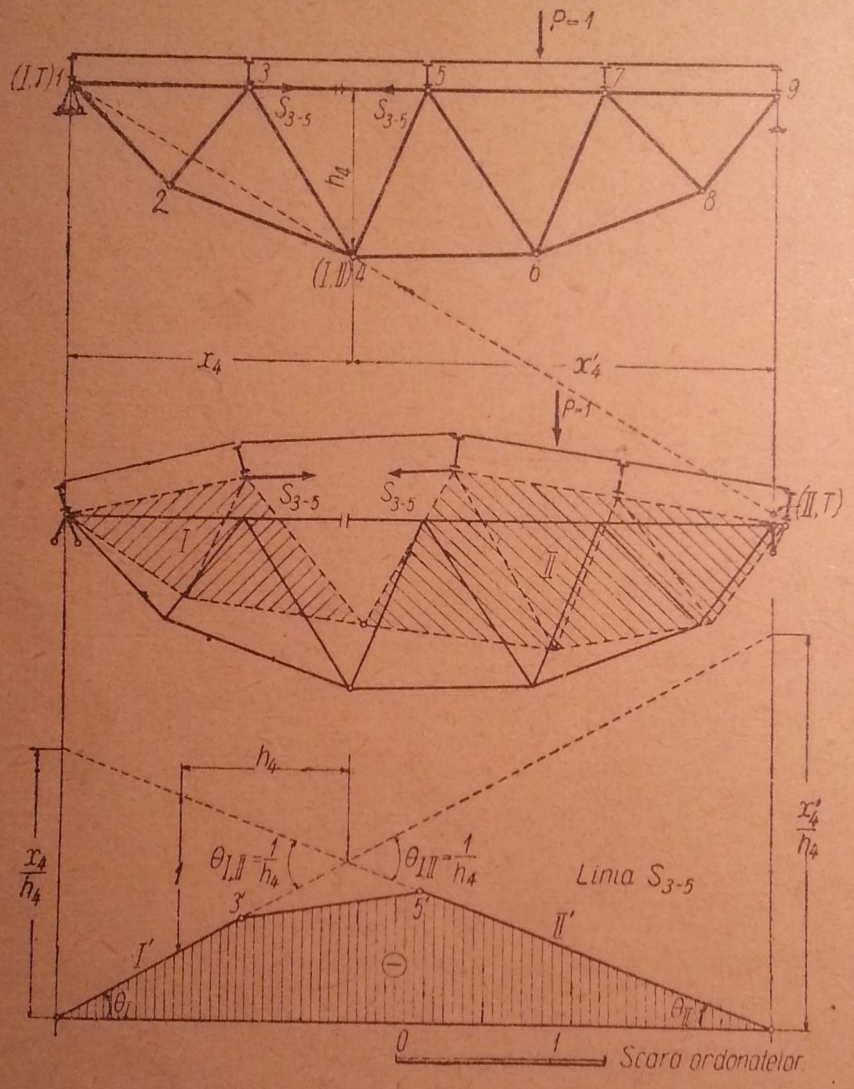


Fig. 206.

determinată de dreapta care unește punctele *3'* și *5'* pe epura deplasărilor. Astfel, se corectează epura deplasărilor corpurilor rigide *I* și *II*.

Cu valoarea unghiului $\theta_{I,II} = \frac{1}{h_4}$ se găsesc ordonatele pe reazeme:

$$x_4 \cdot \theta_{I,II} = \frac{x_4}{h_4} \quad \text{și} \quad x'_4 \cdot \theta_{I,II} = \frac{x'_4}{h_4}.$$

Pentru scara grafică se găsește segmentul 1, la distanța orizontală h_4 în deschizătura unghiului $\theta_{I,II}$.

În anumite cazuri mai complicate nu ne putem da seamă imediat dacă prin depărtarea celor două noduri unele părți se ridică sau se coboară

și, de aceea, după construcția epurei trebuie făcută o verificare. Astfel, în cazul de față, pentru ca nodul 5 să se depărteze de nodul 3, trebuie ca, presupunînd corpul *I* fix, corpul *II* să se rotească în sensul acelor unui ceasornic față de *I* în jurul lui (*I,II*). Trecînd la epură, dacă se consideră *I'* fix, trebuie ca *II'* să se obțină din *I'*, printr-o rotație $\theta_{II,I}$ în sensul acelor unui ceasornic.

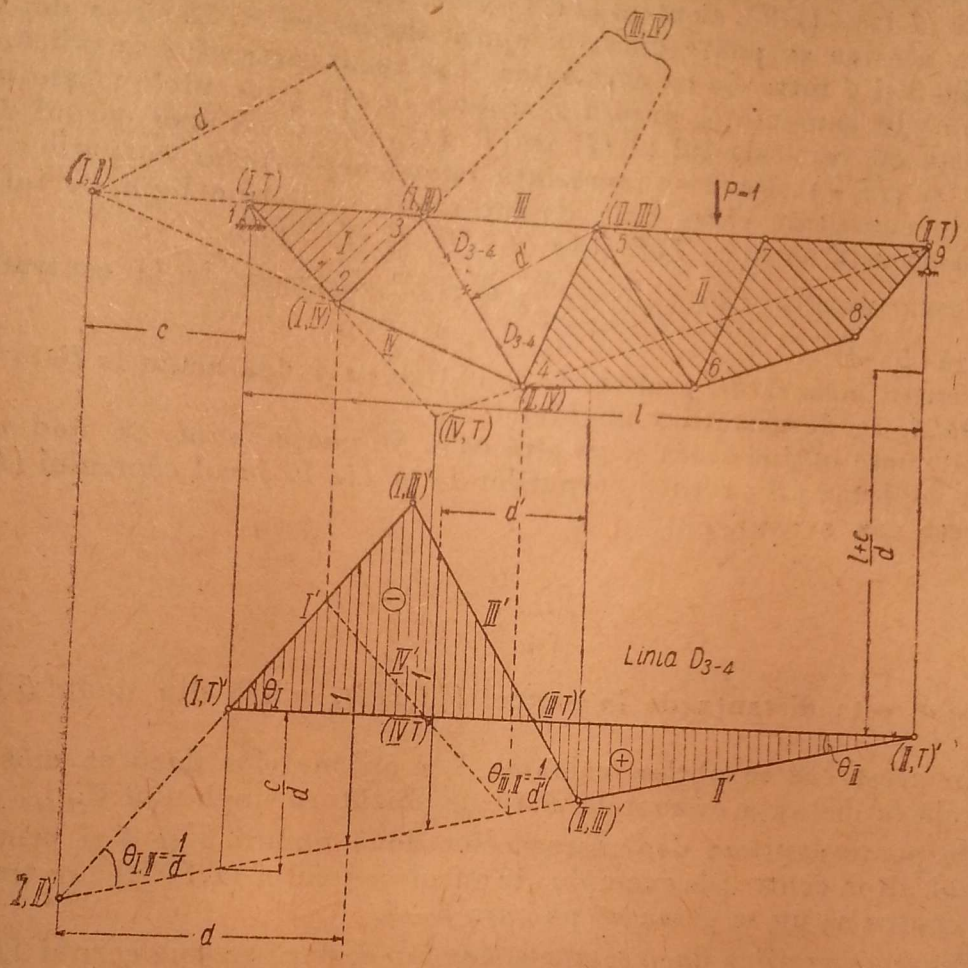


Fig. 207.

În cele două exemple de mai sus, s-au desenat și lonjeroanele, pentru a avea imaginea liniei de încărcare, cum și o schiță a deplasărilor cinematice ale grinzii pentru familiarizare cu acest gen de a gîndi. De aici încolo nu se vor mai desena lonjeroanele, ci se va indica numai forța $P=1$ pe una dintre tălpi, înțelegîndu-se că pe acea talpă se găsesc lonjeroanele care reazemă în nodurile tălpii respective.

De asemenea, nici nu se va mai desena schița grinzii deformate, ci se vor indica centrele de rotație pe grinda dată și se va trece direct la desenul epurei deplasărilor.

c) Linia D_{3-4} (fig. 207)

Se suprimă bara $3-4$ și corpurile geometric nedeformabile care alcătuiesc sistemul cinematic sînt : *I, II III* și *IV*.

Centrul (*I, T*) se găsește în articulația din *1*. Centrul (*I,II*) este intersecția dreptelor care reprezintă corpurile *III* și *IV* (deoarece avem de-a

face tocmai cu patrulaterul clasic al deplasărilor virtuale). La fel se poate determina centrul (III,IV) care în cazul de față iese din figură, dar care nu este necesar pentru epura deplasărilor. Centrele (I, III), (II, III), (I,IV) (II,IV) sînt evidente. Să determinăm centrul (II,T). Odată se găsește pe direcția pendulului din *9* și altă dată din combinația celor trei corpuri : T (terenul), I și II ; centrele lor trebuie să fie în linie dreaptă, deci (II, T) se va găsi pe dreapta $(I,II)-(I,T)$. Centrul (II,T) se va găsi chiar în *9*.

Cu acestea se poate construi epura deplasărilor. Dacă se depărtează nodurile *3* și *4* între ele cu cantitatea 1, se recunoaște că I se ridică, iar II coboară. În consecință, drepta I' se duce în sus și se prelungește pînă se întîlnește cu verticala lui (I,II) în $(I, II)'$. Se duce apoi corpul II' prin $(I,II)'$ și $(II,T)'$. Dacă se reprezintă epura deplasărilor corpurilor I, III, II, care constituie chiar linia de încărcare, se obține linia de influență. Pentru aceasta se duce III' prin $(I,III)'$ și $(II,III)'$.

Scara rezultă din $\theta_{I,II} = \frac{1}{d}$, d fiind distanța de la centrul (I,II) la bara *3—4*.

Pentru măsurători grafice 1, se obține ca și pînă acum la distanța orizontală d, în deschizătura unghiului $\theta_{I,II}$.

Se poate obține scara și pe altă cale. Se poate spune că nodurile *3* și *4* s-au depărtat prin rotirea corpurilor II și III în jurul centrului (II,III). În acest caz avem :

$$\theta_{II,III} = \frac{1}{d'},$$

în care d' este distanța de la centrul (II,III), adică din nodul *5* la bara *3—4*.

În acest caz se obține valoarea 1 a ordonatelor dacă se măsoară pe verticală la distanța orizontală d' în deschizătura unghiului $\theta_{II,III}$.

Se poate exprima depărtarea celor două noduri *3* și *4* și prin rotirea în jurul altor centre [de exemplu, în jurul centrului (I,IV),] dar trebuie ca acest centru să nu se găsească pe bara *3—4*.

Pentru a verifica dacă semnele sînt bune, dacă se ține corpul II pe loc, pentru ca să se depărteze nodurile *3* și *4*, III va trebui să se rotească în sensul acelor unui ceasornic față de II în raport cu centrul (II,III). În epura deplasărilor trebuie să se găsească această situație. Dacă II' este fix, III' trebuie să se rotească față de II' în jurul lui $(II,III)'$ în sensul orar, ceea ce este satisfăcut de $\theta_{III,II}$.

Pentru verificarea epurei se pot face construcții suplimentare. Astfel, se poate reprezenta ușor corpul IV' în epură prin proiectarea nodurilor *2* și *4* pe I' și II' și prin unirea lor cu o dreaptă care taie linia de reper într-un punct care trebuie să coincidă cu centrul $(IV,T)'$. Dar (IV,T) se construiește ușor pe grindă din combinațiile (T, I, IV), care ne dă direcția $(I,T) - (I,IV)$ și (II, T, IV) care dă direcția $(II, T) - (II, IV)$. Cele două drepte se întîlnesc în (IV,T) care, proiectat pe IV', trebuie să fie în același timp $(IV,T)'$ adică pe linia de reper.

Apoi, dacă (III,IV) nu iese din cadrul desenului, se poate găsi ușor și (III,T) din combinațiile (T,I, III) și (T, III, IV), care trebuie să se proiecteze peste $(III,T)'$ ce este cunoscut.

C. GRINZI CU TĂLPI PARALELE

Liniile de influență în tălpi nu au nimic nou față de cele corespunzătoare la grinzi cu tălpi poligonale.

Linia D_{4-5} (fig. 208). Se suprimă bara $4-5$, și corpurile care se formează sînt I, II, III și IV. Centrele (I, T), (I, III), (II, III) (I, IV) și (II, IV) sînt evidente. Centrul (I,II) se găsește la intersecția, lui III cu IV, adică la infinit pe direcția orizontală. La fel, centrul

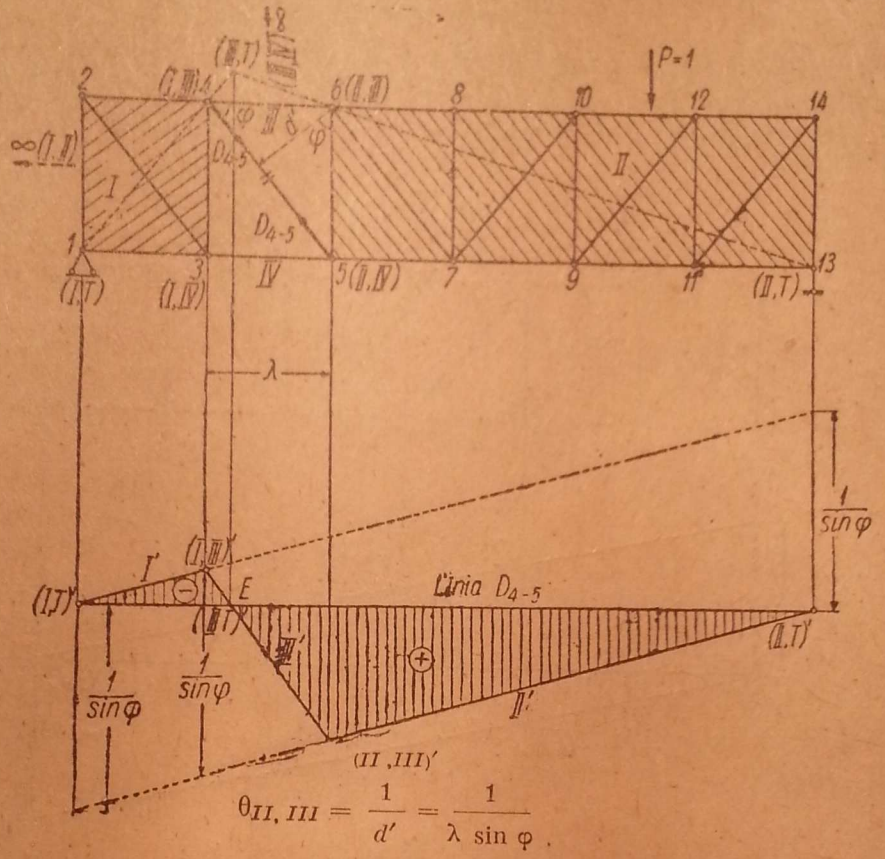


Fig. 208.

(III,IV) este la infinit pe direcția verticală. Centrul (II, T) se găsește în reazemul din deapta (13), deoarece din combinația T, I și II rezultă că trebuie să se găsească pe orizontala din (I,T), iar pe de altă parte se găsește pe verticala din 13.

Depărtînd nodul 4 de nodul 5, corpurile I și II rămîn paralele, deoarece au centrul (I,II) la infinit, dar I se ridică și II coboară. Deci, din $(I,T)'$ și $(II, T)'$ se duc dreptele I' și II' paralele : prima în sus, iar a doua în jos. Pe ele se proiectează $(I,III)'$ și $(II,III)'$ și se duce corpul III' care coincide cu lonjeronul $4-6$. Se obțin astfel chiar deplasările liniei de încărcare, adică linia de influență.

Pentru scară nu se poate folosi $\theta_{I,II}$, deoarece este nul, dar poate fi folosit $\theta_{II,III}$, astfel :

$$\theta_{II,III} = \frac{1}{d'},$$

în care d' este perpendiculara din (II,III) (adică din nodul 6) pe bara $4-5$ și are valoarea :

$$d' = \lambda \sin \varphi.$$

Rezultă că la distanța λ de acest centru, adică în extremitatea din stînga a panoului, avem ordonata :

$$\lambda \cdot \theta_{II,III} = \lambda \cdot \frac{1}{d'} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda \sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Se va verifica acum punctul limită E, adică centrul (III,T).

Din combinația T, I, III, (III,T) trebuie să se găsească pe dreapta $(I,T) - (I,III)$, adică pe direcția $1-4$. Din combinația T, II, III, trebuie

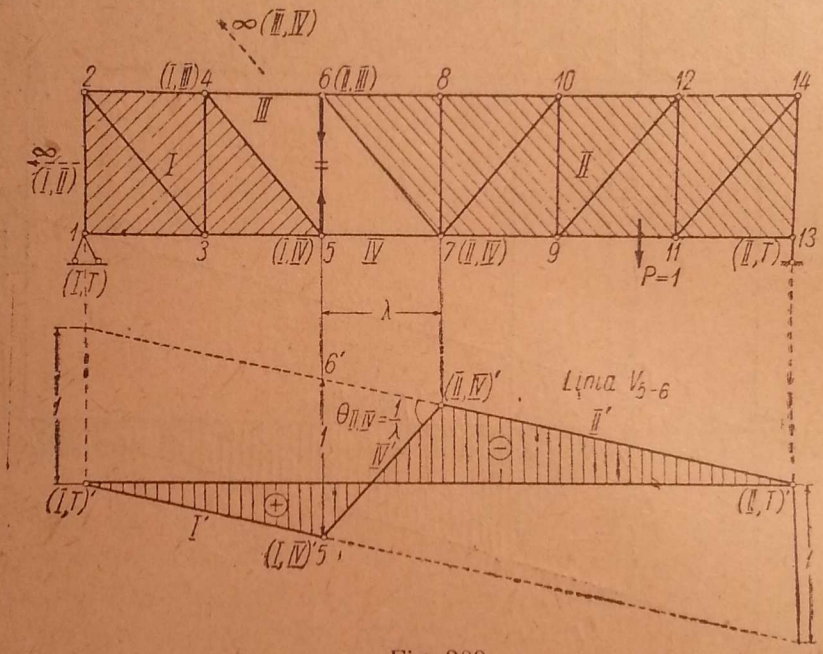


Fig. 209.

ca (III,T) să se găsească pe dreapta $(II,T) - (III,II)$, adică pe direcția $13-6$. La intersecția lor se găsește (III,T). Acesta, proiectat, trebuie să ajungă în $(III,T)'$, adică în E.

Această construcție este identică cu cea de determinare a punctului limită E pe cale grafică folosită la § 22 — A — c.

Linia V_{5-6} (fig. 209). Se suprimă bara $5-6$, și corpurile care se formează sînt : I, II, III, IV. Centrele se deduc ca în cazul diagonalei și sînt arătate în figură. Depărtînd nodul 5 de nodul 6, corpul II se ridică, iar corpul I coboară, rămînînd paralel cu II, așa cum sînt desenate. $P = 1$ este aplicată pe talpa inferioară, deci se va urmări linia de încărcare pe această talpă, adică pe corpurile I, IV, II, proiectate în I', II' și IV'.

Scara se poate obține prin metoda generală. De exemplu :

$$\theta_{II,IV} = \frac{1}{\lambda}$$

și valoarea 1 se găsește la distanța λ.

Nu era însă necesar să se recurgă la unghiuri în acest caz particular, deoarece, depărtînd pe verticală nodul 5 de 6 cu cantitatea 1, această depărtare apare chiar în epură între proiecțiile lor $5'$ și $6'$.

D. UN ALT EXEMPLU PENTRU DEPLASĂRI VIRTUALE (fig. 210)

În acest caz, în regiunea *7*, *8*, *9*, *10*, orice secțiune taie patru bare, și pe cale analitică ar trebui să se folosească ecuații suplimentare, pentru a găsi liniile de influență.

Deplasările virtuale dau soluția direct.

Linia D_{7-8}. Se suprimă bara $7-8$ (fig. 211), și corpurile care se formează sînt *I*, *II*, *III* și *IV*. Centrele (*III*, *T*), (*I*, *III*), (*II*, *III*), (*I*, *IV*), (*II*, *IV*) sînt evidente. Centrul (*I*, *T*) se găsește pe verticala reazemului *1*, dar nu e nevoie să se cunoască exact unde este pe această verticală, căci oriunde s-ar găsi, se va proiecta pe verticală în același punct. Corpurile *II* și *I* au centrul (*I*, *II*) la infinit pe orizontală, deci vor rămîne paralele. La fel, corpurile *III* și *IV* vor rămîne paralele. Cu aceste elemente se poate construi linia D_{7-8}.

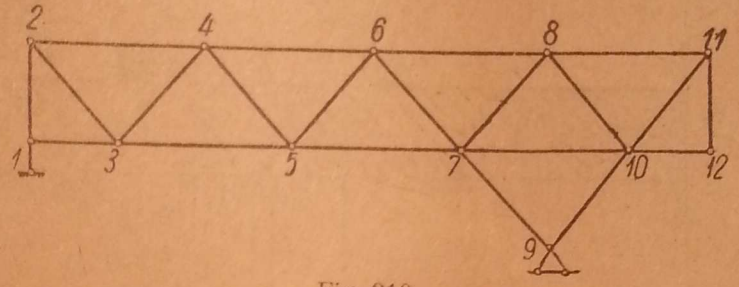


Fig. 210.

Depărtînd nodurile *7* și *8*, partea I' se va lăsa în jos. Deci din $(I, T)'$ a cărui poziție este cunoscută, deși nu se cunoaște locul exact al lui (*I*, *T*) pe verticală, se duce o dreaptă sub linia de reper. Pe ea se proiectează (*I*, *III*) în $(I, III)'$. $(III, T)'$ fiind cunoscut, se poate duce copul III'. Pe el se proiectează punctul (*II*, *III*) în $(II, III)'$, și de acolo se duce II' paralel cu I'. Ca să se proiecteze și *IV*, se unesc punctele $(I, IV)'$, proiectat pe I' și $(II, IV)'$ proiectat pe II'. Pentru verificare, IV' trebuie să fie paralel cu III'.

Scara se determină astfel:

$$\theta_{II,III} = \frac{1}{d}, \text{ în care}$$

d este distanța de la (*II*, *III*) la bara $7-8$ și are valoarea $d = \lambda \sin \varphi$.

Deci,

$$\theta_{II,III} = \frac{1}{\lambda \sin \varphi}$$

și se obține în dreptul reazemului (*III*, *T*) ordonata:

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \theta_{II,III} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\lambda \sin \varphi} = \frac{1}{2 \sin \varphi}.$$

Din paralelismul laturilor I' și II' rezultă că în dreptul nodului *9* ordonata pînă la I' va fi tot $\frac{1}{2 \sin \varphi}$. Scara grafică se poate obține pe cale obișnuită. Dacă $P = 1$ se deplasează pe talpa superioară, linia de influență este

cea desenată plin (corpurile I', IV', II'), iar dacă $P=1$ se deplasează pe talpa inferioară, linia de influență este desenată punctat (corpurile I', III' și II').

Se pot efectua o serie de verificări ale construcției. Astfel, se poate determina (I, T) din combinația I, III, T, la intersecția verticalei din 1 cu

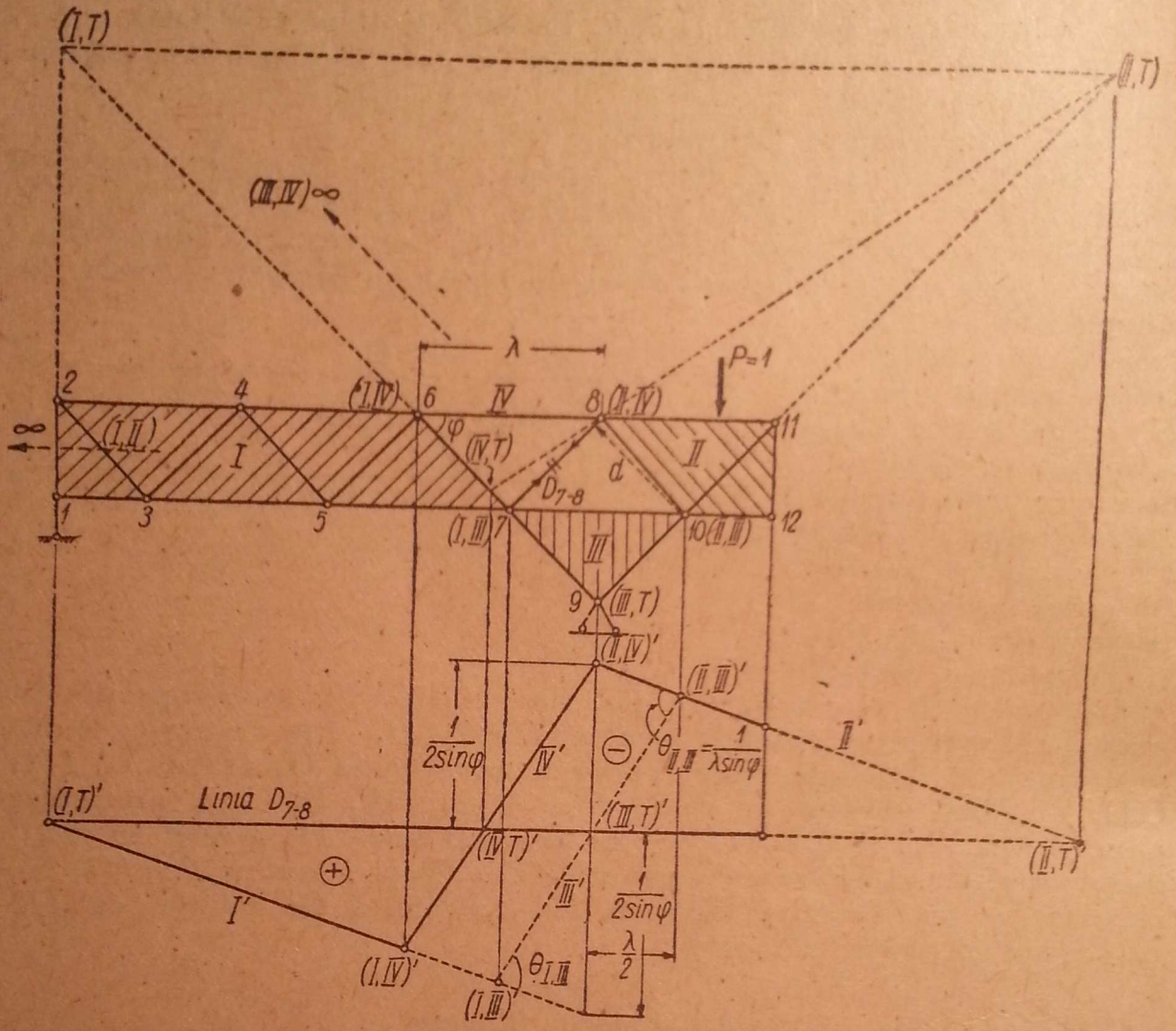


Fig. 211.

dreapta $9-7$. Centrul (II, T) se găsește analog: combinația II, III, T arată că se găsește pe dreapta $9-10$, iar combinația I, II, T arată că se găsește pe orizontala din (I, T) și se va afla deci la intersecția lor. Acum se poate găsi (IV, T). Combinația III, IV, T dă direcția $9-6-7$, adică paralela din (III, T) la direcția pe care se găsește (III, IV) — iar combinația II, IV, T, dă direcția $(II, T)-(II, IV)$; la intersecția lor se va găsi (IV, T). Acesta, proiectat, trebuie să se găsească la intersecția lui IV' cu linia de reper.

Linia I_{7-10} (fig. 212). Se suprimă bara $7-10$ și se formează corpurile I, II, III, IV. Centrele (I,III), (I,II), (II, IV), (III, IV), (III, T) și (IV, T) sînt evidente. Centrele (III, II) și (I, IV) se găsesc la infinit pe direcțiile arătate în figură, iar (I,T) se găsește pe verticala reazemului din stînga. Cu acestea se poate construi linia de influență I_{7-10}.

Prin depărtarea nodurilor *7* și *10*, nodul *8* se lasă în jos, deci corpul *I* se lasă în jos. Se duce, în consecință, *I'* din $(I, T)'$. Din $(IV, T)'$, care este cunoscut, se duce paralelă la *I'*, deoarece centrul lor (IV, I) este la infinit. Se proiectează (II, IV) în $(II, IV)'$ pe corpul *IV'*, iar (I, II), în $(I, II)'$ pe corpul *I'*. Se duce acum dreapta *II'*, care are două puncte cunoscute. Dacă se proiectează și $(I, III)'$, se poate duce și *III'*, deoarece și $(III, T)'$ este cunoscut. Pentru verificare, *III'* trebuie să fie paralel cu *II'*, deoarece centrul (II, III) este la infinit. Pentru o altă verificare se construiește (I, T) exact ca în cazul precedent, apoi se determină (II, T) din combinația *IV*, *II*, *T*, care dă direcția *9—10*, și din combinația *I*, *II*, *T*, care dă dreapta $(I, T)-(I, II)$, la intersecția lor fiind (II, T). Acesta, proiectat pe *II'*, trebuie să se găsească pe linia de reper.

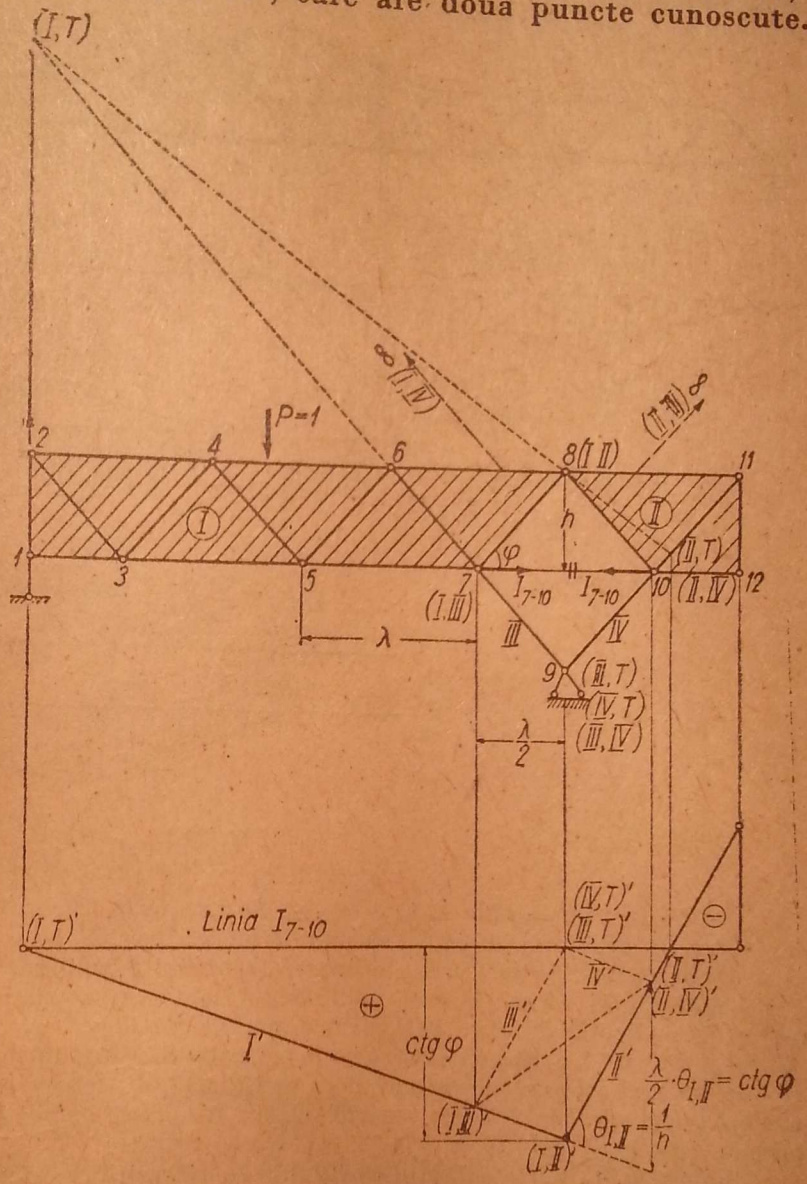


Fig. 212.

Scara este determinată din relația:

$$\theta_{I,II} = \frac{1}{h},$$

în care *h* este distanța din (I, II) la bara *7—10*, adică înălțimea grinzii pe partea cu tălpi paralele. $\theta_{I,II}$ determină la distanța $\frac{\lambda}{2}$ în dreptul centrului $(II, IV)'$ distanța dintre dreptele paralele *I'* și *IV'*:

$$\frac{\lambda}{2}\,\theta_{I,II} = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{h} = \operatorname{ctg}\varphi.$$

Această ordonată este valabilă ca „paralele între paralele" și în dreptul reazemului *9*. Cu aceasta, linia de influență I_{7-10} este complet determinată.

Dacă $P = 1$ se deplasează pe talpa superioară, este valabilă partea desenată plin (corpurile *I'*, *II'*), iar dacă se deplasează pe talpa inferioară,

între nodurile *7* și *10* fiind un singur lonjeron, pe acest interval este valabilă linia punctată $(I, III)' - (II, IV)'$.

Aplicația 52. Să se găsească, prin deplasări virtuale, liniile de influență *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* din fig. 213.

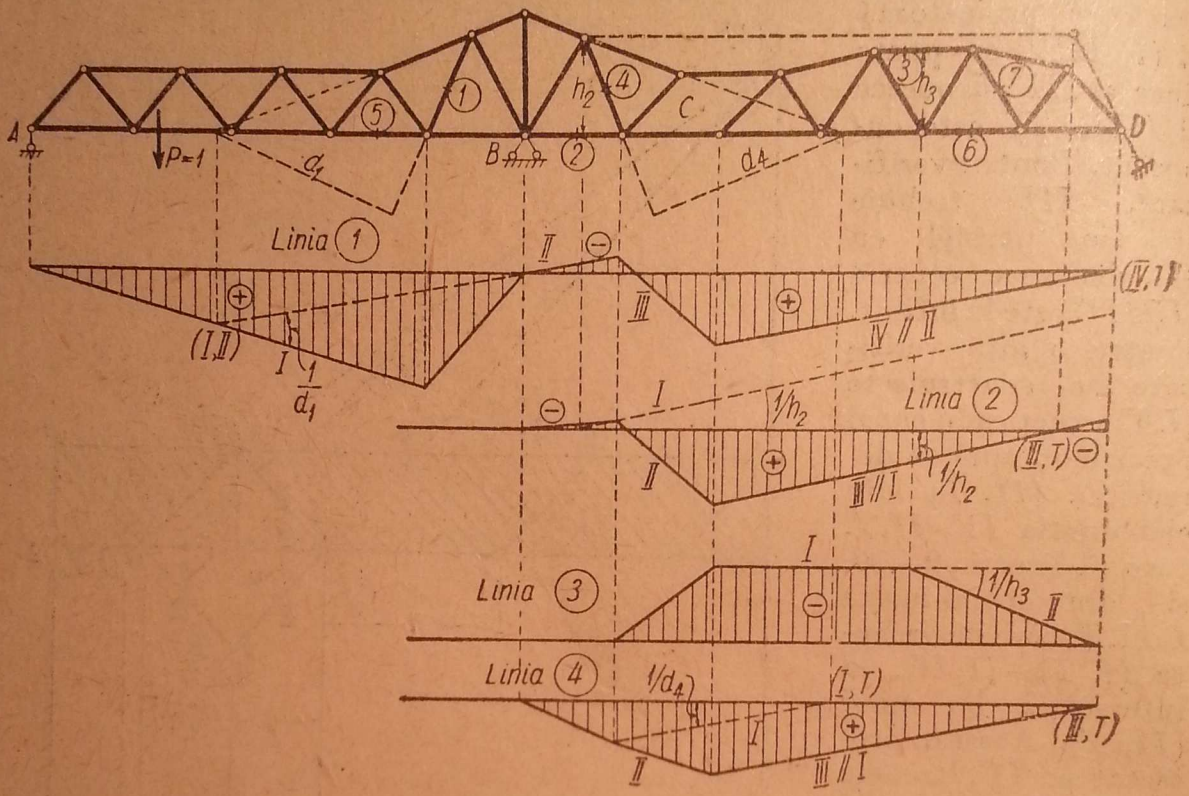


Fig. 213.

Indicații. Liniile *1, 2, 3, 4* sînt construite în fig. 213. Se observă că paralelogramul din *C* face ca grinda din dreapta să rămînă mereu paralelă cu o parte a grinzii principale *ABC*.

De asemenea, trebuie să se țină seamă de influența înclinării reazemului din *D* pentru linia *2*.

Aplicația 53. Să se găsească liniile de influență caracteristice ale eforturilor în barele sistemului din aplicația 50 (fig. 202), prin deplasări virtuale.

Indicații. Se procedează ca în aplicația 52, ținîndu-se seama că patrulaterul *13—14—15—16* nu mai este un paralelogram ca în fig. 213. În consecință, consola din dreapta lui *B* și grinda independentă vor avea centrul relativ de rotație în punctul *C*, determinat de intersecția barelor *13—15* și *14—16*.

Aplicația 54. Să se construiască liniile de influență ale eforturilor în montanții *1, 2, 3, 4, 5* ai grinzii din fig. 214, prin deplasări virtuale.

Indicații. Corpurile care rămîn geometric nedeformabile după suprimarea unei bare sînt arătate la fiecare linie în parte, dar centrele au fost indicate numai în proiecția deplasărilor. Să se examineze fiecare linie și să se interpreteze forma și scara, în funcție de particularitățile ei.

Aplicația 55. Să se construiască liniile de influență ale eforturilor în barele S_{10-12}, D_{8-10} și D_{6-8} la grinda din fig. 215, prin deplasări virtuale.

Indicații. Sistemul cinematic și epura deplasărilor verticale (linia de influență) sînt arătate la fiecare linie în parte, cu toate detaliile. Se remarcă influența înclinării reazemului *B* la toate liniile de influență. La linia D_{8-10} corpurile *I* și *II* rămîn paralele, iar la linia D_{6-8} corpurile *II* și *III* rămîn paralele.

Aplicația 56. Să se construiască liniile de influență ale eforturilor în barele S_{7-9}, S_{3-5} și I_{2-4} la grinda din fig. 216, *a*, cînd $P = 1$ se deplasează pe talpa inferioară.

Indicații. *Linia* S_{7-9}. Fig. 216, *a* și *a'*. Centrul (IV, T) se găsește la intersecția dreptelor *13—14* și *0—5* din patrulaterul *13—14—5—0*, iar centrul (II, IV), la intersecția dreptelor *14—9* și *5—8* din patrulaterul *5—14—9—8*. Centrul (II, T) se găsește la intersecția dreptelor *0—8* și $(IV, T) - (II, IV)$, și coincide, din datele geometrice, cu nodul *12*. Centrele (I, T), (II, T) și (I, II) sînt suficiente pentru linia S_{7-9}.

Linia S_{3-5}. Fig. 216, *b* și *b'*. Centrul (*II*, *T*) se găsește la intersecția dreptei *0—4* (combinația *T*, *I*, *II*) cu dreapta *13—14* (combinația *T*, *III*, *II*), adică la infinit, deci *II* va avea o mișcare de translație față de teren.

Scara rezultă din $\theta_{I,II} = \frac{1}{a}$.

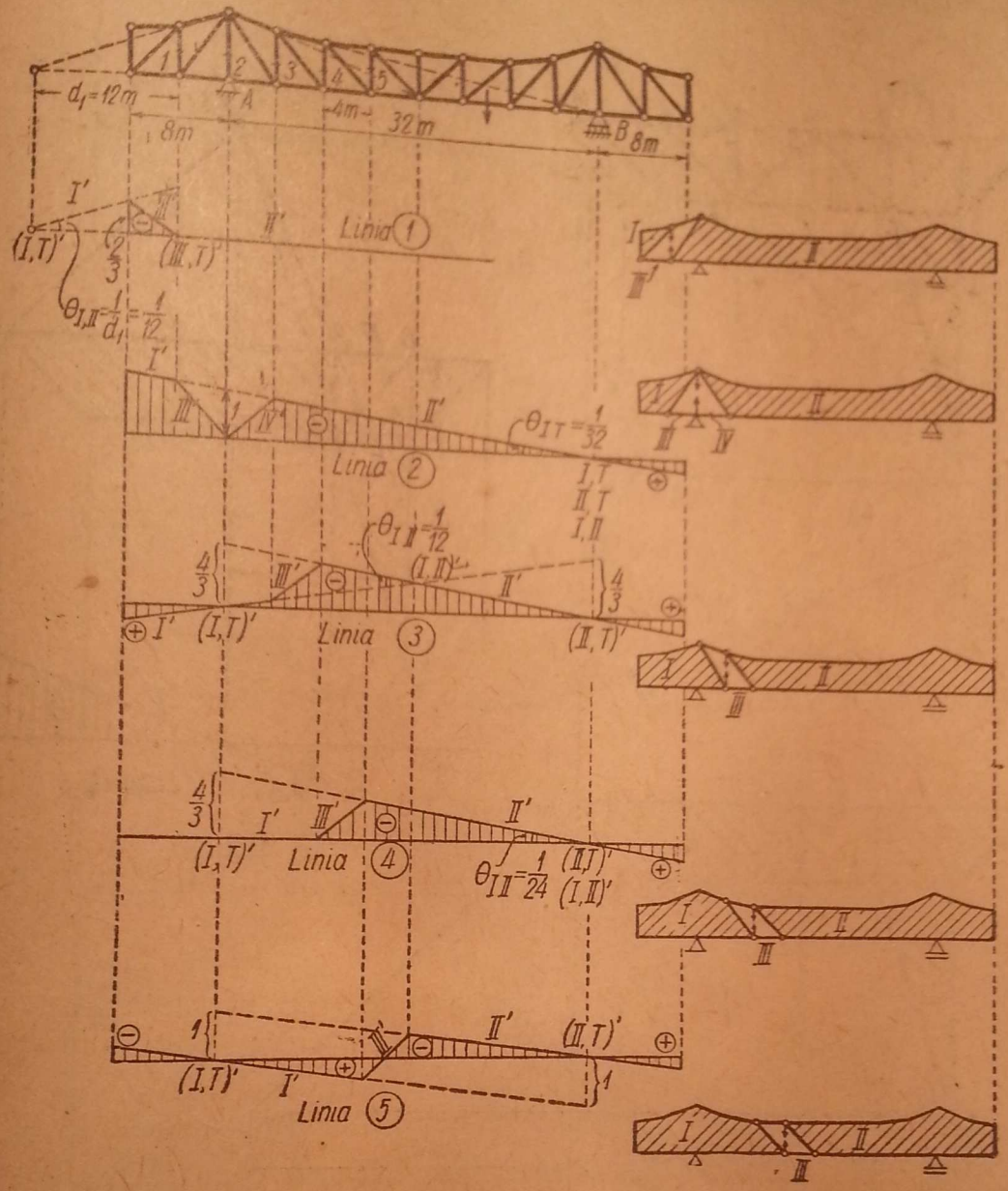


Fig. 214.

Linia I_{2-4}. Fig. 216, *c* și *c'*. Centrul (*II*, *T*) se găsește la intersecția dreptelor *13—14* și *0—3*, din patrulaterul *0—13—14—3*. Scara rezultă din $\theta_{I,II} = \frac{1}{a}$. Pe regiunea *2—4* se corectează, deoarece $P = 1$ se aplică pe talpa inferioară.

Aplicația 57. Să se construiască liniile de influență ale eforturilor în barele *1—9*, *4—8*, *1—6* și *8—9* ale grinzii din fig. 217, *a*.

Indicații. *Linia* D_{1-9}. Sistemul cinematic este reprezentat în fig. 217, *a*, iar epura deplasărilor verticale, în fig. 217, *a'*. Dreptele *I'* și *II'* rămîn paralele. Scara, din relația : $d'\theta_I + d''\theta_{II} = u_{1-9} = 1$, unde $d' = d'' = \frac{l}{2}\sin\alpha$ și $\theta_I = \theta_{II}$. Rezultă $\theta_I = \frac{1}{l \sin \alpha}$.

Linia D_{4-8}. Corpul $A-2-7$ nu are nici o deplasare față de corpul $B-4-9$ (fig. 217, *b*), deoarece, la o deplasare infinit mică de ordinul întîi a nodurilor *3* și *8*, nodurile *2* și *4*, respectiv *7* și *9*, se apropie cu o cantitate infinit mică de ordinul al doilea, care se neglijează. Deci, părțile $A-2-7$ și $B-4-9$ alcătuiesc un singur corp (*I*) care nu se deplasează, deoarece are o articulație în *A* și un reazem în *B*. În consecință, nodul *8* se poate deplasa numai ca în fig. 217 *b'*. Scara

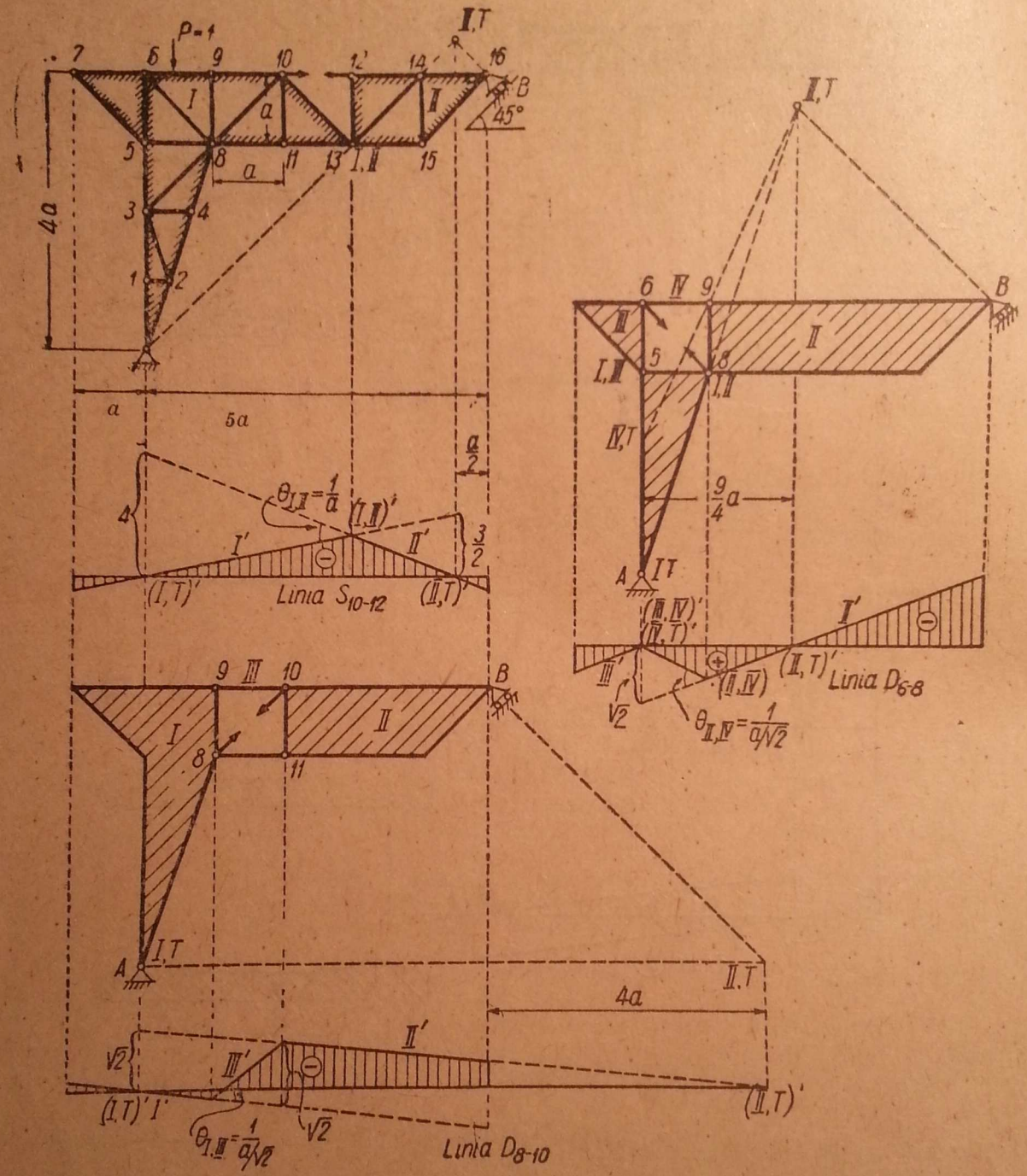


Fig. 215.

rezultă din $\theta_{IV} = \frac{1}{d_2}$, unde $d_2 = \lambda \sin \beta$, iar ordonata vîrfului triunghiului este $\lambda\theta_{IV} = \frac{\lambda}{\lambda \sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta}$. Diagonala D_{4-8} este o bară suplimentară, cum rezultă și pe cale analitică din separarea succesivă a nodurilor *3* și *8*.

Linia V_{1-6}. Corpurile $A-1-5$ și $B-3-8$ din fig. 217, *c* nu au nici o deplasare între ele, deoarece la deplasarea de ordinul întîi a punctelor 2, 6 și 7, distanțele $1-3$ și $5-9$ rămîn neschim-

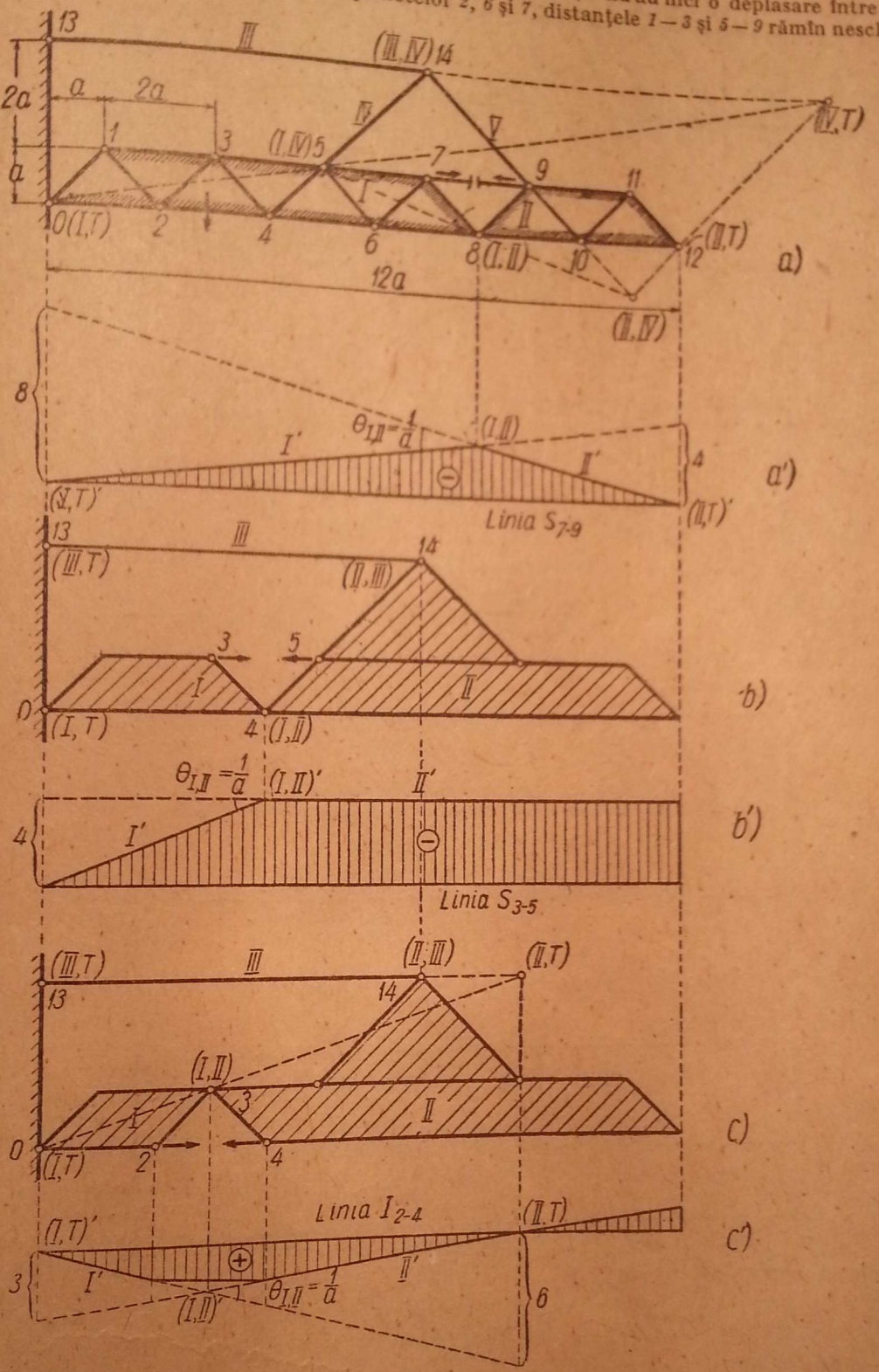


Fig. 216.

bate. De aceea a fost notat cu un singur corp *I*, care stă pe loc, fiind legat în *A* și *B*. Dreptunghiul $2-3-7-8$ ca și paralelogramul $1-2-6-5$ arată că corpul *II* trebuie să rămînă paralel cu *I* în timpul deplasării, astfel încît epura deplasărilor verticale (linia de influență) apare ca în fig. 217, *c'*. Scara rezultă din faptul că $u_{1-6}=1$ apare în adevărată mărime în epura deplasărilor.

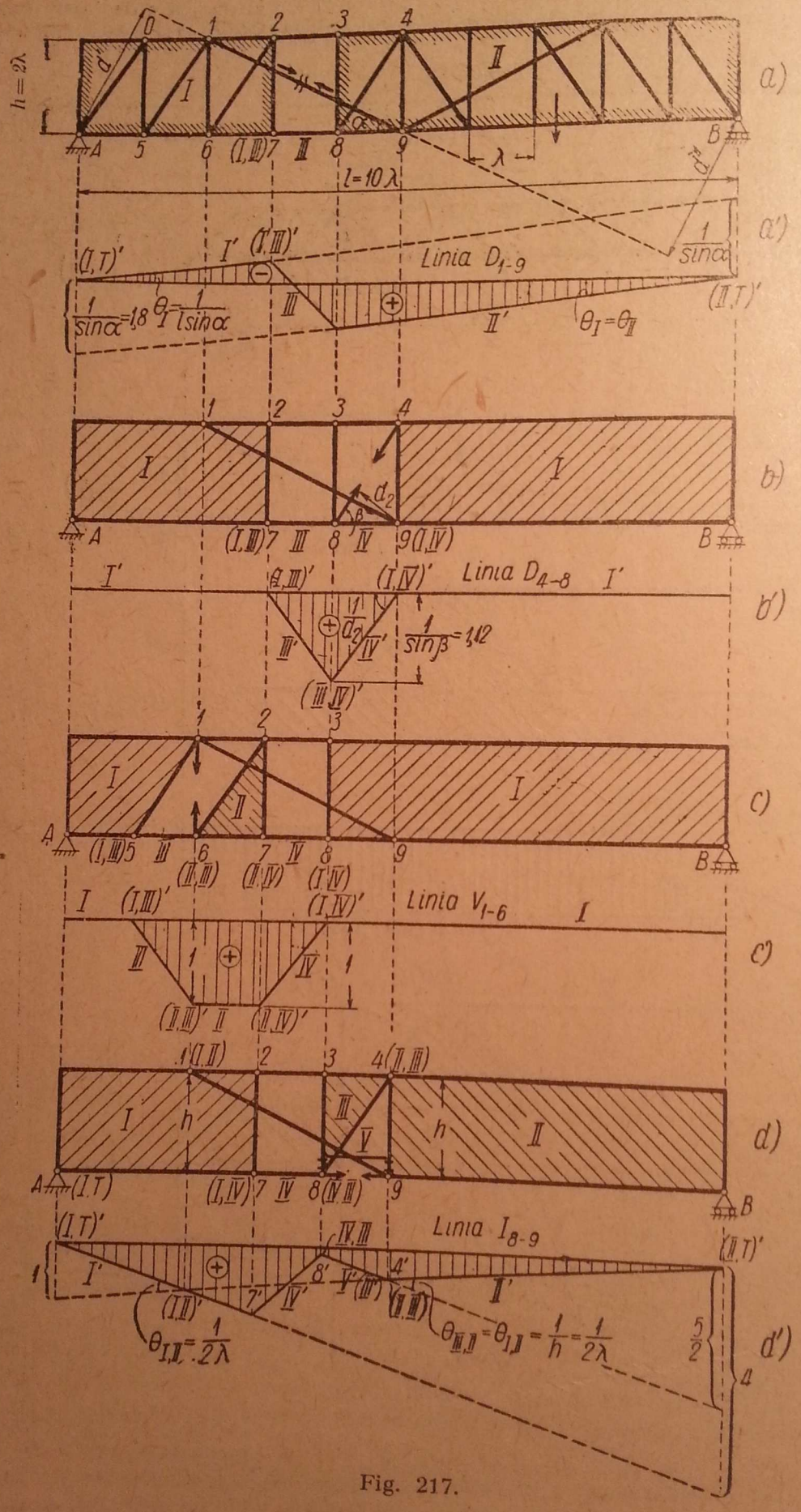

h = 2λ
a)
a')
b)
b')
c)
c')
d)
d')
Linia D_{1-9}
Linia D_{4-8}
Linia V_{1-6}
Linia I_{8-9}
l = 10λ
λ
$\frac{1}{\sin\alpha}$
$\frac{1}{\sin\alpha} = 1{,}8$
$\theta = \frac{1}{l\sin\alpha}$
$\frac{1}{\sin\beta} = 1{,}12$
$\theta_I = \theta_{II}$
$\theta_{III} = \theta_{IV} = \frac{1}{h} = \frac{1}{2\lambda}$
$\theta_{I,II} = \frac{1}{2\lambda}$
A
B
h

Fig. 217.

V_{1-6} este, de asemenea, o bară suplimentară, cum se verifică analitic din separarea succesivă a nodurilor *7*, *2* și *6*.

Linia I_{8-9} Sistemul cinematic este arătat în fig. 217,*d*. Bara $1-9$ nu are nici o deplasare față de corpul *II*, deoarece punctele *1*, *2*, *3* și *4* sînt în linie dreaptă, iar deplasarea de ordinul întîi a lui *3* și *8* pe verticală nu modifică distanța $1-4$. Deci, centrul de rotație $(I-II)$ se găsește în nodul *1*. Cu aceasta se poate construi epura deplasărilor verticale (fig. 217, *d'*). Se duce dreapta I', pe ea se proiectează (I, II) și se duce II' prin $(II, T)'$. Dreapta I' este valabilă pînă în nodul *7*. Corpul *III* este articulat de *II* în nodul *4*. Tot corpul *III* trebuie să rămînă paralel cu *I*, dator rită dreptunghiului $2-3-7-8$. Deci, din $4'$ se duce III', paralela la I', care este valabilă pînă la verticala nodului *8*. Se unește apoi $7'$ cu $8'$. Lonjeronul dintre nodurile *8* și *9* (numit corpul *V*) se suprapune în proiecție peste III'.

Scara se obține din :

$$\theta_{II,III} = \frac{1}{h} = \frac{1}{2\lambda}$$

sau :

$$\theta_{I,II} = \theta_{II,III} = \frac{1}{2\lambda}.$$

§ 25. METODA DIAGRAMEI VITEZELOR (DEPLASĂRILOR)

Principiul deplasărilor virtuale se poate aplica și folosind diagrama vitezelor (deplasărilor), cum s-a arătat în Cap. II, § 11 – C. Aici ea va fi aplicată pentru aflarea eforturilor în bare, și a liniilor de influență. Această metodă este utilă acolo unde epura deplasărilor pe o direcție dată ar necesita determinarea prea multor centre instantanee.

Teoria metodei fiind cunoscută, se trece direct la aplicarea ei, în cazul grinzilor cu zăbrele.

a) Grinzi cu zăbrele simple

Pentru grinda din fig. 218, să se determine efortul din bara $7-8$, încărcările pe grindă fiind P_2, P_4, P_8, P_{10}.

Se suprimă bara $7-8$ și, din punct de vedere cinematic, grinda s-a transformat într-un mecanism cu un singur grad de libertate. Din punct de vedere static, în locul barei $7-8$ suprimate, se introduce perechea de eforturi D_{7-8} în nodurile *7* și *8*.

Se construiește diagrama vitezelor sau a deplasărilor.

Se observă că partea $1-6-7$ formează un singur corp nedeformabil. De asemenea, partea $8-9-12$ formează alt corp nedeformabil. Nu se poate începe deocamdată diagrama vitezelor, deoarece condițiile de rezemare ale acestui sistem sînt astfel, încît nici una dintre părțile haşurate nu este fixă. Pentru a evita această dificultate, se face artificiul următor :

Se scoate reazemul *12* și se așază în alt loc, de exemplu, în *5*, astfel ca una dintre părți (partea $1-6-7$) să rămînă fixă. Se observă că prin această schimbare a reazemului *12*, deplasările relative ale celor două părți ale sistemului cinematic au rămas aceleași. Ceea ce s-a schimbat este numai poziția ansamblului deformat față de teren. Aceasta rezultă din faptul că grinda, înainte de suprimarea barei $7-8$, era un sistem geometric nedeformabil, independent de legăturile lui cu terenul, adică era o grindă liberă. Prin înlocuirea reazemului *12* cu un reazem provizoriu în *5*, partea $1-6-7$ rămîne fixă și se poate începe diagrama vitezelor. Punctul *6* fiind fix, se

dă nodului 8 o viteză (deplasare) arbitrară, care, rabătută cu 90°, ajunge în 8'. Se poate trece acum la nodul 9. Acesta este legat de punctul fix 7, deci punctul său rabătut 9' se va găsi pe dreapta 9—7. Nodul 9 aparține însă și barei 8—9. Dar 8' a fost determinat, astfel încît 9' va trebui să se găsească și pe paralela din 8' la dreapta 8—9. Astfel se determină 9'.

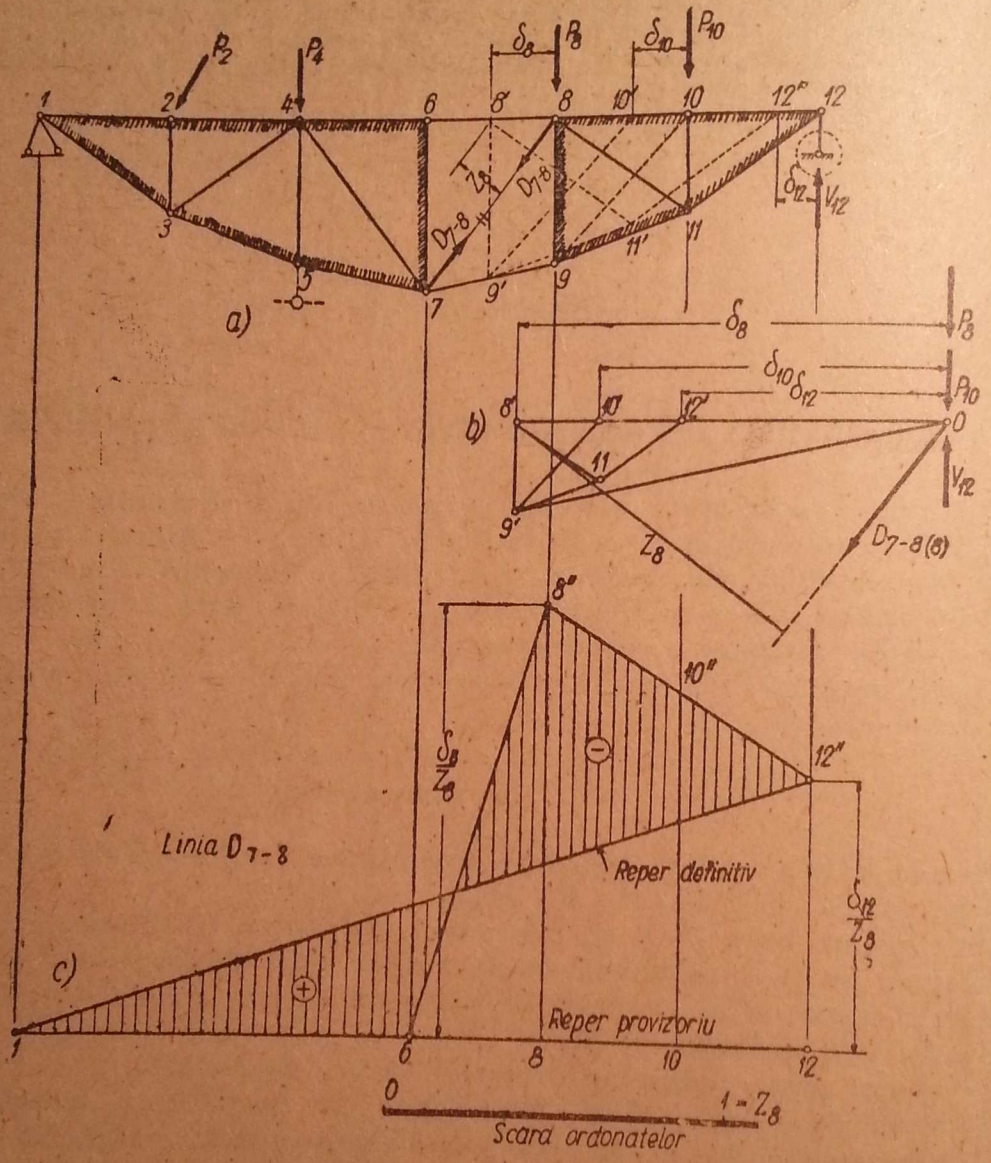


Fig. 218.

Celelalte puncte 10, 11 și 12 se rabat ușor, deoarece, împreună cu dreapta 8—9 formează un corp rigid, deci ca să se obțină 10', se duce din 8' o paralelă la 8 — 10, și din 9', o paralelă la dreapta 9 — 10. 11' se obține ducînd din 8' paralelă la 8 — 11, și din 9', paralelă la 9 — 11. 12' se determină ducînd din 10' paralelă la 10—12, și din 11' paralelă la 11—12. Avem astfel toate deplasările nodurilor. Aceste deplasări se pot construi separat, cum am văzut în Cap. II, § 11—C, dacă dintr-un pol O, care simbolizează toată construcția înainte de deformare, se duce întîi viteza rabătută 8—8', adică O—8', apoi din 8', paralela la 8—9, și din O, paralelă la 7—9, care determină

pe $9'$, apoi din $8'$ paralela la $8-10$ și din $9'$ paralela la $9-10$, care determină pe $10'$, și așa mai departe (fig. 218, *b*).

Toate deplasările punctelor se măsoară de la polul O, iar sarcinile se aplică toate în punctul O.

Acum se poate scrie ecuația de lucru mecanic virtual. Se observă însă că prin schimbarea rezemării, reacțiunea din *12* produce lucru mecanic, în schimb nu mai produc forțele P_2 și P_4.

Deci, în prealabil, trebuie determinată reacțiunea V_{12}, ceea ce se face foarte ușor la o grindă liberă.

Ecuația de lucru mecanic virtual înseamnă aici exprimarea condiției ca suma momentelor forțelor în raport cu punctele lor de aplicație rabătute să fie nulă.

Deci, se scrie :

$$P_8 \cdot \delta_8 + P_{10} \cdot \delta_{10} - V_{12} \cdot \delta_{12} + D_{7-8} \cdot z_8 = 0.$$

Distanțele δ_8, δ_{10}, δ_{12}, z_8 se pot măsura fie pe grindă, fie, mai ușor, pe diagrama vitezelor din polul O. Rezultă :

$$D_{7-8} = \frac{V_{12} \cdot \delta_{12} - P_8 \cdot \delta_8 - P_{10} \cdot \delta_{10}}{z_8}.$$

S-a obținut astfel efortul din bara $7-8$.

Linia de influență a efortului din bara $7-8$ se determină tot cu elementele găsite pînă acum.

Linia de influență este proiecția pe verticală a liniei de încărcare, deci se vor reprezenta într-o epură proiecțiile pe verticală ale deplasărilor nodurilor tălpii pe care se deplasează $P = 1$. Deoarece însă în diagrama vitezelor acestea sînt rabătute cu 90°, proiecțiile lor verticale reale vor fi găsite ca proiecții orizontale pe construcția precedentă. Deci, proiecțiile orizontale ale deplasărilor nodurilor măsurate pe verticală în dreptul nodurilor respective de la o linie de reper vor da linia de influență. În cazul de față, sarcina $P = 1$ circulă pe talpa superioară, și deplasările rabătute ale nodurilor *8*, *10* și *12* sînt chiar orizontale, așa că vor fi trecute în $8-8''$, $10-10''$, $12-12''$, pe verticală de la o linie de reper provizorie. Între nodurile consecutive, diagrama este liniară (linia lonjeroanelor). Partea de la *1* la *6* nu are deplasări și se va așeza chiar pe linia de reper provizorie.

S-a obținut astfel epura deplasărilor pe verticală date de $1-6-8''-10''-12''$ în fig. 218, *c*. Aceasta nu este încă linia de influență, deoarece au fost schimbate condițiile de rezemare ; deplasările trecute în epură reprezintă just deplasările relative ale corpurilor, dar nu mai sînt valabile față de teren. Aceasta înseamnă că grinda, în noua situație, deformată geometric, trebuie rotită în jurul articulației *1*, pînă cînd ajunge cu nodul *12* pe reazem, cum a fost la început, sau, ceea ce este tot una, să se lase grinda deformată, dar să se rotească linia de reper care reprezintă terenul, în jurul lui *1*, pînă ajunge cu reazemul din dreapta peste nodul *12* deplasat, adică să se ducă dreapta $1-12''$ care va fi linia de reper definitivă, în fig. 218, *c*. Deplasările reale vor fi cele hașurate, și aceasta va fi deci linia de influență.

Pentru a-i găsi semnul și scara, se pune $P = 1$ undeva pe grindă și se scrie ecuația de lucru mecanic. Dacă $P = 1$ se găsește în stînga lui *6*, în situația cînd

în 5 era reazem, atunci numai forțele V_{12} și D_{7-8} din nodul 8 produc lucru mecanic :

$$-V_{12}\cdot\delta_{12}+D_{7-8}\cdot z_8=0,$$

de unde

$$D_{7-8}=\frac{\delta_{12}}{z_8}\cdot V_{12} \quad \text{și cum} \quad V_{12}=\frac{a}{l}$$

$$D_{7-8}=\frac{\delta_{12}}{z_8}\cdot\frac{a}{l}. \qquad (m)$$

Dacă se consideră $a=l$, se obține ordonata pe reazemul 12 cu valoarea $\frac{\delta_{12}}{z_8}$ cu semnul plus, așa cum e trecut în fig. 218, *c*. Partea care trece dincolo de linia de reper definitivă este negativă. Dacă se măsoară ordonatele la aceeași scară la care a fost construită și diagrama polară a vitezelor, formula (m) dă și scara ordonatelor pe cale grafică, luînd valoarea numitorului egală cu 1. Deci, $z_8=1$ reprezintă scara grafică a liniei de influență.

În acest mod se aplică metoda diagramei vitezelor atît pentru eforturi din încărcarea permanentă, cît și pentru sarcini mobile.

Avantajul ei este pus în evidență la sistemele complexe care vor fi studiate mai jos.

b) Sisteme complexe

Grinda din fig. 219, *a* nu are nici un nod cu două bare, și orice secțiune taie mai mult decît trei bare neconcurente. Metoda diagramei vitezelor dă însă direct efortul în orice bară.

Se va determina efortul V_{7-8} din încărcările din figură.

Se suprimă bara 7—8, introducîndu-se în nodurile 7 și 8 efortul V_{7-8}. Sistemul cinematic cu un grad de libertate în care s-a transformat grinda rămîne numai cu triunghiul 1—2—11, rigid. Deci se va scoate reazemul din 8 și va fi pus în 11, astfel ca să se fixeze de teren partea haşurată.

Diagrama vitezelor se face în paralel și pe grindă și dintr-un pol fix *O* (fig. 219, *b*), unde se ia o scară mai mare pentru deplasări.

Se dă lui 3 o deplasare arbitrară, și punctul său rabătut va fi 3′ pe direcția 2—3, deoarece 2 este pe corpul fixat de teren. Se construiește 4′ care se găsește pe 1—4 (1 fiind fix) și pe paralela din 3 la 3—4. La fel se construiește 5′ care se găsește pe 11—5 (11 este fix) și pe paralela din 4′ la 4—5.

Apoi se trece la 10′ care se găsește pe 11—10 (11 este fix) și pe paralela din 3′ la 3 — 10. La fel se construiește 9 prin paralela din 4′ la 4—9, și prin paralela din 10′ la 10—9. Se trece la punctul 6′, ducînd din 5′ paralela la 5—6, și din 10′ paralela la 10—6; apoi la 7, ducînd din 6′ paralela la 6—7, și din 9, paralela la 9—7; în sfîrșit, la 8, prin paralela din 5 la 5—8, și paralela din 9′ la 9—8.

Diagrama vitezelor cu polul în *O* (fig. 219, *a*) arată mai clar rapoartele dintre aceste viteze (deplasări).

Pentru a determina pe V_{7-8} din încărcările P_3 și P_4 se scrie ecuația de lucru mecanic virtual (momentele forțelor în raport cu punctele de aplicație rabătute) și rezultă :

$$P_3\,\delta_3+P_4\,\delta_4+V_{7-8}\,z_7-V_{7-8}\,z_8-V_8\,\delta_8=0, \text{ de unde}$$

$$V_{7-8}=\frac{V_8\,\delta_8-P_3\,\delta_3-P_4\,\delta_4}{z_7-z_8}. \qquad (4.26)$$

Procedînd astfel, trebuie deci în prealabil să se determine reacțiunea V_8, ceea ce este foarte ușor fiind vorba de o grindă liberă.

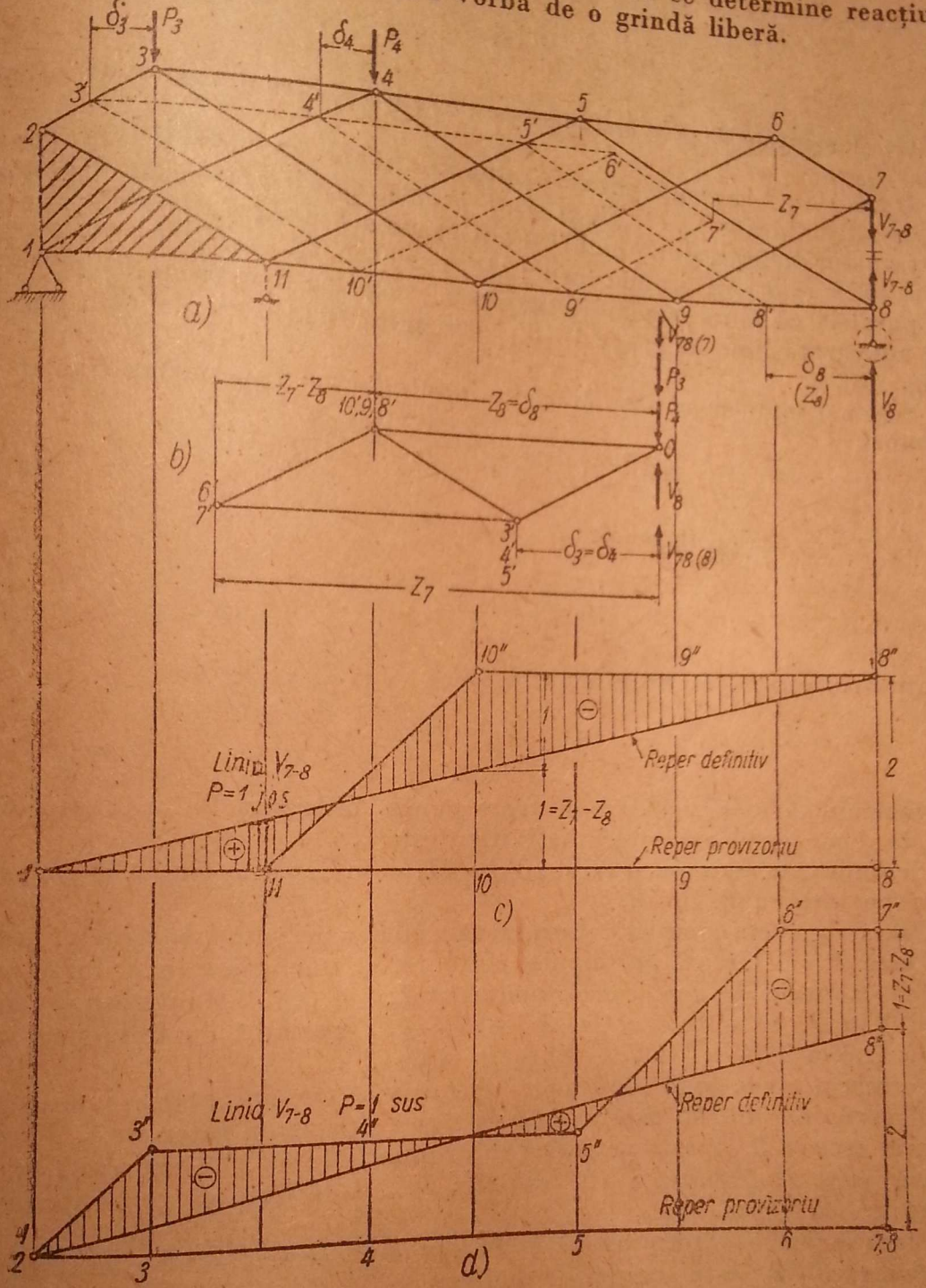


Fig. 219.

Din diagrama deplasărilor cu polul în O rezultă că :

$$\delta_3 = \delta_4,\ \delta_8 = z_8 = 2\ \delta_3 \quad \text{și} \quad z_7 = 3\delta_3$$

și, deci, în formula (4.26) parametrul deplasărilor se simplifică rămînînd numai rapoartele dintre ele :

$$V_{7-8} = 2\ V_8 - P_3 - P_4.$$

Dacă se ia $P_3 = P_4 = P$, se obține

$$V_8 = \frac{P}{2} \quad \text{și} \quad V_{7-8} = -P.$$

Cu elementele de pînă aici se poate trece la construcția liniei de influență a lui V_{7-8}.

Dacă $P = 1$ se deplasează pe talpa inferioară, se vor ridica în ordonate în dreptul nodurilor *1*, *11*, *10*, *9* și *8* proiecțiile orizontale ale deplasărilor rabătute din diagrama cu polul *O*. Pe porțiunea *1 — 11* ordonatele sînt nule, iar în *10*, *9* și *8* sînt numai ordonate egale cu δ_8. Deci, *10'' — 9'' — 8''* este paralelă cu linia provizorie de reper, iar *11* se unește cu *10''*. Se trage apoi adevărata linie de reper *1—8''* și rezultă linia de influență, hașurată în fig. 219, *c*.

Scara și semnele se pot determina punînd $P = 1$ pe partea fixă, *1—11*, și atunci :

$$V_{7-8}\,(z_7 - z_8) - V_8\,\delta_8 = 0,$$

iar $V_8 = \frac{a}{l}$, așa încît rezultă :

$$V_{7-8} = \frac{\delta_8}{z_7 - z_8} \cdot \frac{a}{l}. \qquad (4.26')$$

Cu ajutorul relațiilor obținute între δ_8 și z_7, (4.26') devine

$$V_{7-8} = 2\,\frac{a}{l}. \qquad (4.26'')$$

Pe reazemul *8*, $a = l$, și deci în acest punct diferența de ordonate dintre linia de reper provizorie și cea definitivă este 2.

Semnul este plus pe intervalul *1—11*, cum rezultă din (4.26') și, deci, minus pe intervalul *10—8*.

Linia V_{7-8} este complet determinată cînd $P=1$ circulă pe talpa inferioară.

Dacă $P=1$ circulă pe talpa superioară, se vor ridica în ordonate proiecțiile orizontale ale deplasărilor nodurilor *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, luate din diagrama cu polul în *O*. Se obține astfel *3'' —4'' — 5''* paralelă cu linia provizorie de reper, apoi *5'' —6''* și *6''—7''*, cum și *2—3''*.

Pentru a trage linia de reper definitivă, trebuie să se construiască și deplasarea nodului *8*, deși acesta se găsește pe talpa inferioară, deoarece reazemul este în *8*. Acesta se ridică în ordonată în *8''*. Reazemul *1* se proiectează peste *2*. Dreapta *1—8''* din fig. 219, *d* dă linia de reper definitivă a liniei de influență.

Scara se poate determina ca și în cazul precedent și, evident, rezultă că ordonata *8—8''* este aceeași de mai sus, adică *2*. Celelalte valori se deduc din aceasta. Partea care rămîne între linia de reper definitivă și cea provizorie este pozitivă, iar cealaltă, negativă.

Linia de influență se schimbă complet cînd se trece de la transmiterea sarcinilor pe talpa inferioară la talpa superioară. Aspectul lor este neobișnuit, datorită legăturilor complexe dintre cele două tălpi.

Pînă aici s-a luat prima deplasare de o valoare arbitrară, pentru a se putea urmări construcția punctelor rabătute prin linii distincte. Dacă se ia prima deplasare (viteză) egală cu lungimea barei respective, la sistemele

cu bare paralele, liniile de construcție ale punctelor rabătute se suprapun peste barele grinzii, și desenul se simplifică.

Scara și semnele liniei de influență prin metoda diagramei vitezelor se pot determina și direct din teoria generală, fără a mai exprima ecuația de lucru mecanic pentru fiecare caz în parte.

În ecuația generală (2.30) :

$$-S_x \cdot \Delta_x + 1 \cdot v_i = 0,$$

în care Δ_x are sens contrar lui S_x, dacă se ia $\Delta_x = 1$ rezultă ecuația (2.32) :

$$S_x = v_i.$$

În diagrama vitezelor, dacă bara suprimată este bara ij, rezultă :

$$\Delta_x = z_i - z_j.$$

Deci : $z_i - z_j = 1$ reprezintă scara liniei de influență.

Pentru determinarea semnelor liniei de influență se observă că, depărtînd nodul i de nodul j cu $z_i - z_j = 1$, astfel ca lucrul mecanic $N_{ij} \cdot (z_i - z_j)$ să fie negativ, punctele rabătute ale nodurilor se obțin prin rotirea vitezelor cu 90° într-un anumit sens : orar sau antiorar. În epura deplasărilor verticale, deplasările nodurilor vor fi just reprezentate cînd vor fi obținute prin rabatere cu 90° pornind de la linia de reper provizorie în sens contrar celui de mai sus. Dacă se respectă aceste indicații, deplasările care apar deasupra liniei de reper provizorie vor fi negative. Ducînd linia de reper definitivă, ordonatele de deasupra ei vor fi negative, iar cele de dedesubt vor fi pozitive.

Astfel, în exemplul din fig. 218, scara este dată de relația $z_i - z_j = z_8 - z_7 = z_8 = 1$.

Pentru semne, trebuie observat că ținînd fixă regiunea $1-6-7$, nodul 8 se depărtează de nodul 7 printr-o deplasare în sus, normală pe bara $6-8$. Deci, punctul rabătut $8'$ a ajuns pe bara $6-8$ printr-o rotire a vitezei cu 90° în sens invers acelor unui ceasornic, situîndu-se la stînga nodului 8. În epura deplasărilor verticale, punctul $8'$, care se găsește la stînga lui 8, trebuie rotit în jurul lui 8 pornind de la linia de reper provizorie, cu 90° în sens contrar celui inițial, adică în sensul acelor unui ceasornic, astfel încît $8''$ va fi reprezentat deasupra liniei de reper provizorie. Deci, ordonata $8-8''$ are semnul negativ. Ducînd linia de reper definitivă, $1-12''$, rezultă semnele pe toată linia de influență D_{7-8}.

În problema din fig. 219, scara rezultă din condiția $z_i - z_j = z_7 - z_8 = 1$. Pentru semne se observă că nodul 7 se depărtează de noul 8 prin rotirea vitezelor din 7 și 8 în sens antiorar față de $7'$, respectiv $8'$, deoarece $z_7 > z_8$. Deci, pornind de la linia de reper provizorie, toate deplasările orizontale ale nodurilor care se găsesc la stînga nodurilor (pe diagrama polară la stînga polului O) vor fi rotite cu 90° în sens orar pentru a ajunge verticale, adică vor fi reprezentate deasupra liniei de reper provizorie și, în consecință, vor fi negative. Ducînd linia de reper definitivă $1-8''$, părțile care rămîn deasupra ei au semnul minus, iar părți ale c care trec sub reperul definitiv au semnul plus.

Metoda diagramei vitezelor dă soluții directe la sistemele complexe, cum s-a văzut în cazul fig. 219. Ea este utilizată la sisteme cu zăbrele multiple, cum sînt sistemele dublu dreptunghiular și dublu triunghiular.

Semnul se găsește dînd o rotație în sens orar deplasărilor pornind de la reperul provizoriu. Deoarece 2′, 4′, 6′, se găsesc la dreapta nodurilor 2, 4, 6, rotația antiorară le ridică deasupra liniei

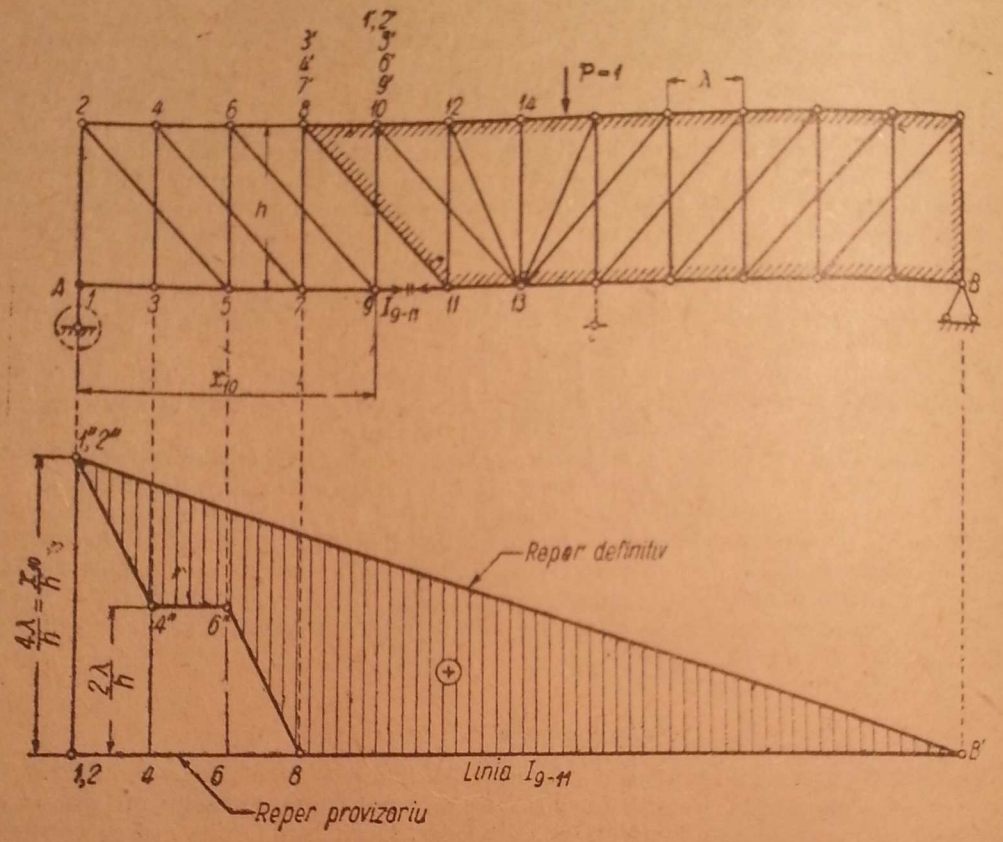


Fig. 221.

de reper provizorie, adică sînt negative față de acest reper. Reperul definitiv 1″ — B′ face ca toate ordonatele să rămînă sub el, deci semnul liniei I_{9-11} este pozitiv pe toată deschiderea grinzii

d) Grinzi cu zăbrele, sistem dublu triunghiular

Linia de influență D_{7-8} (fig. 222). Se suprimă bara 7—8, și partea de la dreapta barei 6—9 rămîne geometric nedeformabilă. Se mută reazemul din 1 la dreapta lui 6, pentru a fixa această parte de teren. Se dă lui 7 deplasarea 7 7′, egală cu lungimea barei 7—9. Urmărind modul cum se deplasează celelalte noduri, rezultă că în nodul 5 apar punctele rabătute 5′, 2′ și 3′, în nodul 6 apare 4′, și în nodul 4 ajunge 1′.

Dacă sarcina $P = 1$ se aplică pe nodurile tălpii superioare, se reprezintă deplasările acestora în ordonate și se determină linia de influență respectivă, iar dacă se aplică pe nodurile tălpii inferioare, se raportează deplasările proiectate ale acestora. În fig. 222 sînt trasate amîndouă. Pentru scară se ia depărtarea dintre nodurile 7 și 8 egală cu 1. Or, această depărtare este tocmai distanța de la punctul 7′ la bara 7—8.

Deci, dacă se consideră $z_7 = 1$, la scara la care s-a lucrat, se obțin și ordonatele pe linia de influență din : $7\,7'' = 7\,7' = z_7/\sin\varphi = 1/\sin\varphi$.

Semnele se deduc din considerații identice cu cele din fig. 221, iar rezultatele sînt trecute în fig. 222.

Linia V_{10-11}. Se suprimă bara 10—11 și se constată că tot sistemul se deformează. Rămîn rigide numai triunghiurile mici de la colțuri. S-ar putea imobiliza unul dintre ele, mutînd, de exemplu, reazemul din A în nodul 16. Se poate proceda și în alt mod. Grinda inițială fiind o grindă liberă, adică geometric nedeformabilă, indiferent de legăturile din reazeme, prin suprimarea unei bare a devenit un sistem cinematic cu un grad de libertate, în care deplasările unor părți față de altele nu depind de reazeme. Numai deplasările absolute (față de teren) depind de reazeme, dar acestea nu influențează deplasările relative. Deci, pentru a afla deplasările relative, se poate fixa orice parte a sistemului.

Se scot ambele reazeme A și B și se pun în *8* și *10*, fixînd astfel bara *8—10*. Luînd un pol O pentru construirea diagramei polare a deplasărilor, cum este arătat în fig. 223, *b*, se ia deplasarea arbitrară pentru *9*, $O9'$, și apoi se construiește spre stînga *6'*, *7'*, *4'*, *5'*, *2'*, *1'* și *3'*, iar spre dreapta, începînd de la O și *9'* se construiește *11'* (legat de *9* și *8*), apoi *13'*, *12'*, *15'*, *14'*, *17'*, *16'*, *19'*, *20'* și *18'*. Toate deplasările reale se măsoară de la polul O la punctul respectiv rabătut; interesează însă numai proiecțiile pe orizontală (de fapt, pe verticală, dar ele sînt rabătute cu 90°); $P = 1$ aplicîndu-se pe talpa inferioară, se raportează acestea la o linie de reper provizorie (fig. 223, *c*), care se ia înclinată, ținînd seamă de deplasările reazemelor *1* și *18*, astfel încît reperul definitiv să fie o linie orizontală. Pentru linia de reper definitivă, se trage dreapta *1''—18'''* și

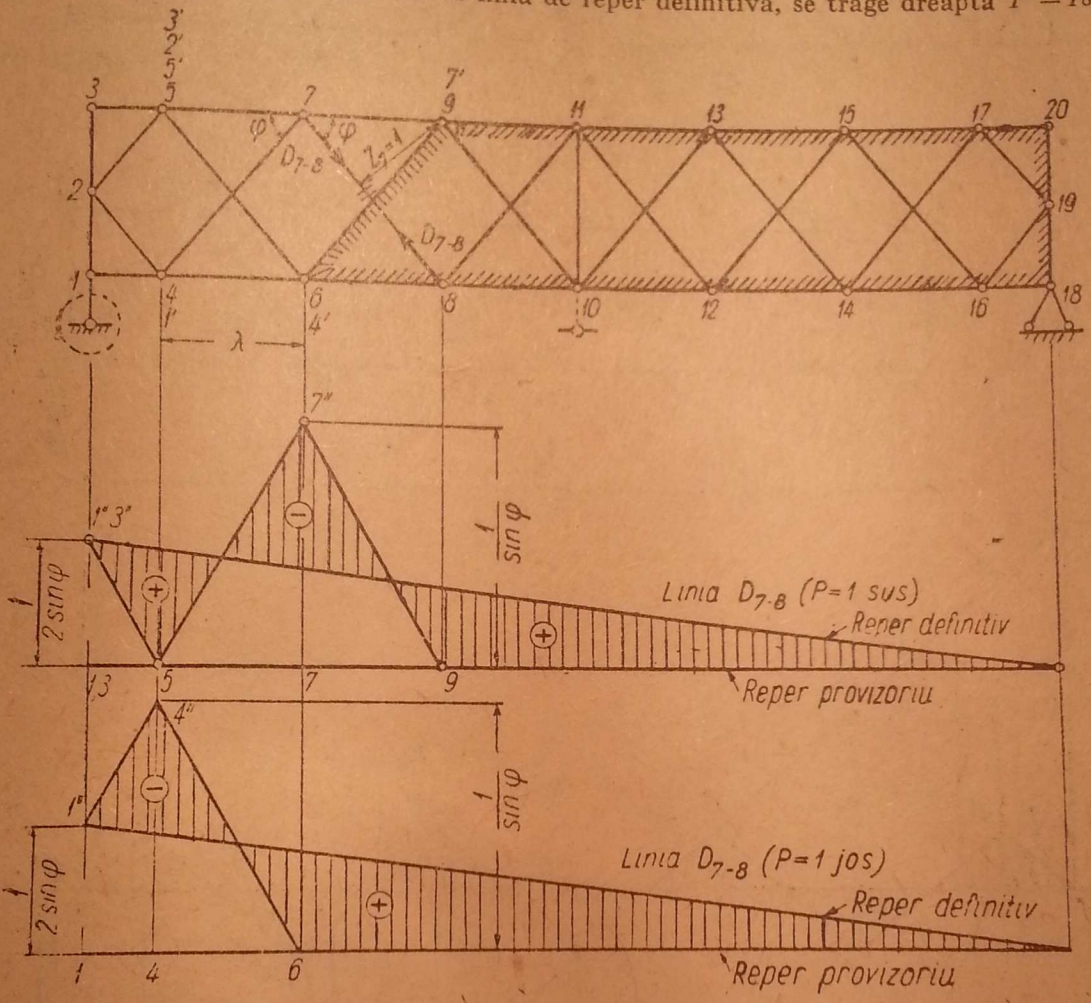


Fig. 222.

linia de influență este cea haşurată. Scara rezultă din $z_{11} = 1$ și valorile sînt trecute pe linia de influență în consecință.

Semnele se pot deduce fie din teoria generală, fie din ecuația de lucru mecanic aplicată direct la cazul de față.

Punînd $P = 1$ între *8* și *10*, rezultă:

$$- V_A \cdot \delta_1 + V_B \cdot \delta_{18} - V_{10-11} \cdot z_{11} = 0,$$

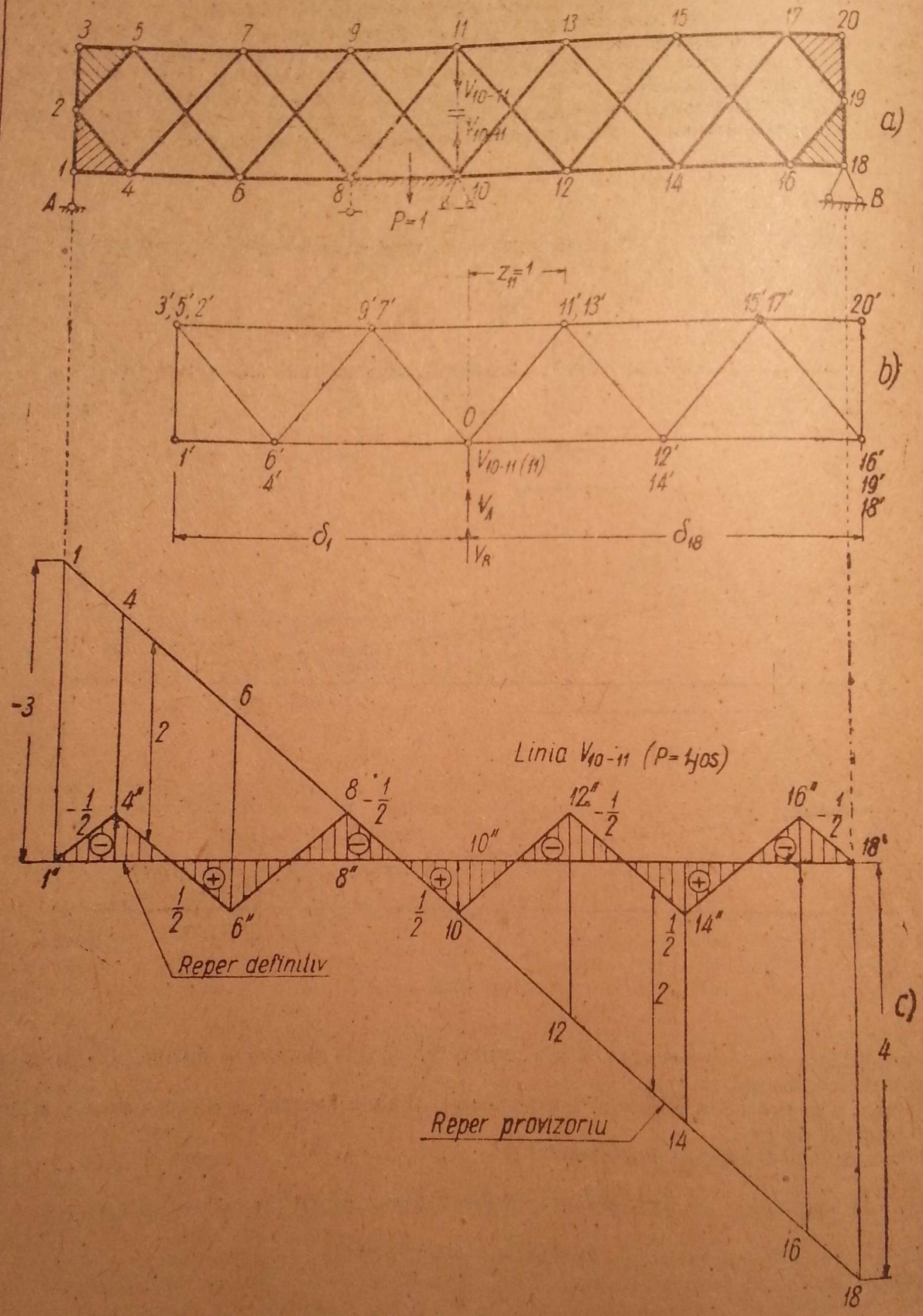
dar

$$\delta_1 = 3 z_{11} \quad \text{și} \quad \delta_{18} = 4 z_{11}$$

astfel încît

$$V_{10-11} = 4 V_B - 3 V_A = \frac{4a - 3b}{l};$$

pentru $a = 0$, $b = l$, avem $V_{10-11} = -3$, deci pe partea stîngă zona între linia de reper provizorie și cea definitivă este negativă.



a)
b)
c)
P=1
V_{10-11}
V_{10-11}
$z_{11}=1$
$V_{10-11}(11)$
V_A
V_B
δ_1
δ_{18}
Linia V_{10-11} (P=1 jos)
Reper definitiv
Reper provizoriu

Fig. 223.

Pentru $b = 0$, $a = l$, avem $V_{10-11} = 4$, deci pe partea dreaptă dintre cele două repere este pozitivă.

Observație. În acest caz, spre deosebire de cele precedente, punctele rabătute au fost unele spre stînga, altele spre dreapta punctelor inițiale ; de aceea și la linia de influență unele ordonate au fost duse deasupra, altele — dedesubtul liniei de reper provizorie. La deducerea semnelor prin teoria generală trebuie, de asemenea, ținut seamă de sensurile deplasărilor, așa cum rezultă din diagrama polară.

e) Grinzi sistem dublu triunghiular cu tălpi poligonale (fig. 224)

Linia D_{7-8}. Se suprimă bara $7-8$ și partea de la dreapta barei $6-9$ rămîne nedeformabilă. Se mută reazemul A la dreapta lui 6, spre a fixa de teren partea nedeformabilă.

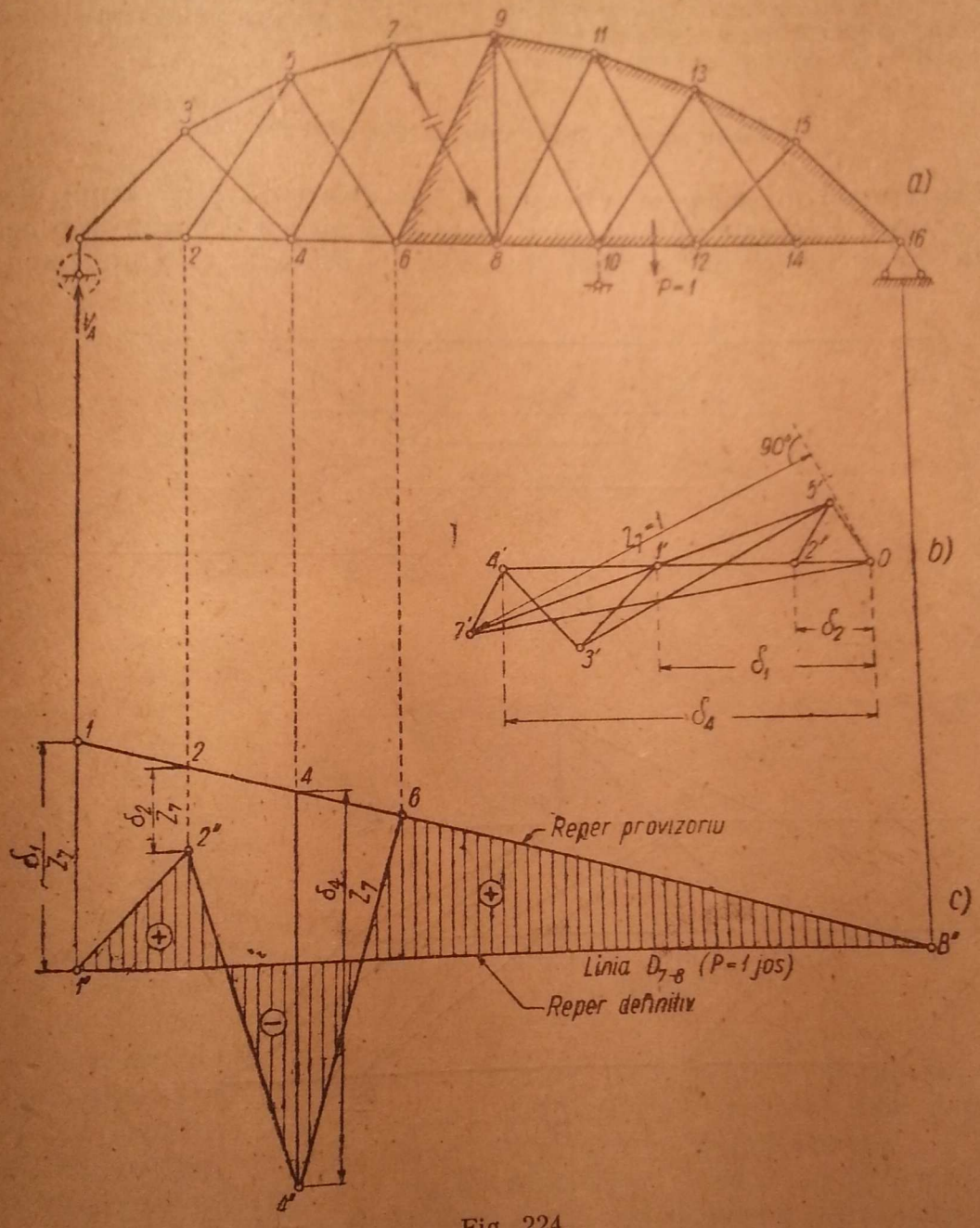


Fig. 224.

Se construiește diagrama polară a vitezelor cu polul în O (fig. 224, *b*), luînd pentru nodul 7 o deplasare arbitrară $O\,7'$ după direcția lui $9-7$. Se trece la nodul 4, care este legat de 6 (fix) și de 7. Din O se duce paralela la $6-4$ (orizontală), iar din $7'$ se duce paralela la $7-4$. Cele două drepte se întîlnesc în $4'$. Se trece acum la nodul 5, care este legat de 7 și de 6 (fix). Din O se duce

paralela la $6-5$, și din $7'$ — la $5-7$; ele se întîlnesc în $5'$. Se trece la 3, care este legat de 4 și 5; din $4'$ se duce paralela la $4-3$ și din $5'$ — paralela la $5-3$; ele se întîlnesc în $3'$. Se trece la nodul 2, care este legat de 4 și de 5. Din $4'$ se duce paralela la $2-4$ (orizontală) și din $5'$ — paralela la $2-5$; ele se întîlnesc în $2'$. Se trece la nodul 1, care este legat de 2 și de 3. Din $2'$ se duce paralela la $2-1$ (orizontală), iar din $3'$ — paralela la $3-1$; ele se întîlnesc în $1'$. Linia de influență se construiește raportînd segmentele δ_1, δ_2 și δ_4 de la linia provizorie care se ia înclinată, ținînd seamă de deplasarea lui 1. Apoi, unind $1''$ cu B'', se determină linia de reper definitivă, orizontală (fig. 224, *c*).

Scara se obține din relația $z_7 = 1$, z_7 fiind distanța de la $7'$ la D_{7-8} din O (fig. 224, *b*).

Depărtînd nodul 7 de nodul 8 pentru a obține pe $7'$ la stînga polului O, înseamnă că rabaterea s-a făcut în sens invers acelor unui ceasornic. Această observație e valabilă pentru toate punctele rabătute. Deoarece, pornind de la reperul provizoriu, obținerea deplasărilor verticale s-a realizat tot printr-o rotație în sens antiorar, nerespectîndu-se convenția inițială, rezultă că ordonatele sub linia de reper provizorie sînt negative. Deci, ordonatele de sub reperul definitiv sînt negative, iar cele de deasupra pozitive.

f) Construcții ajutătoare prin metoda pozițiilor false

Construcția diagramelor vitezelor a fost efectuată pînă acum plecînd de la o parte a schemei grinzii (care poate fi și numai o bară) cu o poziție fixă în raport cu terenul, și apoi dînd o deplasare arbitrară unui nod din

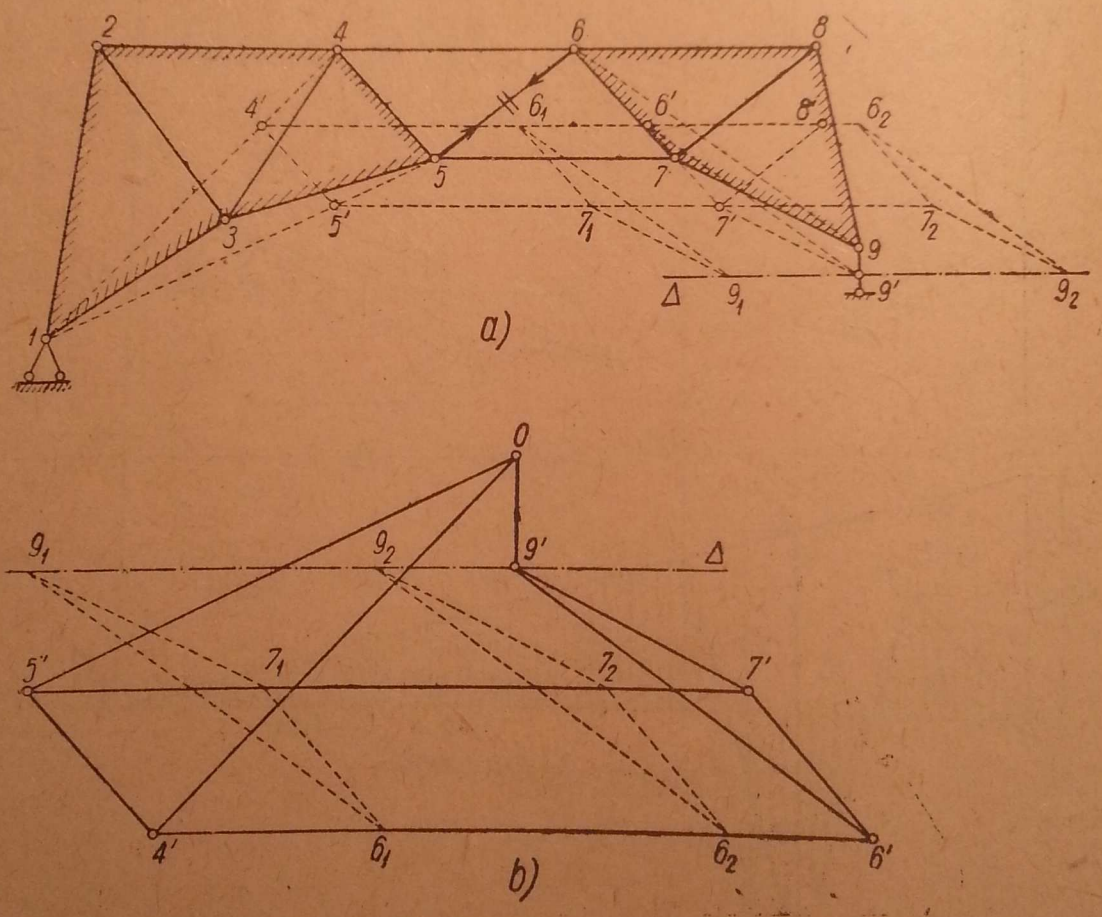


Fig. 225.

partea geometric deformabilă, de la care se deduc succesiv deplasările celorlalte noduri. Pentru aceasta trebuia ca fiecare nod nou să fie legat cu două bare de alte două noduri, ale căror puncte rabătute erau construite, sau de un singur nod cu punct rabătut construit, și încă o condiție cinematică

din care să se poată deduce punctul rabătut al noului nod. Astfel, din aproape în aproape se determină diagrama deplasărilor (vitezelor) pentru toate nodurile grinzii.

Uneori, deși sistemul cinematic provenit din suprimarea unei bare are un singur grad de libertate, legăturile sînt astfel dispuse încît nu se poate continua în mod direct diagrama deplasărilor pe toată grinda. Se folosește atunci așa-numita metodă a pozițiilor false, care se bazează pe teorema cunoscută de la proprietățile poligoanelor funiculare :

Dacă un poligon cu n vîrfuri se deformează, astfel încît toate laturile sale rămîn paralele cu poziția lor inițială, iar $n-1$ vîrfuri descriu $n-1$ drepte, atunci și al n-lea vîrf descrie o dreaptă.

Cu această teoremă, în cazul cînd se ajunge la un punct de unde nu se mai poate construi diagrama deplasărilor, se dă o deplasare falsă, care conduce la o diagramă falsă a vitezelor, și apoi, se dă o a doua deplasare falsă, care va produce o a doua diagramă falsă a vitezelor. În felul acesta se obțin două puncte ale dreptei pe care se va deplasa punctul rabătut al unui anumit nod, pentru care din legăturile sistemului se mai cunoaște o condiție. Se va putea deci găsi pe această cale deplasarea acestui nod și apoi se poate continua diagrama deplasărilor.

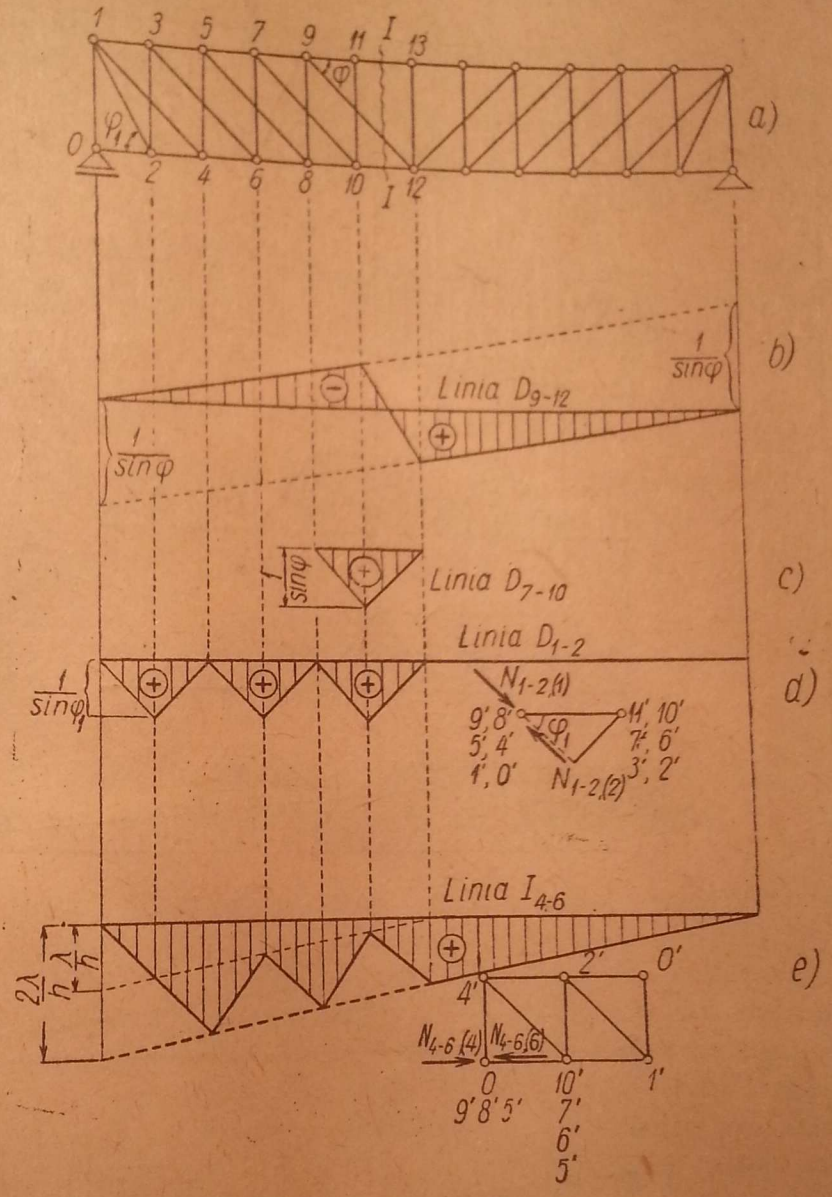


Fig. 226.

În exemplul din fig. 225 dacă se suprimă bara $5-6$ sistemul devine un mecanism cu un grad de libertate și se observă că părțile $1-4-5$ și $6-7-9$ rămîn nedeformabile. Dacă nu se face uz de procedeul anterior, care constă în a fixa una dintre părți de teren, aceasta va împiedica determinarea nodurilor rabătute. Astfel, se începe cu partea $1-4-5$, care este articulată în 1. Centrul ei de rotație este în 1 și tot corpul se va roti în jurul

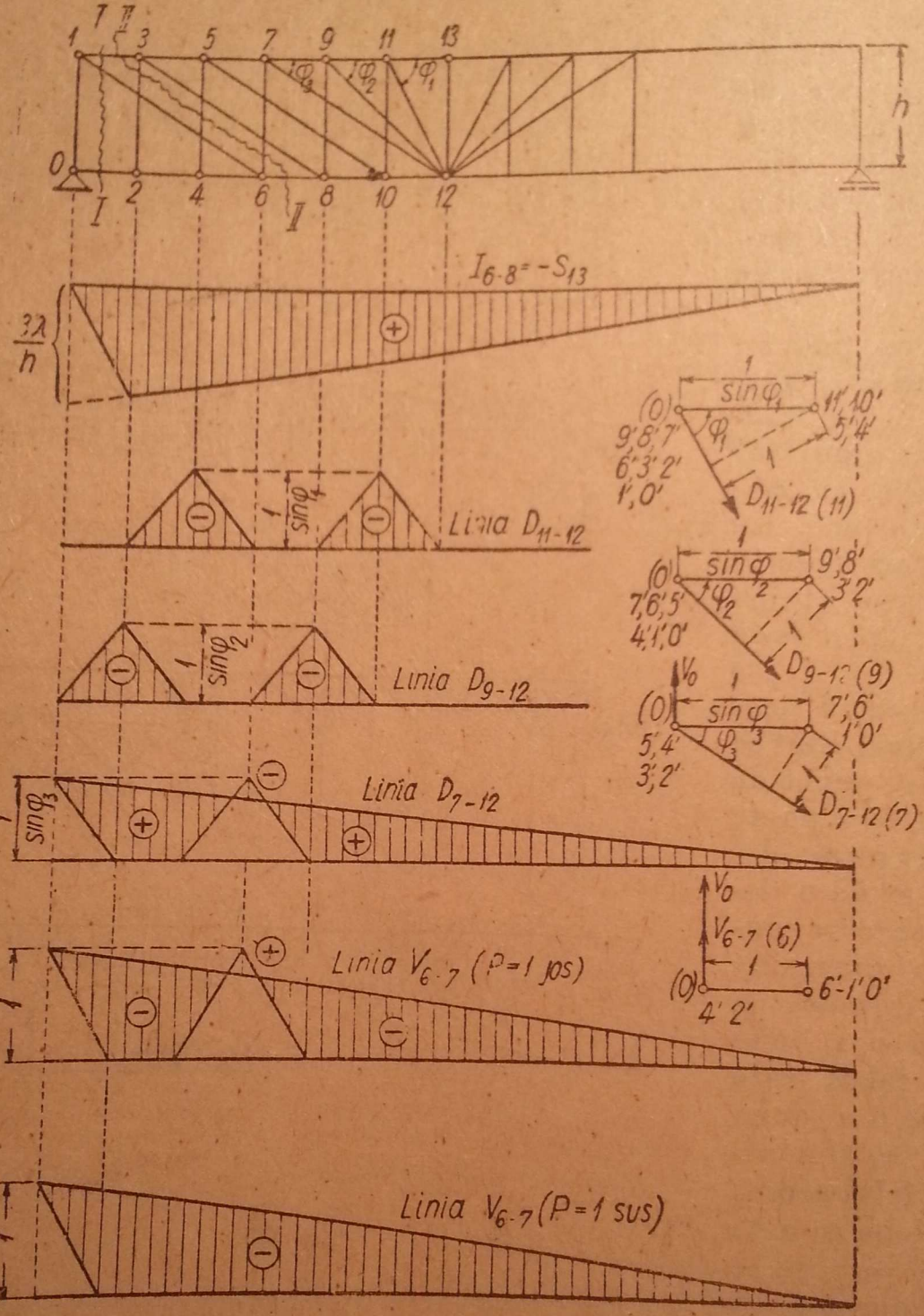

Linia D_{11-12}
Linia D_{9-12}
Linia D_{7-12}
Linia V_{6-7} (P=1 jos)
Linia V_{6-7} (P=1 sus)
D_{11-12} (11)
D_{9-12} (9)
D_{7-12} (7)
V_{6-7} (6)

Fig. 227.

său. Deci, pe direcția $1-4$ se ia arbitrar punctul rabătut $4'$, și apoi, din el ducînd paralela la $4-5$ se obține $5'$ pe direcția $1-5$. Mai departe nu se poate trece nici la nodul 6, nici la nodul 7, deoarece nici unul dintre ele nu este legat de alte două noduri care să fie rabătute. $6'$ se va găsi pe paralela din $4'$ la $4-6$, iar $7'$ — pe paralela din $5'$ la $5-7$.

În această situație se ia o poziție falsă 6_1 pentru punctul 6 rabătut, și cu el se poate construi 7_1, apoi, 9_1.

Se ia a doua poziție falsă 6_2 pentru nodul 6 rabătut și se obține 7_2, și apoi, 9_2. Dreapta Δ care trece prin 9_1 și 9_2 îl va conține în orice caz pe $9'$, conform teoremei de mai sus. Dar pentru $9'$ mai există o condiție : el trebuie să se găsească pe direcția pendulului din 9 și, deci, la intersecția dreptei Δ cu pendulul din 9 se va găsi $9'$. Acum, cu ajutorul lui $9'$ se determină $7'$ și $6'$, de astă dată în poziție justă.

Aceeași construcție se poate face mai concentrat în diagrama polară a deplasărilor (fig. 225, *b*). 9_19_2 determină dreapta Δ în această diagramă polară, iar direcția pendulului se duce prin polul fix O, și intersecția lor determină pe $9'$; apoi, de aici se deduc $7'$ și $6'$.

Aplicația 58. Să se găsească liniile de influență ale eforturilor în barele : $9-12$, $7-10$, $1-2$ și $4-6$ din fig. 226, *a*.

Indicație. În fig. 226, *b* se arată linia de influență D_{9-12} care se obține direct prin secțiunea $I-I$, iar în fig. 226, *c*, *d*, *e* sînt arătate liniile de influență D_{7-10}, D_{1-2} și I_{4-6} prin diagrama vitezelor.

Aplicația 59. Să se găsească liniile de influență ale eforturilor în barele : $4-6$, $6-8$, $6-7$, $7-12$, $9-12$, $11-12$, din fig. 227.

Indicație. Se vede că $I_{4-6} = I_{2-4} = I_{0-2} = 0$.
Pentru I_{6-8} se folosesc secțiunile $I-I$ și $II-II$, sau diagrama vitezelor.
Pentru restul barelor se folosește diagrama deplasărilor.

§ 26. GRINZI CU ZĂBRELE STATIC DETERMINATE, CU MAI MULT DECÎT TREI CONDIȚII SIMPLE DE REZEMARE

Condiția de nedeformabilitate geometrică pentru cazul particular al grinzilor cu numai trei condiții simple de rezemare (grinda liberă) a fost dată prin relația (4.1) : $b = 2n - 3$, iar condiția generală de nedeformabilitate geometrică, de relația (4.2) : $b + r = 2n$, unde $r \geqslant 3$, care s-a obținut din (4.1) prin înlocuirea unor bare cu un număr de tot atîtea reazeme simple.

Tipul cel mai obișnuit de grinzi cu mai mult decît trei condiții simple de rezemare îl constituie grinzile cu zăbrele alcătuite după modelul grinzilor drepte cu console și articulații (Cap. III, § 17), și se obțin prin înlocuirea unor bare ale tălpilor cu reazeme simple (fig. 228, *a* și *b*).

Eforturile din sarcini permanente se obțin prin descompunerea în grinzi independente (*I*) și în grinzi cu console (*II*), în mod asemănător celor stabilite la grinzile drepte cu secțiunea plină (§ 17 – b).

Liniile de influență ale eforturilor din bare se pot construi la fel ca liniile de influență la grinzile cu secțiunea plină (§ 17 – d).

În § 21, 23 au fost date unele exemple (aplicațiile 37, 45) edificatoare.

Asemenea construcții sînt foarte raționale, în special la deschideri mari, unde încărcarea permanentă este hotărîtoare, deoarece, prin efectul consolelor, se descarcă barele tălpilor din interiorul deschiderilor. Forma generală care se dă acestor grinzi este cea care provine din diagrama momentelor încovoietoare pe grinzile drepte cu console și articulații din încărcarea

permanentă (fig. 228, *c*), deoarece eforturile în bare (în special în tălpi) sînt proporționale cu momentele, și invers proporționale cu înălțimile (h). Se obțin astfel construcții în care eforturile în barele de pe reazeme să fie apropiate ca valoare de cele din mijlocul deschiderilor.

Problemele importante de ordin practic constau în alegerea judicioasă a formei și a raportului dintre lungimea consolelor și a deschiderilor prin-

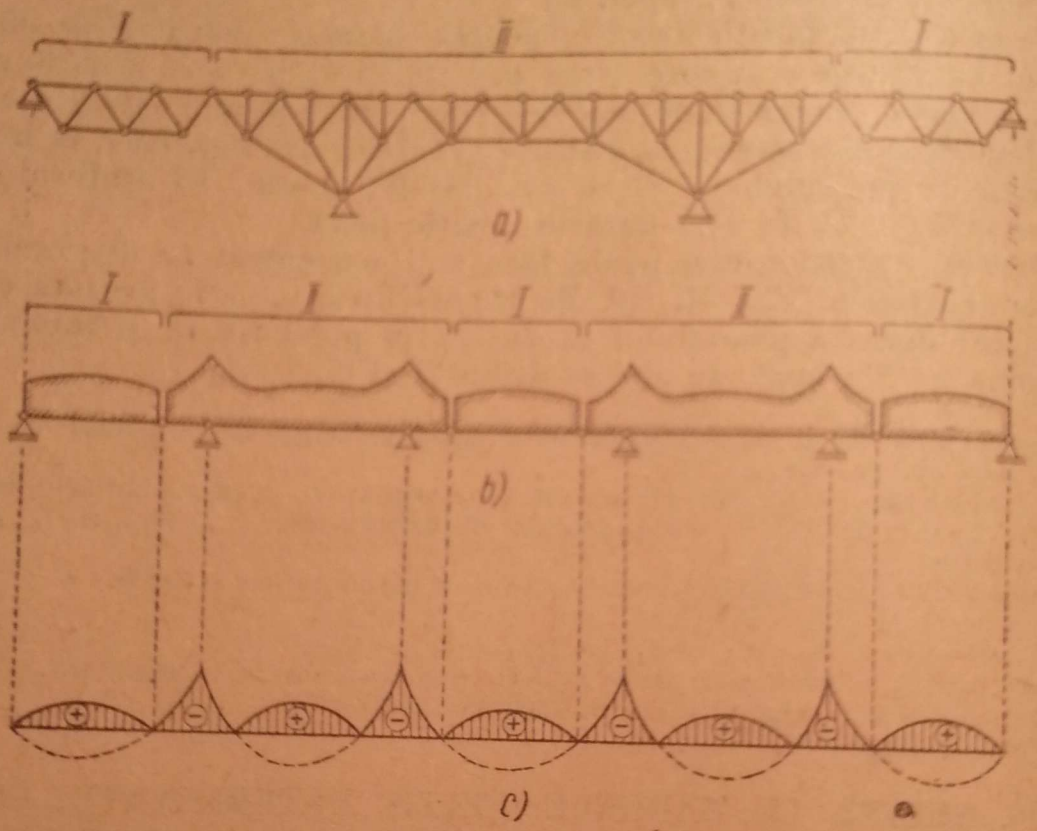


Fig. 228.

cipale, care depind în special de raportul dintre încărcarea permanentă și încărcarea utilă. Aceste probleme sînt analizate mai amănunțit în tratatele de poduri și nu vor fi studiate aici.

O realizare deosebit de importantă în țara noastră a acestui sistem de grinzi cu console și articulații o constituie podul metalic peste Dunăre la

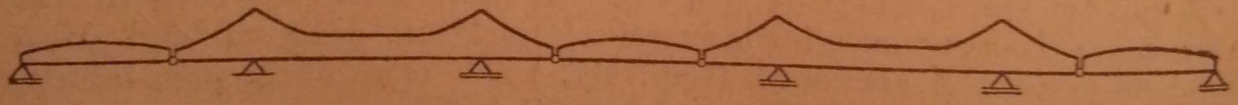


Fig. 228 A.

Cernavodă, a cărui schemă statică este schițată în (fig. 228, A), executat în 1895 după proiectul inginerului romîn Anghel Saligny. Deschiderea centrală are 190 m și a constituit mult timp cea mai mare deschidere de pod din Europa continentală.

Modul cum se pot înlocui barele prin reazeme poate fi variat.

Astfel, dacă în loc de a suprima o bară din tălpi, se suprimă o diagonală sau un montant, și se înlocuiește cu un reazem, rezultă o grindă cu o articulație fictivă în D, ca în fig. 229, *a*, sau chiar cu o articulație dusă la infinit (fig. 229, *b*).

Și acestea se pot studia prin secțiunea $I - I$, și exprimarea echilibrului părții din dreapta, pentru încărcări permamente și pentru linii de influență. Liniile de influență se pot construi și direct, stabilind centrele instantanee prin deplasări virtuale (v. aplicația 52).

Alt mod de a înlocui barele prin reazeme este arătat în fig. 230. Sistemul din fig. 230, *a* provine din grinda din fig. 222, în care s-a suprimat

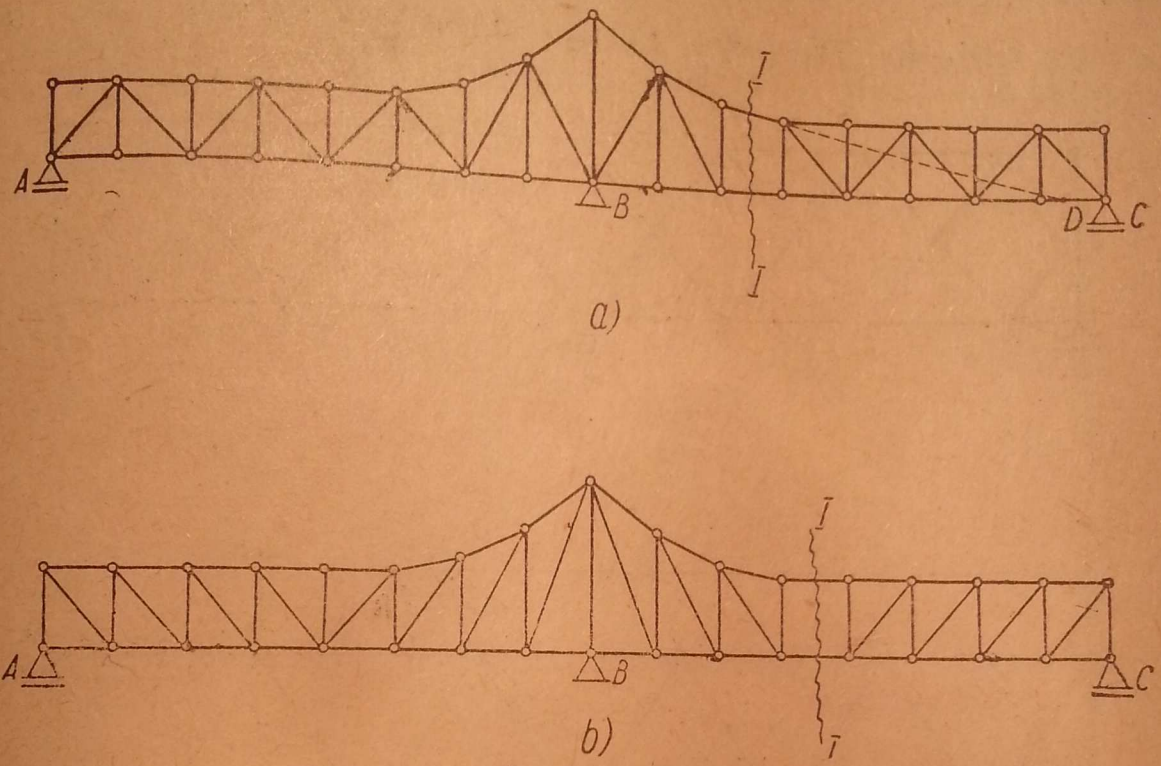


Fig. 229.

montantul *10—11* din mijloc și s-a înlocuit cu un reazem în nodul *10*, iar sistemul din fig. 230, *b* poate fi privit ca provenind din grinda din fig. 210, în care s-a scos bara *7 —10* și s-a înlocuit cu reazemul *C* în capătul consolei.

Calculul analitic al unor astfel de sisteme este uneori dificil, conducînd la ecuații numeroase, totuși, prin examinarea atentă a construcției se pot găsi adeseori simplificări.

Astfel, în cazul construcției din fig. 230, *b* sînt patru necunoscute în reazeme și numai trei ecuații generale; dacă sistemul este încărcat numai cu sarcini verticale, sînt trei necunoscute, V_A, V_B și V_C, și numai două ecuații ale sistemului în ansamblu.

Se observă însă că partea *I* este un sistem nedeformabil, iar partea *II* la fel, așa că se va căuta să se izoleze unul dintre aceste corpuri pentru a găsi ecuația suplimentară. Dacă se face secțiunea $I - I$ și se iau momentele în raport cu nodul *8*, intervine N_{7-9} ca o mărime necunoscută, dar aceasta se poate evalua ușor în funcție numai de V_B din echilibrul nodului *9*.

Deci, din echilibrul nodului *9*, se obține:

$$N_{9-7} \sin \alpha + N_{9-10} \sin \beta + V_B = 0;$$

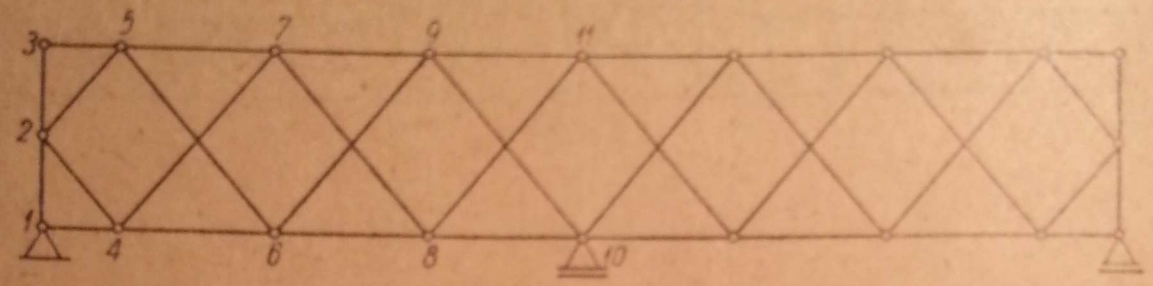
$$N_{9-7} \cos \alpha - N_{9-10} \cos \beta = 0,$$

de unde se deduce N_{9-7} în funcție de V_B:

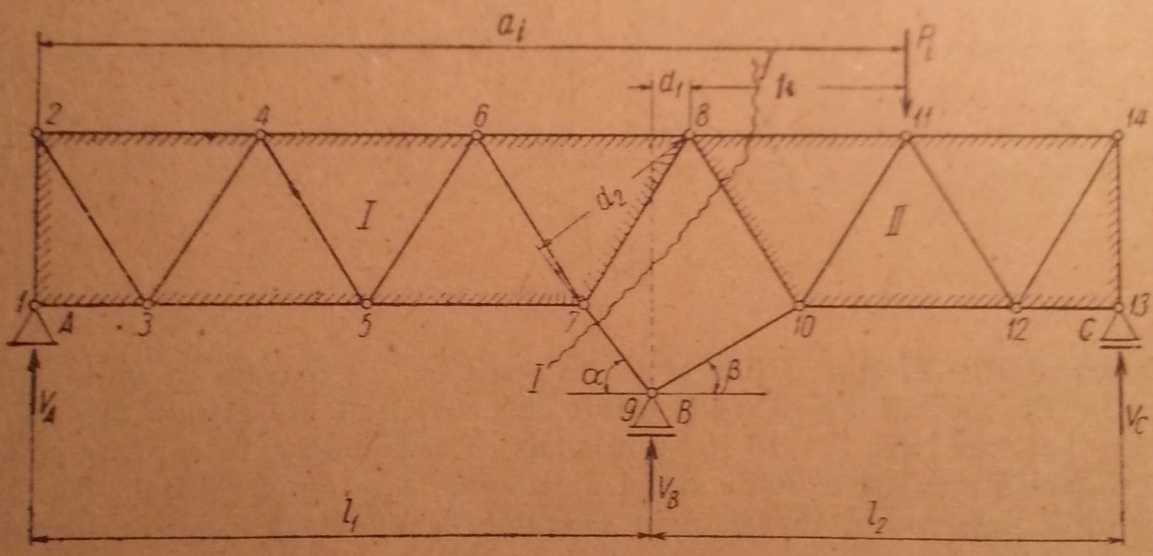
$$N_{9-7} = -\frac{V_B}{\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(m)}$$

Făcînd secțiunea $I - I$ și scriind ecuația de momente a părții din dreapta în raport cu punctul 8, rezultă:

$$V_B \cdot d_1 + N_{9-7} \cdot d_2 - V_C\,(l_2 - d_1) + \sum_C^B P_i \cdot f_i = 0. \qquad \text{(n)}$$



a)



b)

Fig. 230.

În această ecuație intervin ca necunoscute numai V_B și V_C, deoarece N_{9-7} este determinat în funcție de V_B prin (m).

Scriind acum ecuația de momente a ansamblului în raport cu nodul A, rezultă:

$$\sum_A^C P_i \cdot a_i - V_B\, l_1 - V_C\,(l_1 + l_2) = 0. \qquad \text{(p)}$$

Cele două ecuații (n) și (p) determină pe V_B și V_C, și mai departe problema se rezolvă prin secțiuni obișnuite.

Liniile de influență se pot construi pe baza acestui calcul analitic, dar adeseori sînt mai ușor de aflat prin deplasări virtuale.

Astfel, în același caz al sistemului din fig. 230, *b* se vor determina linia de influență a reacțiunii din *C* și linia de influență a efortului în bara *6—8*.

Linia V_C (fig. 231). Se suprimă reazemul din *C* și se înlocuiește cu reacțiunea V_C.

Din punct de vedere cinematic sistemul are un grad de libertate, iar corpurile care se formează sînt : *I*, *II*, *III* și *IV*. Centrele (*I*, *T*), (*I*,*II*), (*I*, *III*), (*II*, *IV*) și (*II*, *III*) sînt evidente.

Centrul (*III*, *T*) se găsește odată pe verticala din *B*, și altă dată, din combinația *T*, *I*, *III* pe dreapta (*I*, *T*) — (*I*, *III*), deci, la intersecția lor.

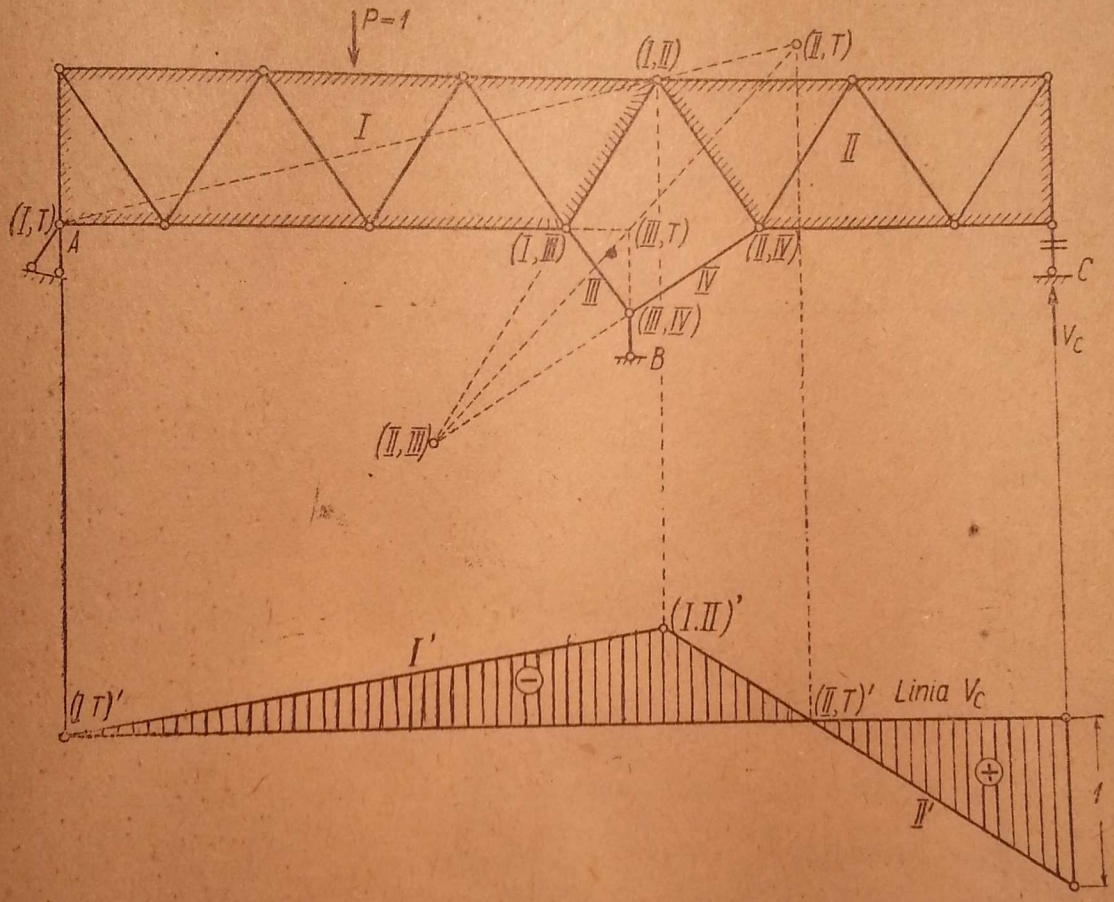


Fig. 231.

Centrul (*II*, *T*) se determină prin combinațiile : *I*, *II*, *T* care dă dreapta (*I*, *T*) — (*I*, *II*) și *II*, *III*, *T* care dă stînga (*II*, *III*) — (*III*, *T*). La intersecția lor se găsește (*II*, *T*).

Linia de influență cu semnul și scara se obține dînd lui *C* o deplasare verticală în jos (de sens contrar lui V_C) egală cu 1.

Linia S_{6-8} (fig. 232). Se suprimă bara *6—8* și se formează sistemul cinematic din corpurile *I*, *II*, *III*, *IV* și *V*. Centrele (*I*, *T*), (*I*, *III*), (*I*, *V*), (*III*, *V*), (*III*, *IV*), (*II*, *IV*), (*II*, *V*) și (*II*, *III*) sînt evidente.

Centrul (*III*, *T*) se determină din combinațiile *T*, *I*, *III* și din faptul că trebuie să se găsească pe verticala lui *9*.

Centrul (*II*, *T*) se obține din combinația *II*, *III*, *T* și din faptul că se găsește pe direcția verticală a pendulului din *14*.

Centrul (I, II) se determină astfel : din combinația I, II, T el trebuie să se găsească pe dreapta $(I, T) - (II, T)$. Din combinația I, II, V centrul (I, II) se va găsi pe dreapta $(I, V) - (II, V)$, adică după direcția barei $7-8$. La intersecția celor două drepte se găsește (I, II). Acestea sînt suficiente pentru a construi linia de influență. Se depărtează nodul 6 de 8 cu

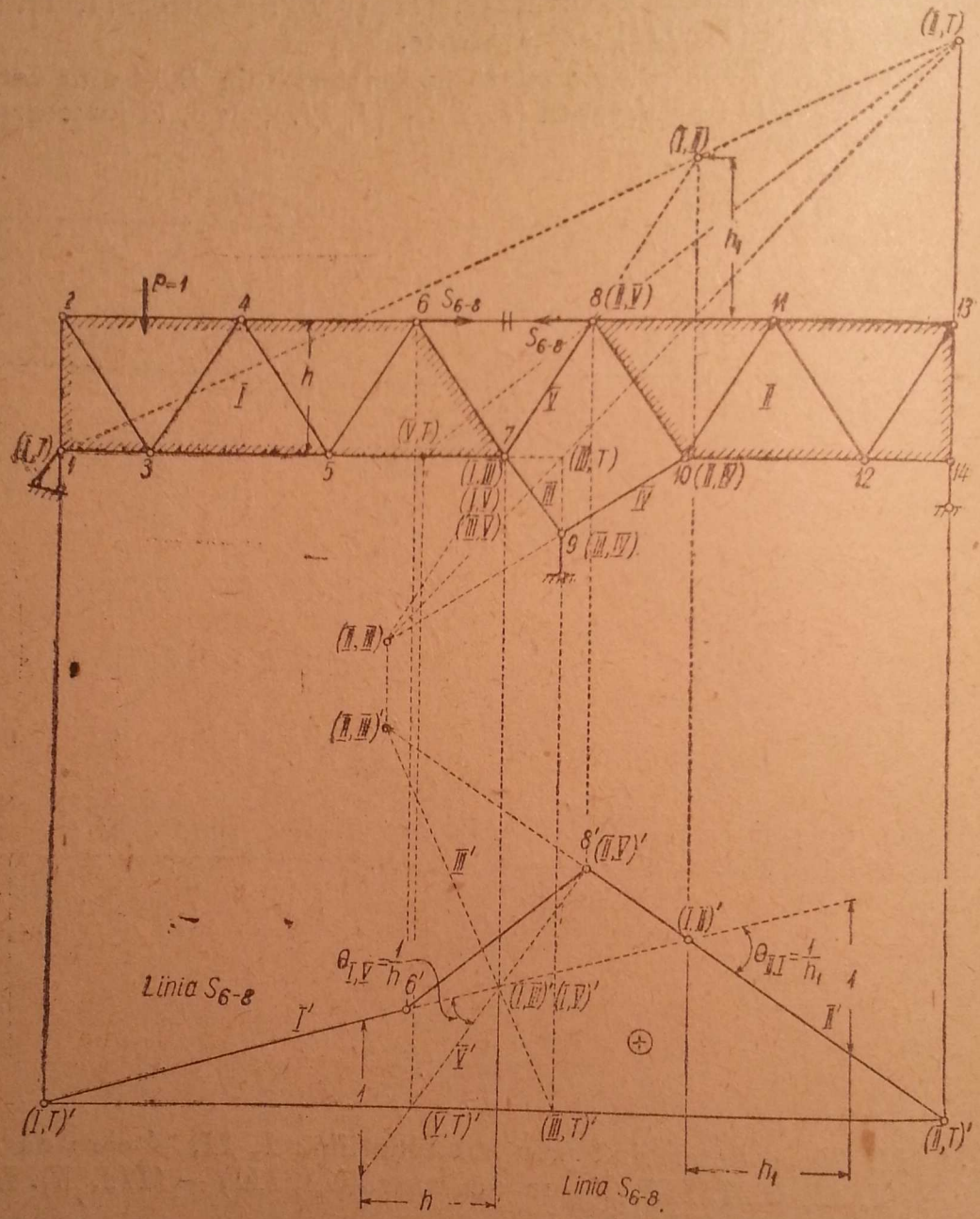


Fig. 232.

cantitatea 1. Nu se poate preciza imediat care parte se coboară sau se ridică Se presupune că partea I se ridică și se trage astfel I'. Pe el se proiectează. (I, II) în $(I,II)'$. Se trage apoi II' prin $(I, II)'$ și $(II, T)'$.

Sarcina se deplasează pe talpa superioară, deci se va proiecta 6 în $6'$ și 8 în $8'$ și se trage linia $6'8'$.

Linia de influență este astfel desenată. Scara se obține cu ușurință punînd $\theta_{I,II} = \frac{1}{h_1}$, în care h_1 este distanța de la centrul (I, II) la

bara $6-8$, iar scara grafică se obține la distanța h_1, în deschizătura lui $\theta_{I,II}$.

Pentru a pune semnele, trebuie să se verifice întîi, dacă este justă ipoteza în care prin depărtarea nodurilor 6 și 8 corpul I se ridică. Pentru aceasta, se observă că dacă se ține I pe loc, pentru ca 8 să se depărteze de 6, trebuie ca II să se rotească cu $\theta_{II,I}$ față de I, în sens invers acelor unui ceasornic. În epura deplasărilor, dacă se ține I' pe loc, II' se rotește față de I' în jurul lui $(I, II)'$ cu $\theta_{II,I}$ în sensul orar. Deci ipoteza n-a fost justă, adică prin depărtarea nodurilor 6 și 8 corpul I de fapt a coborît, astfel că semnul liniei de influență este plus.

Se pot face o serie de verificări. Astfel, dacă se proiectează (III,I) în $(III, I)'$ pe I' și (III, II) în $(III, II)'$ pe II', dreapta $(II, III)' - (I, III)'$ reprezintă pe III'. Aceasta trebuie să taie linia de reper pe verticala lui (III, T).

Apoi, dacă se proiectează (II, V) în $(II, V)'$ pe II' (adică în $8'$) și (I,V) în $(I,V)'$ pe I', dreapta $(II, V)' - (I, V)'$ reprezintă pe V' care va tăia linia de reper în $(V, T)'$. Aceasta va trebui să fie însă și proiecția lui (V, T), care se obține ușor din combinațiile I, V, T și II, V, T.

Se poate da acum scara și sub forma :

$$\theta_{I,V} = \frac{1}{h},$$

în care h este distanța de la (I, V) la bara $6-8$, adică tocmai înălțimea h a grinzii, iar grafic se regăsește 1 în deschizătura lui $\theta_{I,V}$ la distanța orizontală h de centrul $(I, V)'$.

Aici se vede mai ușor că prin depărtarea nodului 8 de 6, V se rotește față de I în jurul lui (I, V) în sens orar, iar pe epură V' se rotește față de I' în jurul lui $(I, V)'$ invers acelor unui ceasornic.

Deci, epura trebuia făcută sub linia de reper și are semnul plus.

Deși bara este pe talpa superioară, linia de influență este pozitivă pe toată grinda. Se vede aici ce efect a avut transformarea grinzii prin scoaterea unei bare și punerea unui reazem.

Pentru liniile de influență în aceste sisteme transformate se poate utiliza și diagrama deplasărilor.

Se va construi acum linia S_{6-8} și prin diagrama deplasărilor (fig. 233).

Trebuie observat de la început că sistemul are mai mult decît trei reazeme simple, deci este nedeformabil numai în baza legăturilor cu terenul. Dacă se suprimă reazemele, el nu mai este un solid geometric nedeformabil. Aceasta înseamnă că terenul face parte integrantă din el, astfel că nu se mai poate face artificiul de a muta unul sau două dintre reazeme pentru a imobiliza una dintre părți față de teren, Va trebui să se construiască diagrama deplasărilor (sau vitezelor) în baza legăturilor reale ale sistemului.

Suprimînd bara $6-8$, rămîn nedeformabile corpurile I și II, astfel încît nu se va analiza fiecare nod în parte, ci numai punctele strict necesare ale fiecărui dintre cele două corpuri.

Se construiesc atît diagrama pe grindă cît și diagrama polară și se urmăresc concomitent, deși nu este nevoie decît de una dintre ele.

Corpul I este articulat de teren în 1. Se ia o deplasare arbitrară pentru 7. Pe grindă se ia $7 - 7'$ egal cu distanța $5 - 7$, iar pe diagrama polară se ia distanța $O\,7'$. Se construește $6'$ ducînd prin $7'$ paralela la $6-7$ și dreapta $1-6$ (în diagrama polară, paralela din O la $1-6$).

Se trece la punctul *9* care este legat de *7* prin bara *7—9*, iar de teren — prin pendulul vertical, Deci din *7'* se duce paralela la *9—7* și intersecția cu verticala din *9* (în diagrama polară verticala din *O*)determină pe *9'*.

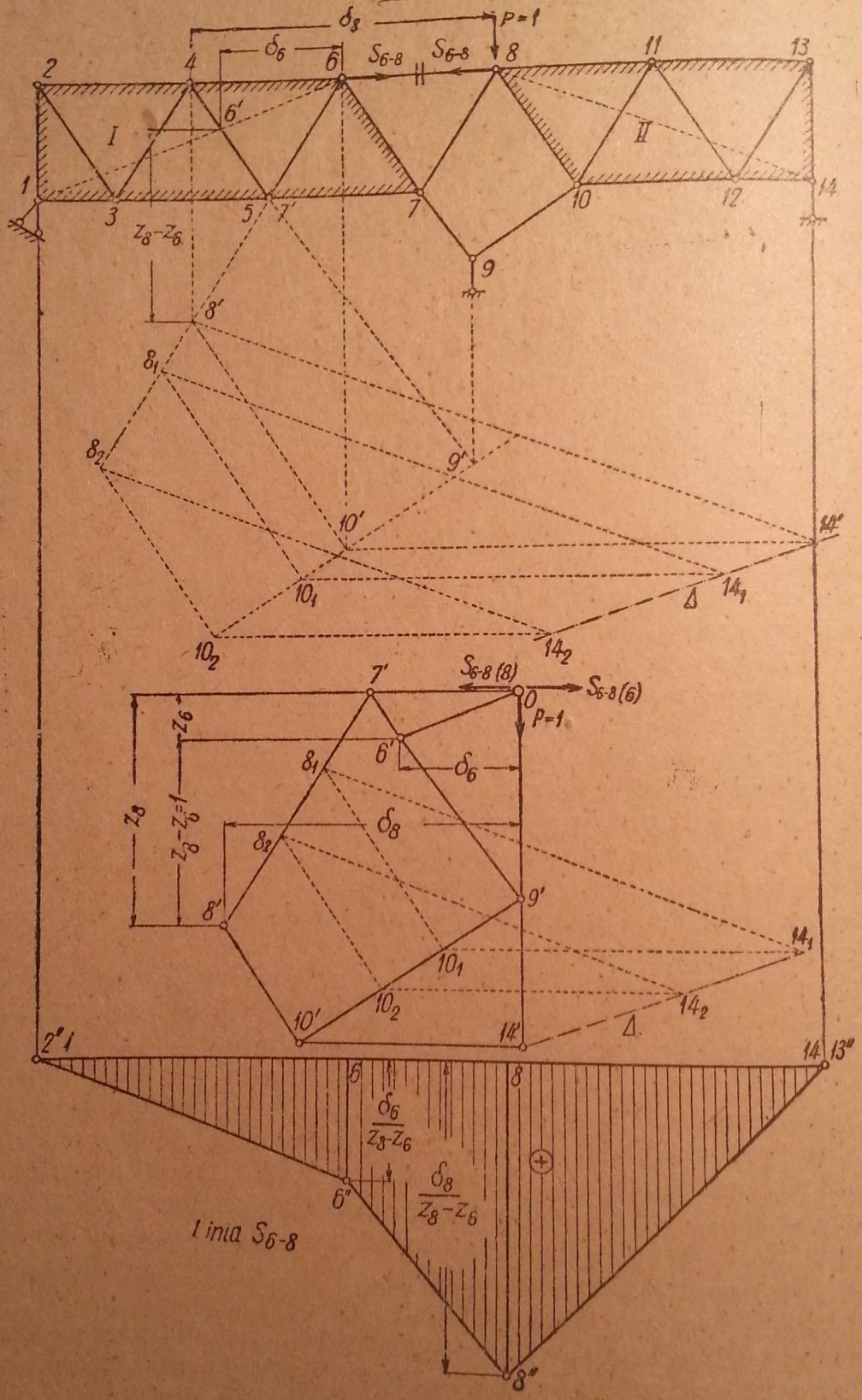


Fig. 233.

Acum nu se poate trece mai departe, deoarece atît punctul *8*, cît și punctul *10* au numai cîte o condiție cinematică utilă : *10* este legat de *9*

al cărui $9'$ rabătut este cunoscut, și 8 este legat de 7 al cărui $7'$ este și el cunoscut, dar nici pentru 10 nici pentru 8 nu se cunoaște deocamdată o a doua condiție cinematică.

Se folosește metoda pozițiilor false. Se ia pentru 10 o poziție falsă 10_1, pe paralela din $9'$ la $9-10$. Se construiește 8_1, ducînd din $7'$ paralelă la $7-8$, și din 10_1 — paralelă la $10-8$. Apoi se trece direct la 14, deoarece 8, 10 și 14 sînt pe același corp rigid. Din 10_1 se duce paralela la $10-14$, și din 8_1 se duce paralela la dreapta $8-14$. Intersecția lor îl determină pe 14_1 atît pe grindă, cît și în diagrama polară.

Se ia acum o a doua poziție falsă pentru 10 pe paralela din $9'$ la $9-10$ în 10_2. Se obține 8_2, și apoi, prin orizontala din 10_2 și paralela la $8-14$ din 8_2 se determină 14_2. Se unește 14_1 cu 14_2 și se obține dreapta Δ pe care se va găsi poziția $14'$ justă a nodului 14 rabătut. Dar pentru 14 se mai cunoaște o legătură cinematică. El este legat cu pendulul vertical de teren și, deci, $14'$ se va găsi pe direcția pendulului (în diagrama polară pe verticala din O). La intersecția celor două drepte se va găsi deci $14'$. Acum se determină $8'$ ducînd din $14'$ paralela la $8-14$ și luînd intersecția cu dreapta $8_1 - 8_2$ și la fel pe $10'$ care însă nu interesează.

Pentru linia de influență se iau proiecțiile orizontale ale deplasărilor nodurilor 2, 6, 8 și 13 și se pun în ordonate în dreptul nodurilor respective, de la o linie de reper care, de astă dată, este chiar linia de reper definitivă. Nodurile 2 și 13 au proiecția orizontală a deplasărilor nulă, iar nodurile 6 și 8 au deplasările orizontale δ_6 și δ_8 indicate atît pe grindă, cît și în epura polară. Pentru scară se ia: $z_8 - z_6 = 1$. $z_8 - z_6$ este indicat atît pe grindă, cît și în epura polară.

Pentru semn se poate scrie ecuația de lucru mecanic. Se pune, de exemplu, $P = 1$ în nodul 8 (în diagrama polară: în O) și ecuația va fi:

$$1 \cdot \delta_8 + S_{6-8} \cdot z_6 - S_{6-8} \cdot z_8 = 0$$

sau

$$S_{6-8} = \frac{\delta_8}{z_8 - z_6}$$

și are valoarea plus, deoarece $z_8 > z_6$.

Semnul liniei de influență se obține și astfel: din diagrama polară se vede că pentru depărtarea nodului 8 de nodul 6, vitezele din 6 și 8 rotesc în sens orar față de $6'$, respectiv $8'$, deoarece $z_8 > z_6$. Deci, vitezele au fost rabătute în sens orar, iar punctele rabătute se găsesc la stînga nodurilor corespunzătoare. Ordonatele liniei de influență se vor obține din rotirea în sens antiorar a proiecțiilor orizontale ale vitezelor în jurul nodurilor corespunzătoare, astfel că vor fi reprezentate sub linia de reper și vor avea deci semnul plus.

§ 27. FORME CRITICE

Sistemele cu bare articulate pot deveni uneori forme critice, care, din punct de vedere static, sînt caracterizate prin eforturi cu valori infinite (în ipoteza fundamentală a ecuațiilor de echilibru static exprimat în stare nedeformată), pentru un sistem general de sarcini, sau sînt static nedeterminate pentru încărcări particulare, deși respectă condițiile formale de

alcătuire ale sistemelor static determinate. Asemenea forme nu trebuie folosite în construcții.

Dacă grinda cu zăbrele este formată de la un triunghi de bază căruia i se adaugă apoi noduri prin cîte două bare care să nu fie suprapuse, forma ce se obține este corectă. Sistemele articulate pot fi însă variate ca mod de alcătuire și nu totdeauna se poate recunoaște imediat dacă sînt forme corecte sau forme critice.

Pentru identificarea formelor critice se folosesc două căi: calea analitică și calea cinematică.

A. METODE ANALITICE

Din condiția $b + r = 2n$ rezultă că un sistem articulat are $2n$ necunoscute (eforturi și reacțiuni) și tot atîtea ecuații. Deci, în general, se ajunge la un sistem liniar de $2n$ ecuații cu $2n$ necunoscute. Pentru ca eforturile în bare să nu aibă valori infinite la un sistem de sarcini dat, trebuie ca determinantul sistemului de ecuații să fie diferit de zero. Deci, $\Delta_{2n} \neq 0$ este condiția analitică de strictă nedeformabilitate.

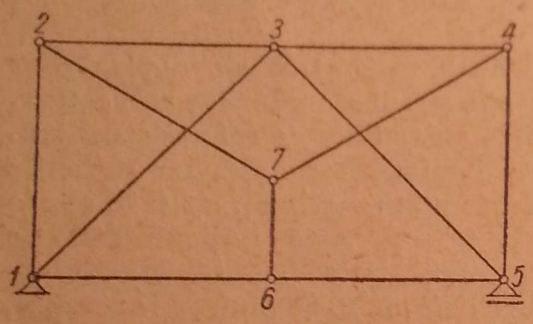


Fig. 234.

Evident, sub această formă condiția este greu de aplicat. Dacă $\Delta_{2n} \neq 0$, înseamnă că pentru orice sistem de sarcini există o soluție bine determinată și unică a eforturilor în bare.

Dacă se pun sarcini nule rezultă deci că și eforturile în bare trebuie să fie nule, și aceasta trebuie să fie unica soluție. Dacă pentru sarcini nule în toate nodurile sistemului, pot exista și alte soluții diferite de zero pentru eforturile în bare, înseamnă că $\Delta_{2n} = 0$, adică forma este critică.

Aceasta este *metoda sarcinii zero*.

În grinda din fig. 234, dacă se pune sarcina zero întîi în nodul *6*, rezultă soluția unică pentru efortul din bara *6—7*, prin separarea nodului *6*, $N_{6-7}=0$. Trecînd acum la nodul *7* cu N_{6-7} nul și cu sarcina zero în nod, din separarea nodului *7* rezultă unica soluție:

$$N_{2-7} = N_{7-4} = 0.$$

Trecînd apoi la nodurile *2* și *4* cu sarcina zero, se obține: $N_{2-3}=N_{2-1}=0$; $N_{4-3} = N_{4-5} = 0$, iar la nodul *3* cu sarcina zero, $N_{1-3} = N_{3-5} = 0$; apoi, trecînd la *1* și *5* se obțin $N_{1-6} = 0$, $N_{5-6} = 0$ și reacțiunile nule. Deci, pentru sarcina zero, singura soluție este cea a eforturilor nule în bare. Sistemul nu este o formă critică, adică grinda din fig. 234 este strict nedeformabilă.

În grinda din fig. 235, *a* în care barele *2—4*, *3—6* și *1—5* sînt paralele, dacă se face o secțiune *I — I*, se poate lua o valoare arbitrară *N* pentru efortul din bara *3—6* și vor rezulta eforturi de sens contrar $\frac{N}{2}$ în barele *2—4* și *1—5* (fig. 235, *b*), care împreună cu *N*, sînt în echilibru exterior pentru una dintre părțile grinzii (de exemplu, partea din dreapta). Acest

sistem de sarcini pe partea din dreapta va da eforturi proporționale cu N în barele triunghiului $4-5-6$ și nici o reacțiune în reazemul din 5. La fel, pe partea din stînga. Fără să se introducă o încărcare pe grindă, s-a găsit un sistem de eforturi compatibil, diferit de zero, luînd o valoare arbitrară pentru N diferită de zero. Deci aceasta este o formă critică, adică grinda din fig. 235, a nu este strict nedeformabilă, deși respectă condiția $2n = b + 3$, $(n = 6,\ b = 9)$.

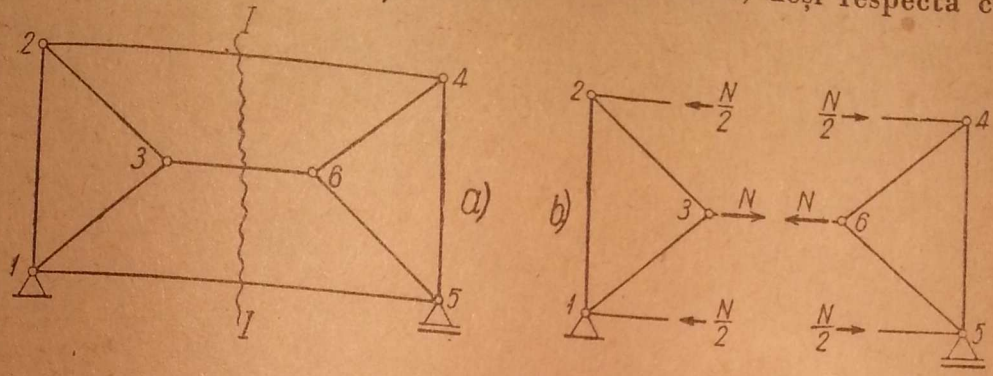


Fig. 235.

La fel, la grinda din fig. 236, a dacă se pune sarcina zero în nodul 5 se poate lua o valoare arbitrară $N_{2-5} = N_{5-4}$ pentru eforturile din aceste bare și, contînuînd din nod în nod, se găsește că eforturile din celelalte bare sînt compatibile cu condițiile de echilibru.

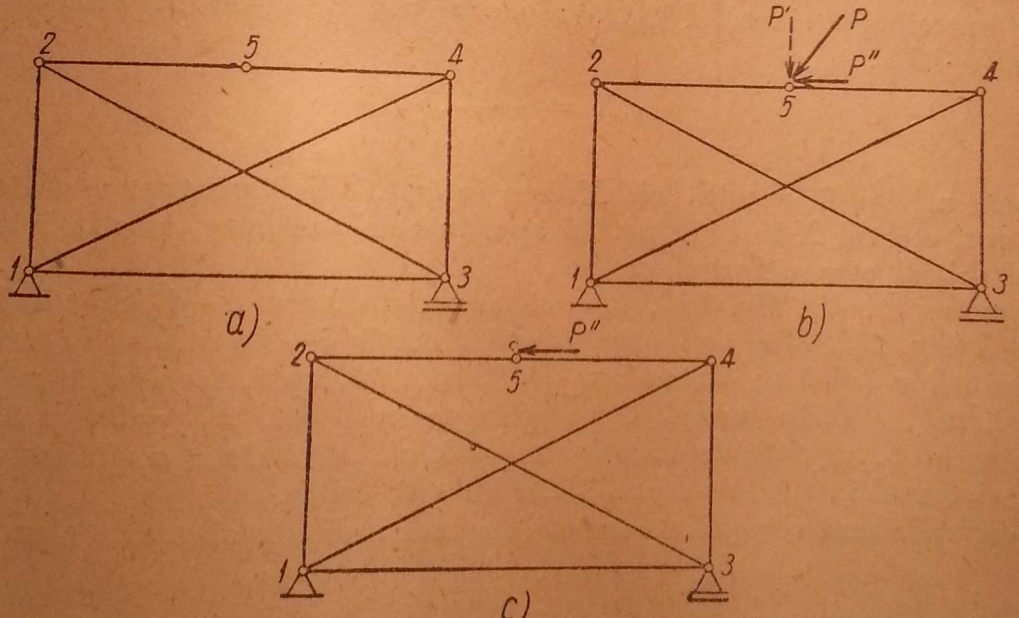


Fig. 236.

Deci, și această grindă este o formă critică, deși $2n = b+3$, ($n = 5$, $b = 7$).

Aici apare evident că, aplicînd o sarcină oarecare în nodul 5 (fig. 236, b), componenta sa verticală P' produce teoretic eforturi cu valori infinite în barele $2-5$ și $5-4$ și apoi, în toate barele, pe cînd pentru o sarcină particulară P'' după direcția $2-5-4$ (fig. 236, c) nu mai sînt eforturi în bare cu valori infinite, dar barele $2-5$ și $5-4$ lucrează ca o singură bară $2-4$.

Sistemul devine atunci static nedeterminat, avînd o bară în plus ($n = 4$, $b = 6$).

Nu se poate aplica însă totdeauna cu ușurință metoda sarcinii zero, în special la sistemele cu legături complexe, deoarece nu se pot trage direct concluzii clare asupra posibilității de eforturi în bare prin aplicarea sarcinii zero în noduri.

Pentru a evita în aceste cazuri calculul determinantului Δ_{2n} se face apel la *metoda înlocuirii barelor*.

Scoțînd o bară pq și înlocuind-o cu alta, ik, și aplicînd perechea de eforturi $X = 1$ în nodurile p și q ale barei suprimate, după direcția acesteia,

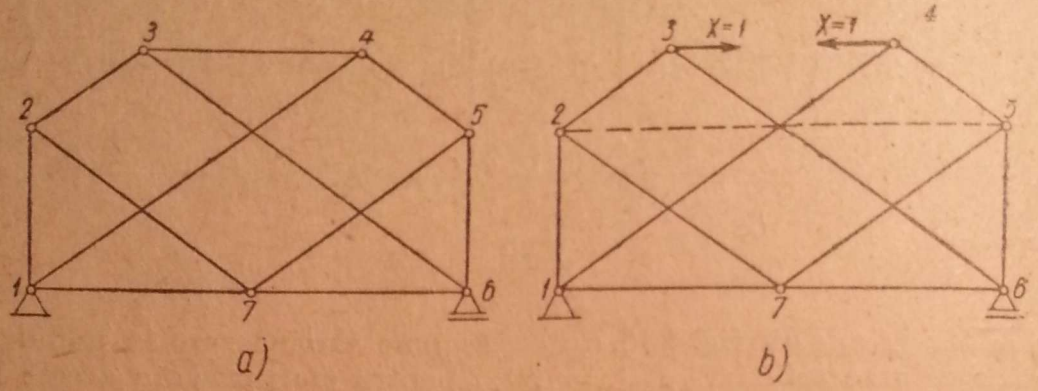


Fig. 237.

găsim în bara ik a sistemului transformat (de bază) efortul $n_{ik,1}$, iar din sarcina exterioară, efortul $N_{ik,0}$. Valoarea necunoscutei X este dată de formula (4·15′) :

$$X = \frac{N_{ik,0}}{n_{ik,1}}.$$

Dacă $n_{ik,1} = 0$, rezultă că X este infinit, adică pentru un sistem de sarcini dat, efortul X în bara pq, și apoi în celelalte bare, este infinit, deci sistemul inițial este o formă critică.

În exemplul din fig. 237, *a*, dacă se scoata bara $3-4$, înlocuind-o cu bara $2-5$ (fig. 237, *b*) și se încarcă după direcția $3-4$ cu $X = 1$, din separarea nodurilor 3 și 4, se obține : $n_{23,1} \neq 0$, $n_{36,1} \neq 0$, apoi, trecînd la nodul 6, $n_{65,1} \neq 0$, $n_{67,1} \neq 0$, în nodul 7 se găsește $n_{75,1} = 0$, $n_{72,1} = 0$ și trecînd acum la nodul 5, $n_{25,1} \neq 0$, deoarece și $n_{45,1} \neq 0$, $n_{56,1} \neq 0$. Deci $n_{25,1}$ fiind diferit de zero, sistemul inițial din fig. 237, *a* nu este critic.

În cazurile mai complicate metodele mai indicate sînt cele cinematice.

B. METODE CINEMATICE

Acestea provin din analiza cinematică a construcției și se pot aplica fie cu ajutorul centrelor instantanee, fie prin diagrama vitezelor.

a) Folosirea centrelor instantanee

Dacă există trei corpuri în plan, deplasările lor relative se fac astfel ca cele trei centre instantanee de rotație relative să fie în linie dreaptă.

Deci, dacă se iau diferite porțiuni din construcție și se construiesc centrele instantanee corespunzătoare și dacă, fără să se suprime nici o

legătură, se constată că trei centre a trei corpuri sînt în linie dreaptă pentru orice combinație de trei corpuri, înseamnă că sistemul are posibilități de deplasare în baza legăturilor aparent complete, și, deci, este o formă critică. Dacă cele trei centre nu sînt în linie dreaptă pentru toate combinațiile posibile între corpuri, înseamnă că deplasările nu pot exista, și forma este corectă.

În cele ce urmează se va descrie cum se aplică cele de mai sus la sistemele libere (cu trei reazeme simple). Acestea sînt construcții geometric nedeformabile, independent de legăturile cu terenul și deci nu se va analiza modul lor de rezemare, deoarece condițiile de rezemare corectă prin trei reazeme simple sînt cunoscute.

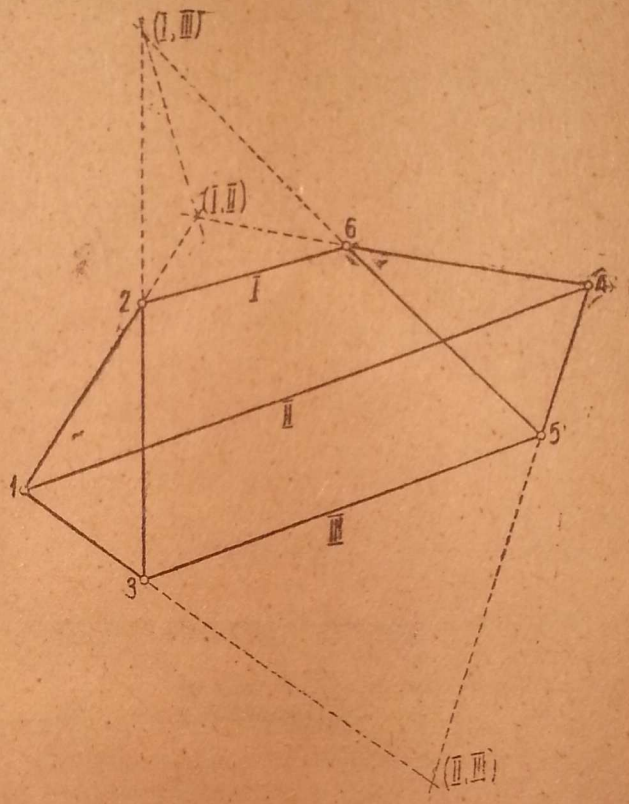


Fig. 238.

Sistemul din fig. 238 are $n = 6$ și $b = 9$, deci condiția $b + 3 = 2n$ este satisfăcută. Dacă se consideră alcătuit din corpurile *I*, *II* și *III* se constată că *I* este legat de *II* prin barele *1—2* și *4—6*, la intersecția cărora se va găsi centrul (*I*, *II*). *I* este legat de *III* prin barele *2—3* și *5—6* a căror intersecție va da centrul (*I*, *III*), *II* este legat de *III* prin barele *1—3* și *4—5*, a căror intersecție dă centrul (*II*, *III*).

Dacă cele trei centre (*I*, *III*), (*I*, *II*) și (*II*, *III*) sînt în linie dreaptă, sistemul constituie o formă critică, deoarece vor putea avea loc deplasări mici între *I*, *II* și *III*. Dacă cele trei centre nu sînt în linie dreaptă, sistemul constituie o grindă care îndeplinește condiția de strictă nedeformabilitate.

Astfel, exemplul din fig. 239, *a* constituie o formă strict nedeformabilă, deoarece centrele (*I*, *II*), (*I*, *III*) și (*II*, *III*) nu sînt în linie dreaptă, pe cînd cel din fig. 239, *b* este o formă critică, cele trei centre fiind coliniare.

La sistemele cu mai mult decît trei reazeme simple, în care terenul intervine deci ca element de nedeformabilitate al sistemului, trebuie să se țină seamă, în analiza centrelor instantanee, și de legăturile din reazeme; terenul va fi considerat în mod obligatoriu ca unul dintre corpuri.

La aceste sisteme ca și la grinzile libere cu multe bare este recomandabil să se suprime o legătură simplă (bară sau reazem) și să se construiască toate centrele instantanee pentru sistemul cu un grad de libertate. Dacă rezultă că legătura suprimată nu împiedica deplasările, adică există compatibilitate între centrele instantanee obținute și legătura respectivă, sistemul consituie o formă critică.

În fig. 240, *a* în care cele două bare dintre *B* și corpurile *I*, *II* constituie un romb, se pot distinge patru corpuri geometric nedeformabile: *I*, *II*,

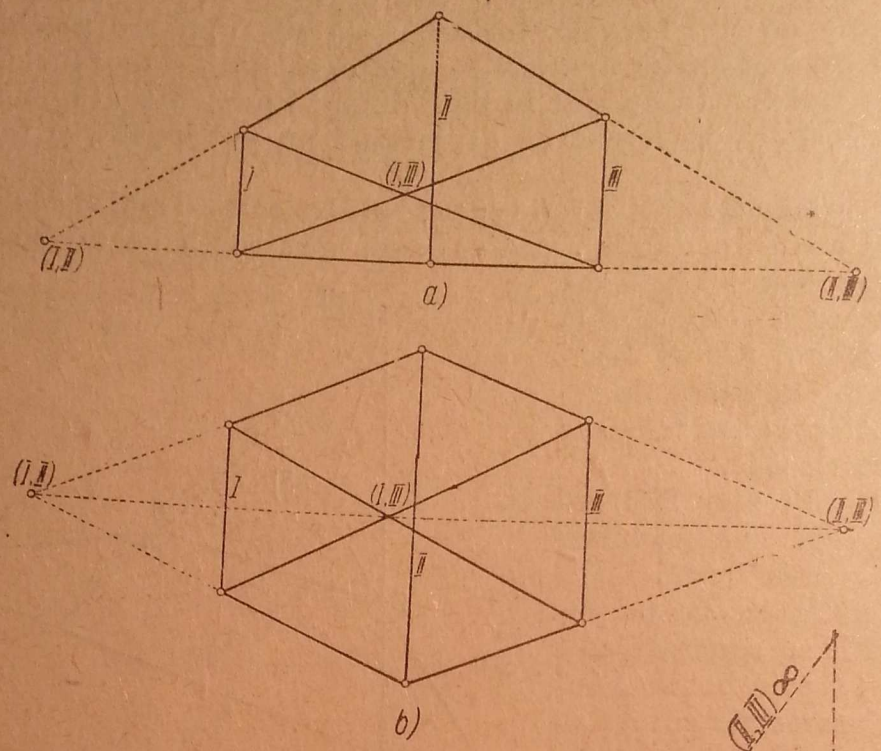
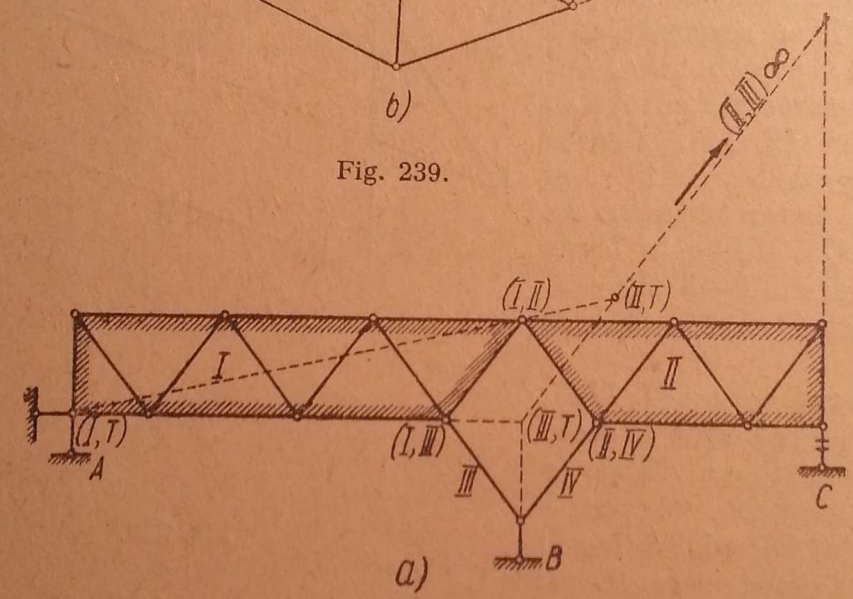


Fig. 239.



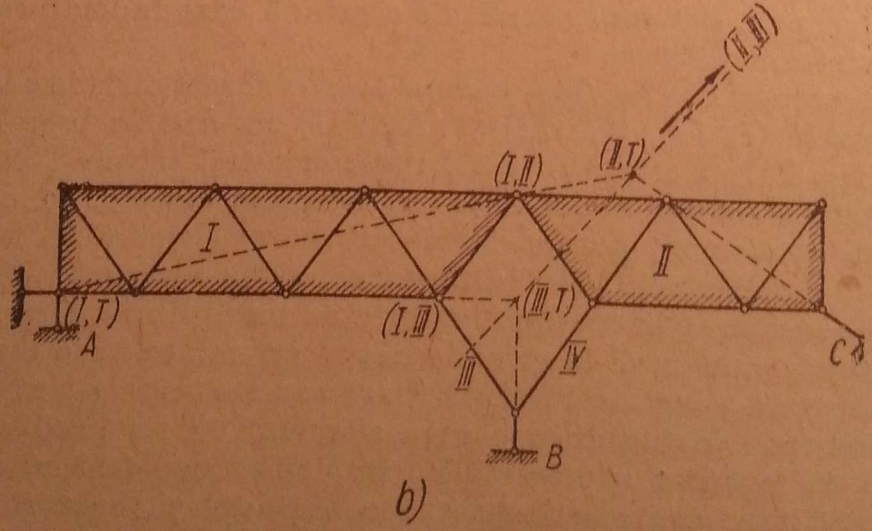


Fig. 240.

III și *IV* dacă se suprimă reazemul din *C*. Centrul (*I*, *T*) se găsește în articulația din *A*, iar centrul (*III*, *T*), la intersecția verticalei din *B* cu dreapta (*I*, *T*) — (*I*, *III*). Centrul (*II*, *III*) se găsește la infinit pe direcția indicată în figură, iar din combinația *II*, *III*, *T*, rezultă că (*II*, *T*) se găsește pe dreapta din (*III*, *T*), paralelă cu direcția pe care se găsește (*II*, *III*). Totodată (*II*, *T*) se găsește și pe dreapta (*I*, *T*) — (*I*, *II*) din combinația *I*, *II*, *T*, astfel încît este determinat. Centrul (*II*, *T*) astfel obținut nu se găsește pe linia reazemului din *C*, astfel încît dacă nu se suprimă acest reazem, deplasările analizate nu sînt posibile și, deci, construcția nu este o formă critică.

Dacă se înclină însă reazemul din *C*, astfel încît direcția pendulului să treacă prin (*II*, *T*) determinat mai sus, — ca în fig. 240, *b* — deplasările analizate sînt posibile fără suprimarea reazemului *C* și atunci sistemul devine o formă critică.

b) Folosirea diagramei deplasărilor (vitezelor)

Din relația (4.26) efortul într-o bară *ij* obținut prin diagrama vitezelor este :

$$N_{ij} = \frac{\Sigma P_k \cdot \delta_k}{z_i - z_j}. \tag{4.27}$$

Această expresie arată că dacă $z_i \neq z_j$, N_{ij} este finit, și sistemul este strict nedeformabil, dar dacă $z_i = z_j$, N_{ij} devine infinit, adică sistemul devine o formă critică.

De aici rezultă următorul procedeu : se suprimă o bară *ij* din sistem, transformîndu-l astfel într-un sistem cinematic cu un grad de libertate și se construiește diagrama deplasărilor. Dacă se obține $z_i \neq z_j$ rezultă o formă strict nedeformabilă, dar dacă rezultă $z_i = z_j$, înseamnă că forma este critică. Egalitatea $z_i = z_j$ arată că dreapta care unește punctele rabătute *i'* și *j'* este paralelă cu bara *ij* și, deci, se poate face diagrama vitezelor ținînd seamă și de legătura dintre nodurile *i* și *j*, adică se poate face epura deplasărilor fără să se suprime bara *ij*. Fără să se suprime nici o bară, sistemul are o mobilitate redusă, adică este în situația ce caracterizează formele critice din punctul de vedere al deformațiilor.

În exemplul din fig. 241, *a*, dacă se suprimă bara *5—6* și se fixează triunghiul nedeformabil *1—2—7*, și apoi se dă lui *3* o deplasare egală cu bara *2—3*, se obține *3'*, apoi *4'*, *6'* și *5'*. Rezultă clar din figură că $z_5 \neq z_6$ și sistemul este strict nedeformabil.

În grinda din fig. 241, *b*, care diferă de cea din 241, *a* prin adăugirea unui panou la talpa inferioară, dacă se suprimă bara *6—7* și se imobilizează triunghiul *1*, *2*, *9*, se poate construi diagrama deplasărilor.

Se ia *3'* în *2*, și apoi se obține *4'*, *5'*, *7'* și *6'*. Rezultă $z_6 = z_7$, adică *6'—7'* este paralelă cu *6—7*. Aceasta înseamnă că ar rezulta un efort infinit în bara *6—7*, sau, din punct de vedere cinematic, nu era nevoie să se suprime bara *6—7* ca să se poată construi diagrama deplasărilor, deoarece această diagramă este compatibilă cu toate legăturile sistemului. Deci, sistemul este geometric deformabil, adică o formă critică.

În formele critice toate laturile ce unesc punctele rabătute sînt paralele cu laturile inițiale, pe cînd în formele corecte una dintre laturi nu are această

proprietate. În fig. 241, *a*, *5'—6'* nu este paralelă cu *5—6*. În fig. 219 s-a văzut că grinda de aceeași formă cu cele din fig. 241, *a* și *b*, dar cu patru panouri pe talpa inferioară, constituie o formă corectă. Formele critice la acest tip de grinzi (fig. 219, 241, *a* și *b*) au un număr de panouri pe talpa inferioară, multiplu de 3.

Verificarea strictei nedeformabilității prin metodele cinematice nu trebuie limitată la suprimarea unei singure legături. Din punct de vedere

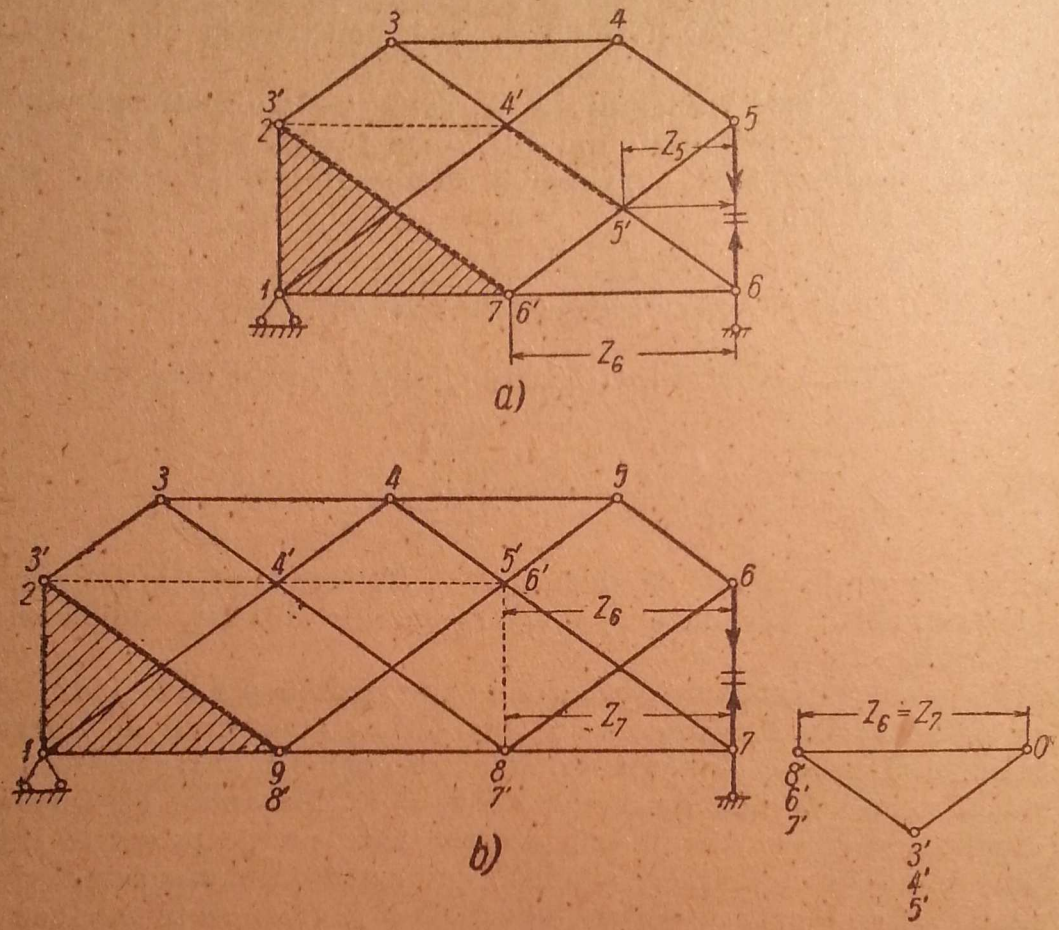


Fig. 241.

teoretic, ar trebui făcută verificarea prin suprimarea pe rînd a fiecărei bare sau legături.

Astfel, la sistemele cu mai mult decît trei reazeme simple, din faptul că sistemul de rezemare asigură nedeformabilitatea geometrică, în loc să se suprime o bară, se poate suprima un reazem, însă reazemul suprimat trebuie să contribuie la a face sistemul nedeformabil. De exemplu, la verificarea sistemului din fig. 240, *a* cu articulație în *A* și două reazeme verticale în *B* și *C* nu se va suprima legătura orizontală a articulației *A*, deoarece determinarea reacțiunii orizontale în *A* se face dintr-o simplă ecuație de proiecție pe orizontală, în care nu intervin legăturile ce asigură nedeformabilitatea geometrică și, în consecință, nu ar da o indicație valabilă.

În fig. 242 sistemul este alcătuit din patru corpuri rigide *I*, *II*, *III*, *IV* (nu s-au mai desenat zăbrelele în corpurile *I* și *II*). Pentru a verifica stricta nedeformabilitate prin diagrama deplasărilor se suprimă reazemul din *C*. Diagrama deplasărilor se începe din nodul *A* care este centrul de rotație pentru corpul *I*. Se dă lui *D* o deplasare arbitrară rabătută în *D''*

și rezultă apoi E'. Din E' se duce paralela la EB. B' trebuie să se găsească și pe direcția pendulului din B, astfel că este determinat. F' se construiește prin paralela din D' la DF și paralela din B' la BF, iar C' se construiește prin paralela din D' la DC și paralela din F' la FC.

Deoarece punctul C' a rezultat în afara verticalei lui C, adică în afara posibilităților reale de deplasare permise de reazemul C, înseamnă că sistemul este strict nedeformabil.

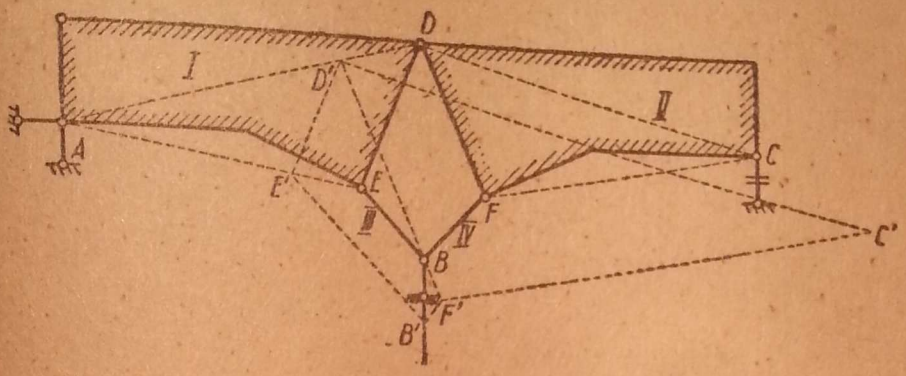


Fig. 242.

Dacă reazemul din C ar fi avut direcția CC', sistemul ar fi constituit o formă critică.

Aplicația 60. Să se construiască liniile de influență ale reacțiunii din C și ale eforturilor din barele *79* și *57* ale grinzii din fig. 243 prin diagrama vitezelor pentru $P = 1$ pe talpa inferioară și, apoi, pe talpa superioară.

Răspuns. Grinda are asigurată nedeformabilitatea geometrică prin legăturile sale cu terenul, astfel încît în construcția diagramelor deplasărilor se păstrează aceste legături. Se vor utiliza diagramele polare ale acestor deplasări.

Linia V_C. Se suprimă pendulul din C și se începe diagrama din articulația A, dîndu-se o deplasare nodului *1* reprezentată de $O1'$. Nu se poate trece aparent la alt punct și, de aceea, se va utiliza metoda pozițiilor false. Se ia o deplasare arbitrară pentru *2* reprezentată prin $O2_1$ (fig. 243, *a*), apoi, pe baza acestuia se găsește 3_1, 4_1 și B_1. Se ia o a doua poziție falsă pentru *2*, luînd o deplasare nulă, astfel încît 2_2 este reprezentat peste polul O, și cu aceasta se construiesc punctele 3_2, 4_2 și B_2. Pe linia $B_1 - B_2$ se va găsi poziția reală a lui B'. Totodată, B' se va găsi și pe verticala reazemului B, adică în diagrama polară pe verticala din O, așa că este determinat de intersecția lor. De fapt, nici nu era nevoie să se folosească pozițiile false, deoarece, odată ce s-a luat o poziție pentru *1'*, se observă că punctul B este legat de *1* prin barele $1-3$ și $3-B$ în prelungire, astfel încît, atît *3'*, cît și B' se vor găsi pe paralela din *1'* la dreapta $1-3-B$. Intersecția acestei drepte cu verticala din O determină pe B'. După aceasta se poate determina $2'$ din *4'* și A', și $3'$ — din *4'* prin paralele din *1'* la $1-4$ și, din B' la $B-4$. Apoi se determină *5'*, *7'*, *6'*, *9'*, *8'* și C'. Așezînd în ordonate verticale proiecțiile *1'* și *2'*. Se construiesc apoi punctele orizontale ale distanțelor de la O la punctele *1'*, *3'*, B', *7'*, *9'* și C', se obține linia de influență V_C pentru $P = 1$ pe talpa inferioară (fig. 243, *a'*). Semnul și scara rezultă din faptul că pentru $P = 1$ în nodul C, avem $V_C = +1$. Dacă se pun în ordonate deplasările nodurilor tălpii superioare, se obține linia de influență a lui V_C pentru $P = 1$ aplicată pe această talpă (fig. 243, *a''*).

Linia I_{79}. Diagrama polară a deplasărilor (fig. 243, *b*) coincide cu precedenta pînă la nodurile *7'* și *8'*. Se trece apoi la punctul C', care se găsește la intersecția verticalei din O cu paralela din *8'* la $8 - C$, și după aceea se construiește și punctul *9'* din *6'* și C'.

Se trec în ordonate verticale deplasările nodurilor tălpii inferioare, și apoi, ale tălpii superioare, obținîndu-se cele două linii de influență ale lui I_{79}. Scara se determină așa cum se vede în figură, punînd $z_7 - z_9 = 1$. Semnele se pot deduce dintr-o poziție particulară a lui $P = 1$. Astfel, punînd $P = 1$ în nodul *9*, rezultă:

$$+ 1 \cdot \delta_9 + I_{79,7} \cdot z_7 - I_{79,9} \cdot z_9 = 0$$

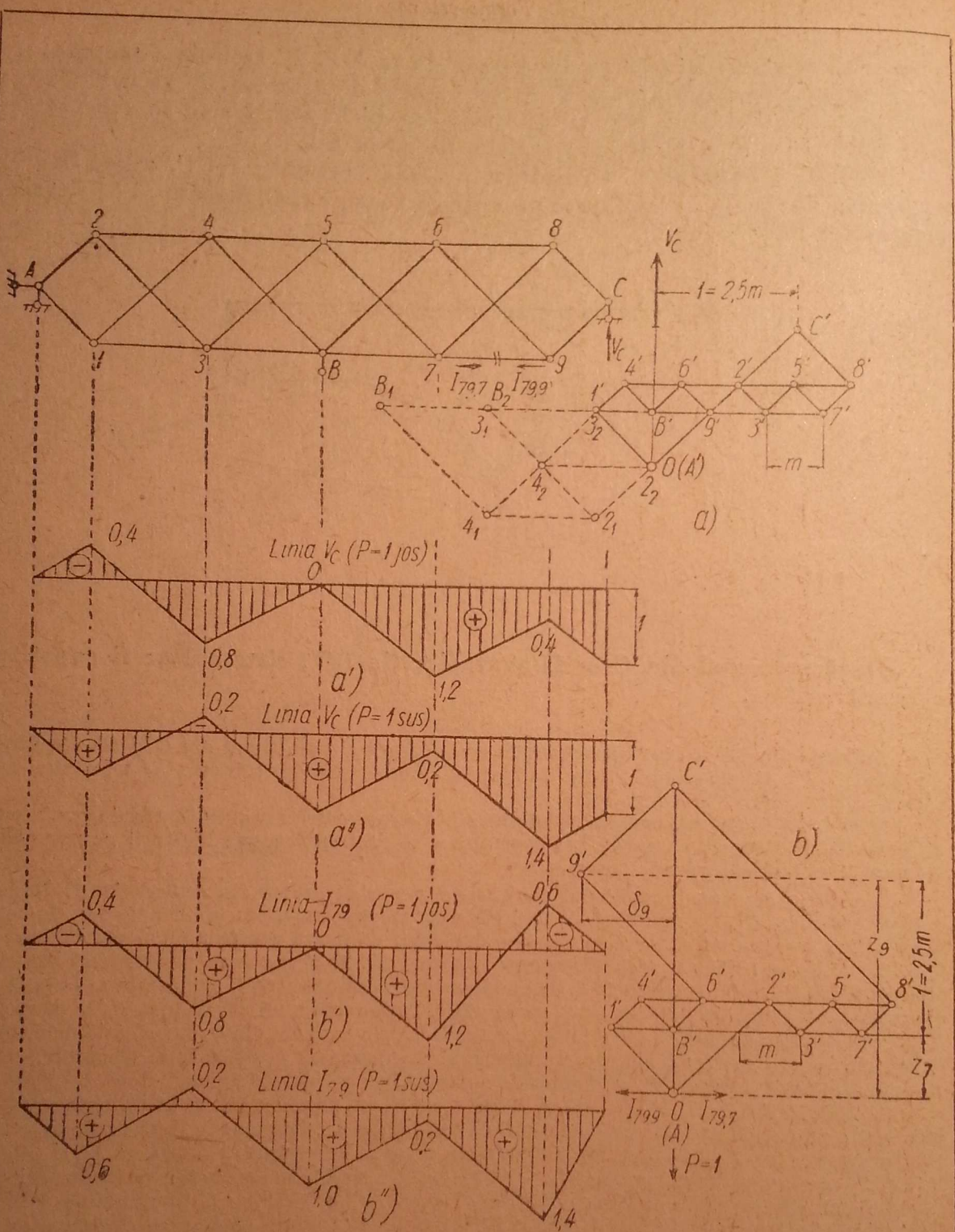

2
4
5
6
8
A
C
1
3
B
7
9
$I_{79,7}$
$I_{79,9}$
V_C
1=2,5m
C'
4'
6'
2'
5'
8'
B_1
B_2
1'
3_1
3_2
B'
9'
3'
7'
O(A')
m
4_2
2_2
4_1
2_1
a)
0,4
Linia V_C (P=1 jos)
O
1
0,8
a')
1,2
0,4
0,2
Linia V_C (P=1 sus)
1
0,2
a'')
1,4
C'
b)
9'
0,4
Linia I_{79} (P=1 jos)
0,6
O
δ_9
z_9
1=2,5m
4'
6'
2'
5'
8'
1'
B'
m
3'
7'
z_7
0,8
b')
1,2
0,2
Linia I_{79} (P=1 sus)
I_{799} 0 $I_{79,7}$
(A)
P=1
0,6
0,2
1,0
b'')
1,4

Fig. 243.

sau

$$I_{79} = -\frac{\delta_9}{z_9 - z_7} = -\frac{1{,}5\ m}{2{,}5\ m} = -0{,}6.$$

De asemenea, semnele se puteau deduce din urmărirea sensului de rabatere a vitezelor.

Linia D_{57} (fig. 244). Se suprimă bara *57* și se construiește diagrama polară a deplasărilor (fig. 244, *a*) care coincide cu cea de la fig. 243, *a* pînă la nodurile *B*, *5* și *6*. Mai departe, deși nu există nici un nod legat direct cu două bare de două puncte construite, se osservă totuși că nodul *9* este legat de *B* prin barele *B7* și *79* în linie dreaptă, așa că *9'* se găsește pe orizontala din

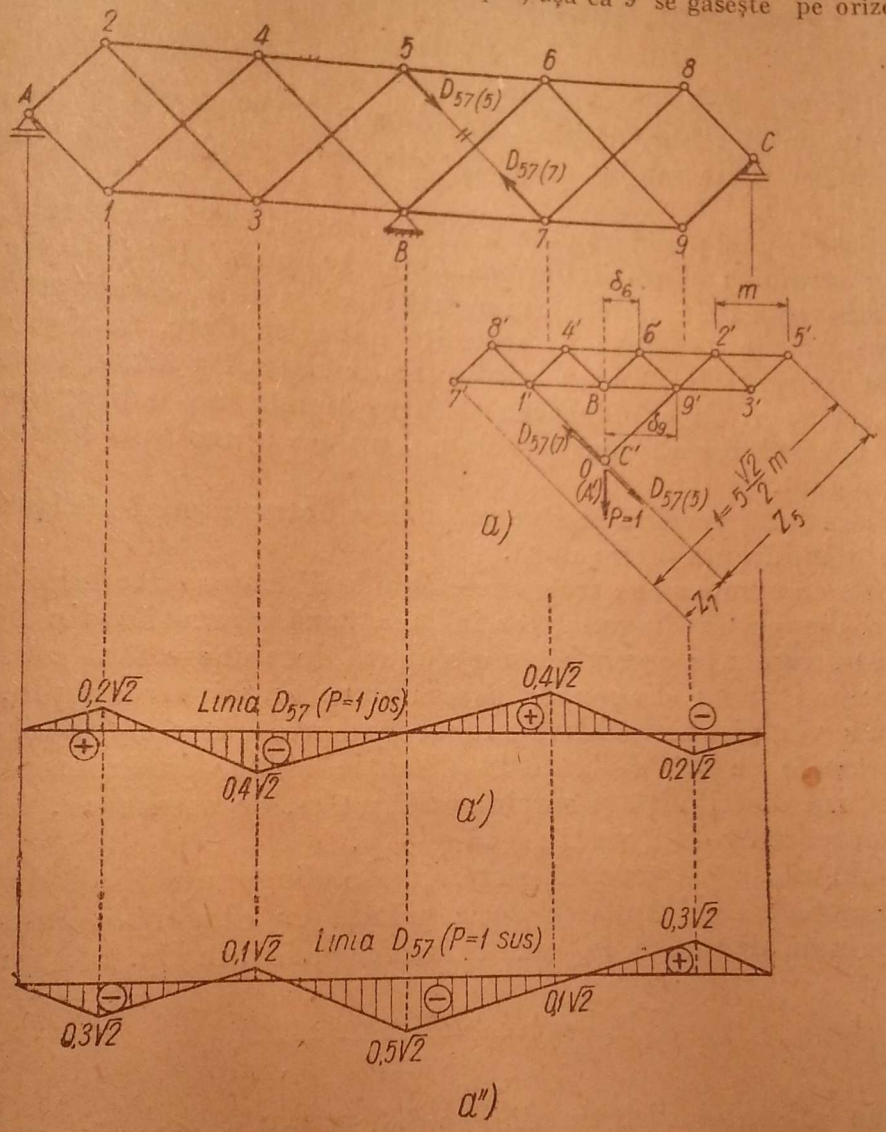


Fig. 244.

B' și, totodată, se găsește și pe paralela din *6'* la *69*. După ce s-a construit *9'*, se trece la *C'*, apoi la *8'* și la *7'*. Liniile de influență (fig. 244) se obțin din trecerea în ordonate verticale a proiecțiilor orizontale ale deplasărilor rabătute. Scara este reprezentată grafic. Semnele și verificarea scării se pot face pentru o poziție particulară a lui $P = 1$. Dacă $P = 1$ acționează în *9*, rezultă :

$$-1 \cdot \delta_9 - D_{57(5)} \cdot z_5 - D_{57(7)} \cdot z_7 = 0$$

sau :

$$D_{57} = -\frac{\delta_9}{z_5 + z_7} = -\frac{m}{5\frac{\sqrt{2}}{2}m} = -\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Ca observație generală, se vede că liniile de influență pentru $P = 1$ pe talpa superioară diferă complet de liniile pentru $P = 1$ pe talpa inferioară, datorită sistemului complex de legături.

Aplicația 61. Să se arate ce direcție trebuie să aibă pendulul reazemului din C al grinzii din fig. 243, pentru ca sistemul să devină o formă critică.

Răspuns. Cînd pendulul din C are direcția barei $9 - C$, sistemul devine critic, deoarece diagrama deplasărilor din fig. 243, *a* este compatibilă cu o asemenea legătură pentru C.

§ 28. INFLUENȚA FORMEI GRINZII ASUPRA EFORTURILOR ÎN BARE

Eforturile din bare depind de încărcări, de sistemul de rezemare, de forma tălpilor și de modul cum sînt dispuse zăbrelele (diagonalele și montanții).

Aceasta pune problema de a găsi care grindă cu zăbrele satisface cel mai bine anumite condiții impuse dinainte, cum sînt: să fie capabilă să preia combinația de sarcini permanente și utile date, să acopere deschiderile respective, să fie cuprinsă în anumite gabarite date, toate acestea cu un minimum de material, cu un minimum de muncă pentru confecționare și montare, și apoi, cu exploatarea și întreținerea cea mai economică.

Sub această formă pusă problema, nu s-a ajuns la o teorie care să dea soluția optimă.

Deocamdată, teoriile se limitează la a determina și a discuta eforturile pentru o grindă cu zăbrele dată.

În cele ce urmează se trag unele concluzii asupra modului în care forma tălpilor și dispoziția diagonalelor influențează eforturile din bare. Discuția se va limita numai la o grindă cu o singură deschidere fără console, cu montanți verticali și cu diagonale sistem dreptunghiular simplu, adică toate diagonalele vor fi descendente sau ascendente către mijlocul grinzii.

Încărcările ce vor fi luate în discuție sînt: încărcarea permanentă g t/m uniform distribuită și sarcina utilă p t/m, de asemenea, uniform distribuită. Încărcarea totală va fi: $q = g + p$.

Trebuie să se observe că sistemul de diagonale fiind dreptunghiular, nu este nevoie să se studieze decît grinda cu diagonale descendente spre mijlocul grinzii, deoarece, în baza formulei (4.12), la fig. 245 rezultă:

$$D_i \cos \varphi = \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i}, \tag{4.28}$$

iar dacă se schimbă direcția diagonalei făcînd-o ascendentă (fig. 245, *a*) rezultă:

$$D_i' \cos \varphi' = \frac{M_i}{h_i} - \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} = - D_i \cos \varphi. \tag{4.29}$$

Toate concluziile pentru diagonale descendente în sistemul dreptunghiular vor fi valabile cu semn schimbat pentru diagonalele ascendente.

Eforturile în tălpi. Liniile de influență ale eforturilor din tălpi sînt de același semn pe toată deschiderea, deoarece, prin secționarea panoului $i-(i+1)$, ele se determină din liniile de influență ale momentelor încovoietoare în raport cu punctele care se găsesc între reazeme.

Pentru a obține efortul maxim în tălpi trebuie încărcată toată deschiderea grinzii cu sarcină utilă, adică grinda va fi complet încărcată cu $q = g + p$.

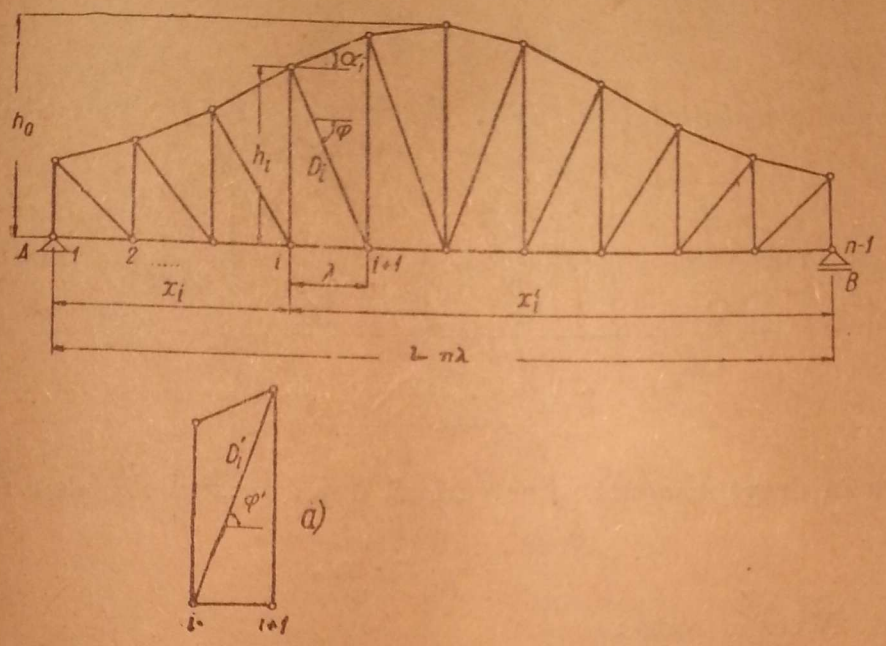


Fig. 245.

Dacă în locul efortului din bara unei tălpi N se ia proiecția sa pe orizontală, rezultă :

$$N\cos\alpha_i = \pm\frac{M_i}{h_i} = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x_i\cdot x_i'}{h_i}. \qquad (4.30)$$

Să vedem cum variază $N\cdot\cos\alpha_i$ în funcție de variația lui h_i. Se face discuția pentru grinda cu tălpi paralele, grinda parabolică și grinda triunghiulară, toate având la mijloc aceeași înălțime h_0.

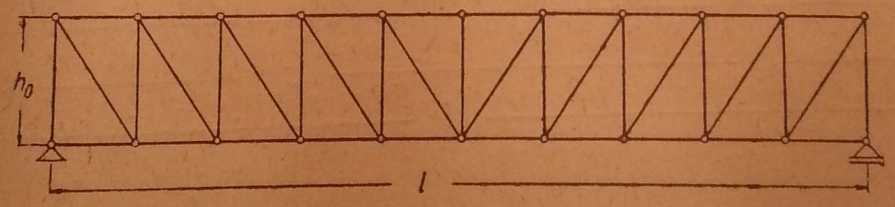


Fig. 246.

Grinda cu tălpi paralele (fig. 246).

$$\alpha_i = 0 \quad \text{și} \quad h_i = h_0 = \text{const.}$$

$$N = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{h_0}\cdot x_i\,x_i' = \pm\frac{1}{2}\frac{q}{h_0}x_i(l - x_i). \qquad (4.31)$$

Deci, variația lui N este aceeași ca a expresiei $x_i\,(l - x_i)$, care reprezintă o parabolă.

N crește parabolic de la reazeme către mijloc, unde are valoarea maximă:

$$N_{max} = \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{ql^2}{h_0}. \tag{4.32}$$

Grinda parabolică (fig. 247). Se numește parabolică grinda la care

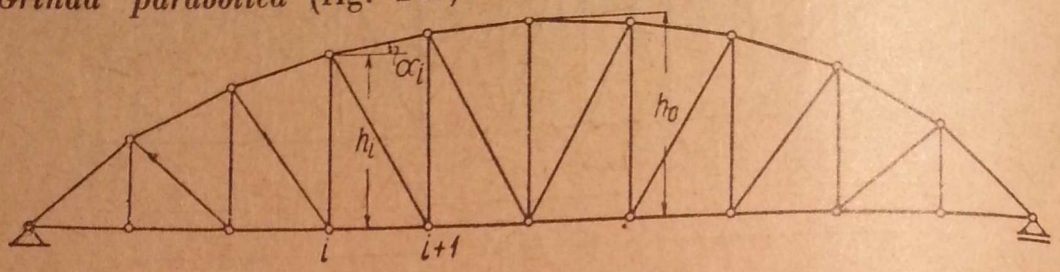


Fig. 247.

înălțimea în dreptul montanților variază după o parabolă, deci:

$$h = \frac{4h_0}{l^2}\, x_i \cdot x_i' , \tag{4.33}$$

și efortul $N \cos \alpha_i$ este:

$$N\cos\alpha_i = \pm \frac{\frac{1}{2} q \cdot x_i \cdot x_i'}{\frac{4h_0}{l^2}\, x_i \cdot x_i'} = \pm \frac{1}{8} \cdot q \frac{l^2}{h_0} . \tag{4.34}$$

Proiecția pe orizontală a efortului din barele tălpilor la grinda parabolică este constantă și egală cu valoarea efortului maxim la grinda cu tălpi paralele de aceeași înălțime la mijloc și aceeași deschidere.

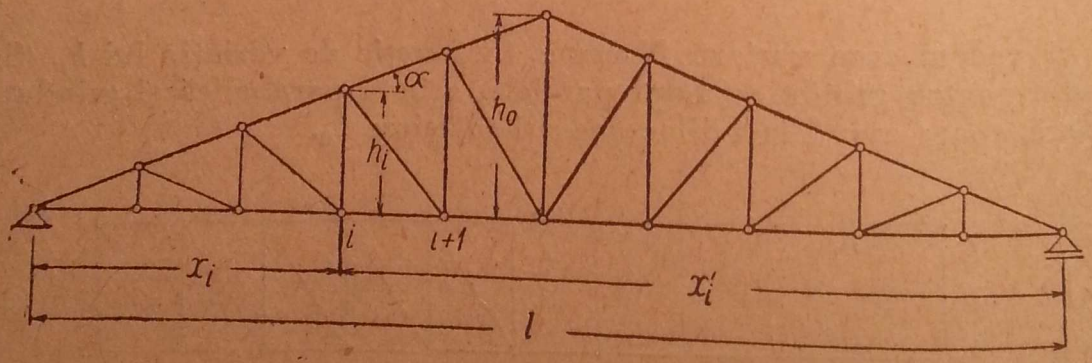


Fig. 248.

Pe talpa dreaptă unde $\alpha_i = 0$, efortul este constant pe toată deschiderea, iar pe talpa curbă unde α_i crește de la mijloc spre reazem, efortul în talpă va crește, de asemenea, de la mijloc spre reazeme, după valoarea lui $1/\cos\alpha_i$.

Grinda triunghiulară (fig. 248). Variația înălțimii pe jumătatea din stînga este dată de expresia:

$$h_i = \frac{2\,h_0}{l}\, x_i \tag{4.35}$$

și, deci,

$$N\cos\alpha = \pm \frac{\frac{1}{2} ql\, x_i\, x_i'}{\frac{2h_0}{l} x_i} = \frac{1}{4} \frac{ql}{h_0} x_i', \tag{4.36}$$

în care :

$$\frac{l}{2} \leqslant x_i' \leqslant l.$$

Eforturile cresc de la mijlocul grinzii, unde au valoarea minimă, spre reazeme, unde se obține valoarea maximă.

La mijloc :

$$x_i' = \frac{l}{2}$$

și, deci,

$$N\cos\alpha\,(min) = \pm \frac{1}{8} q \frac{l^2}{h_0},$$

adică proiecția pe orizontală a efortului minim este egală cu efortul maxim dintr-o grindă cu tălpi paralele de aceeași înălțime.

Efortul maxim se obține pentru $x' = l$:

$$N\cos\alpha\,(max) = \pm \frac{1}{4} q \frac{l^2}{h_0} = 2\, N\cos\alpha\,(min).$$

Pe partea din dreapta are loc aceeași variație. Deci, la o grindă triunghiulară eforturile din tălpi cresc de la simplu (în mijloc) la dublu (către reazeme), efortul minim fiind egal cu cel maxim de la o grindă cu tălpi paralele de aceeași deschidere și înălțime la mijloc.

În concluzie, rezultă că grinda triunghiulară are eforturile cele mai dezavantajoase în tălpi, cu efortul maxim la reazeme unde îmbinările sub un unghi ascuțit sînt greu de realizat. De aceea, ele nu se folosesc la deschideri mari și la sarcini importante. Forma lor proprie pentru acoperiș le face să fie utilizate la deschideri mici.

Grinda cu tălpi paralele și grinda parabolică dau eforturi raționale în tălpi, mai ales grinda parabolică, care, avînd efortul aproape constant, are aceeași secțiune de bară pe toată deschiderea, ceea ce constituie un avantaj constructiv.

Eforturile în diagonale. Se folosește expresia (4.28) :

$$D_i \cos\varphi = \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i}. \tag{4.28}$$

Această expresie, ca și liniile de influență care au fost determinate pentru eforturile în diagonale arată că, în general, semnul efortului în diagonală depinde atît de încărcări, cît și de forma grinzii.

În cele ce urmează se vor trage unele concluzii asupra semnului efortului din diagonale la același sistem de zăbrele dreptunghiular. Expresia

(4.28) este scrisă pentru diagonale descendente către mijlocul grinzii. Pentru cele ascendente semnele sînt schimbate (4.29).

Grinda cu tălpi paralele. Aici, $h_{i+1} = h_i = h_0$.
Deci,

$$D\cos\varphi = \frac{1}{h_0}(M_{i+1} - M_i). \tag{4.37}$$

Așadar, efortul în diagonală este pozitiv cînd $M_{i+1} > M_i$, unde $i+1$ este capătul de jos al diagonalei.

Expresia (4.37) arată că : în grinda cu tălpi paralele diagonalele sînt întinse cînd au direcția descendentă către momentul maxim. Invers, cele ascendente către momentul maxim sînt comprimate. Aceasta se poate vedea și din expresia pentru diagonalele descendente din stînga :

$$D\sin\varphi = T_{i-(i+1)}.$$

Deci, cînd forța tăietoare este pozitivă, adică atunci cînd momentul crește, diagonala descendentă este întinsă.

Sub influența sarcinii mobile p, momentul maxim din încărcarea permanentă g și încărcarea utilă p își schimbă poziția în regiunea mijlocului grinzii, astfel că în anumite diagonale semnul se va schimba. Aceasta se observă dacă se scrie, cu ajutorul liniei de influență (fig. 249, *a*) :

$$D\sin\varphi\,(max) = g\,(\Omega_{dr} - \Omega_{st}) + p\Omega_{dr};$$

$$D\sin\varphi\,(min) = g\,(\Omega_{dr} - \Omega_{st}) - p\,\Omega_{st}.$$

Dacă $\Omega_{dr} - \Omega_{st}$ este mare în raport cu Ω_{st}, atunci ambele expresii au același semn. Aceasta se întîmplă înspre reazeme, mărimea regiunii depinzînd de raportul dintre g și p. Dacă însă $\Omega_{dr} - \Omega_{st}$ este mică în raport cu Ω_{st}, ceea ce se întîmplă în panourile dinspre mijlocul grinzii, cele două expresii au semne diferite.

În fig. 249, *b* și *c* sînt arătate diagramele T_g din încărcarea permanentă la care se adaugă curba reacțiunii din A, respectiv din B, cînd sarcina mobilă p înaintează dinspre dreapta, respectiv, dinspre stînga. Luînd aproximativ $T_p \cong V_A$, respectiv, $T_p \cong -V_B$, se vede că spre reazeme forța tăietoare rămîne cu același semn, pe cînd în regiunea centrală (în figură, cele două panouri centrale) T schimbă semnul în funcție de poziția sarcinii mobile. Regiunea pe care are loc această variație de semne a forței tăietoare depinde de raportul dintre g și p.

În concluzie, sub acțiunea sarcinii permanente și mobile, la grinda cu tălpi paralele, diagonalele dinspre reazeme își păstrează semnul (sînt întinse diagonalele descendente și comprimate cele ascendente), iar diagonalele din regiunea mijlocului grinzii au semne alternante, în funcție de poziția sarcinii mobile.

Grinda parabolică. Încărcarea permanentă g dă diagrama momentelor parabolică cu valoarea :

$$M_i = \frac{1}{2}\, g \cdot x_i \cdot x'_i$$

În acest caz, expresiile (4.28) și (4.33) dau :

$$D\cos\varphi = \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i} = \frac{\frac{1}{2} g\, x_{i+1} \cdot x'_{i+1}}{4\frac{h_0}{l^2} x_{i+1} \cdot x'_{i+1}} - \frac{\frac{1}{2} g\, x_i \cdot x'_i}{4\frac{h_0}{l^2} x_i\, x'_i} =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{gl^2}{h_0} - \frac{1}{8}\frac{gl^2}{h_0} = 0.$$

Deci, din încărcarea permanentă uniform repartizată, diagonalele în sistem dreptunghiular la grinda cu zăbrele parabolică nu sînt solicitate la

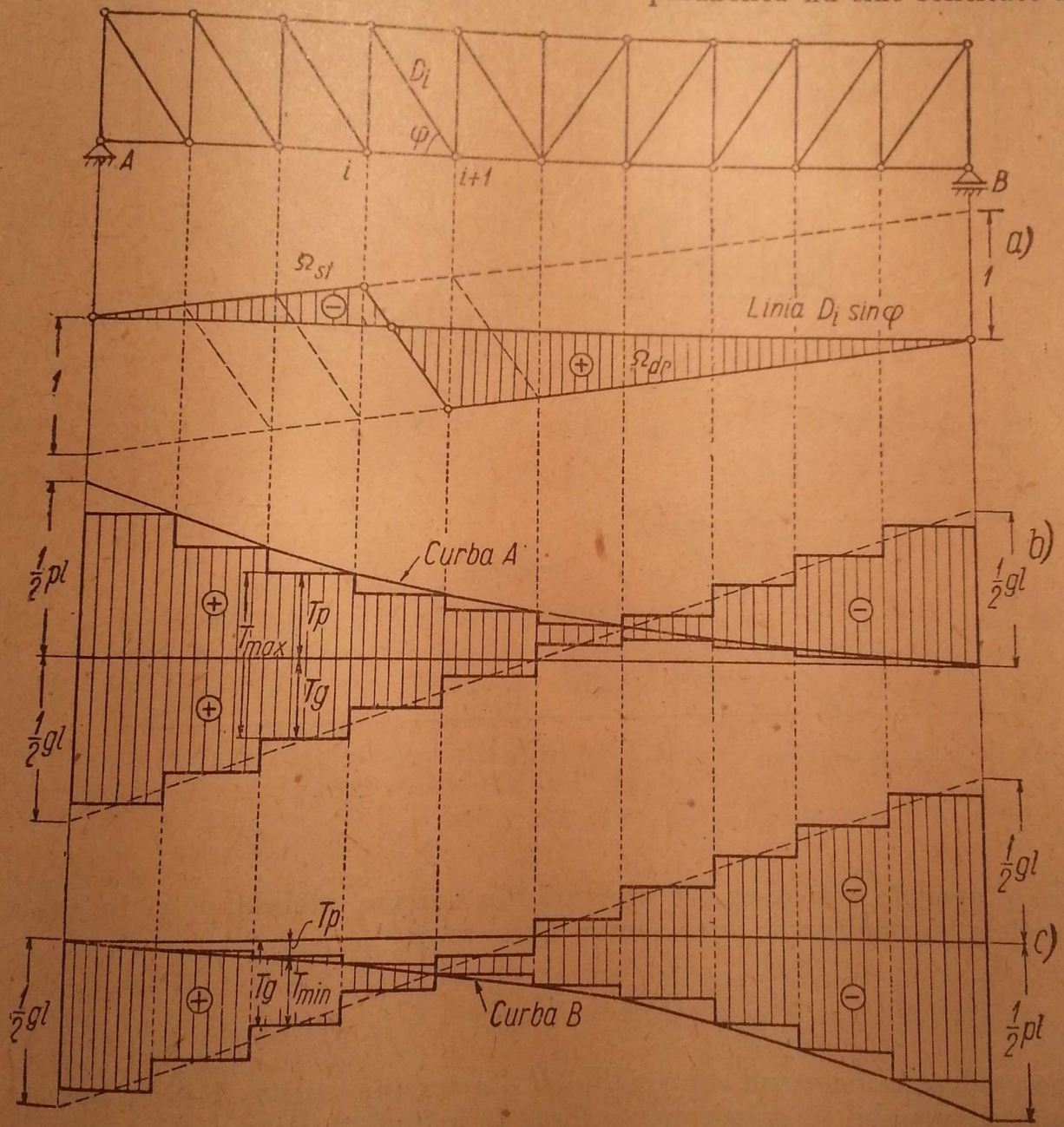


Fig. 249.

nici un efort. Aceasta era de așteptat, deoarece parabola este curba funiculară a încărcării uniform repartizate pe orizontală, și dacă montanții sînt

verticali, ei transmit direct sarcinile ce le revin din panourile aferente, la nodurile tălpii parabolice, astfel că diagonalele nu lucrează.

De aici mai rezultă că cele două suprafețe ale liniei de influență Ω_{st} și Ω_{dr} din fig. 250, *a* sînt egale și de semn contrar, astfel ca suma lor să fie nulă :

$$D = g\,(\Omega_{dr} - \Omega_{st}) = 0.$$

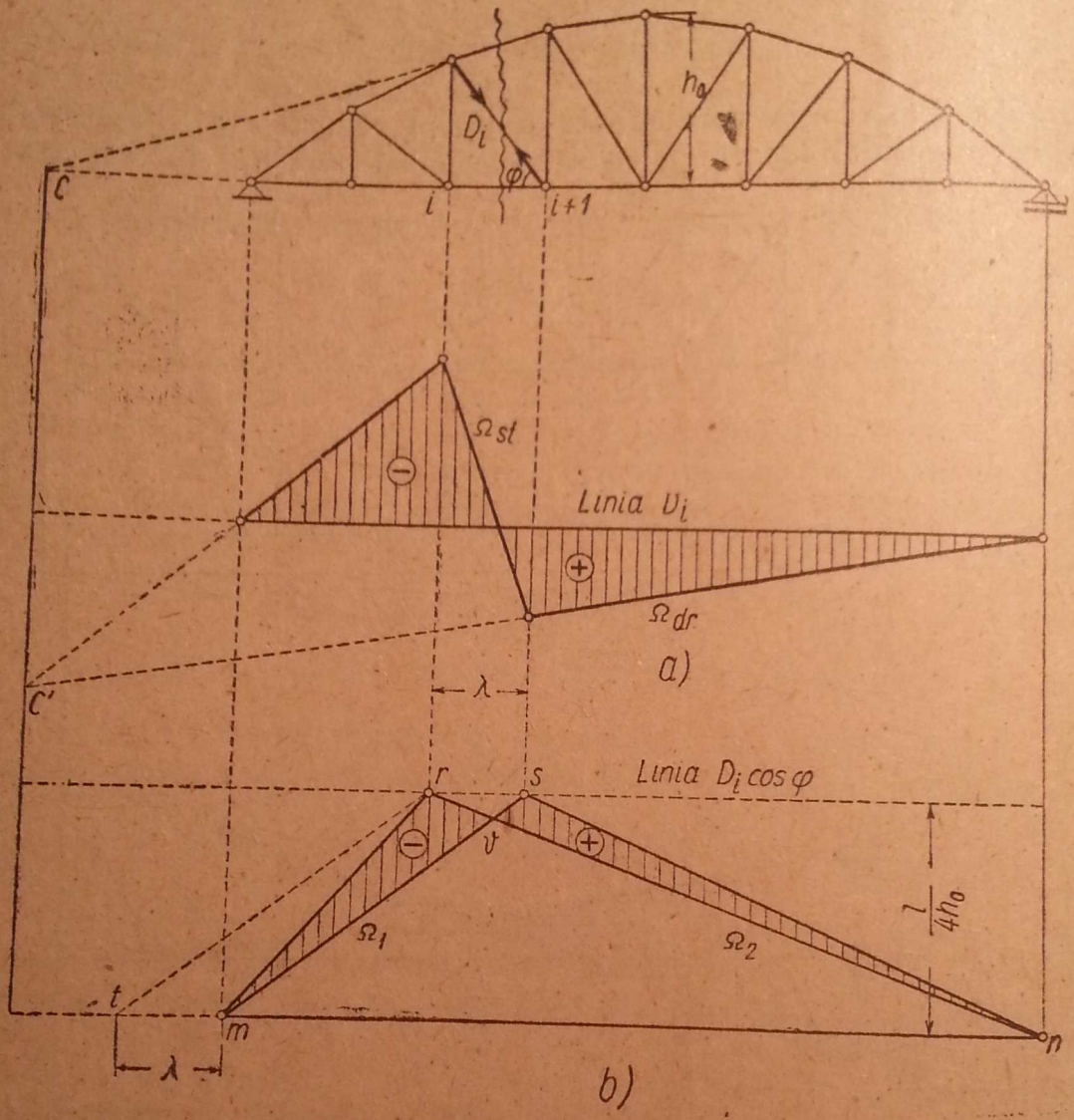


Fig. 250.

În diagonale vor avea loc eforturi din sarcina mobilă p, și în toate diagonalele eforturile vor avea semne alternante

$$D = \pm p\Omega_{dr}.$$

Se va determina acum expresia lui D din sarcina utilă p. Pentru aceasta este mai convenabil să se reprezinte linia de influență $D\cos\varphi$ din expresia (4.28)

$$D\cos\varphi = \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i}.$$

verticali, ei transmit direct sarcinile ce le revin din panourile aferente, la nodurile tălpii parabolice, astfel că diagonalele nu lucrează.

De aici mai rezultă că cele două suprafețe ale liniei de influență Ω_{st} și Ω_{dr} din fig. 250, *a* sînt egale și de semn contrar, astfel ca suma lor să fie nulă :

$$D = g\,(\Omega_{dr} - \Omega_{st}) = 0.$$

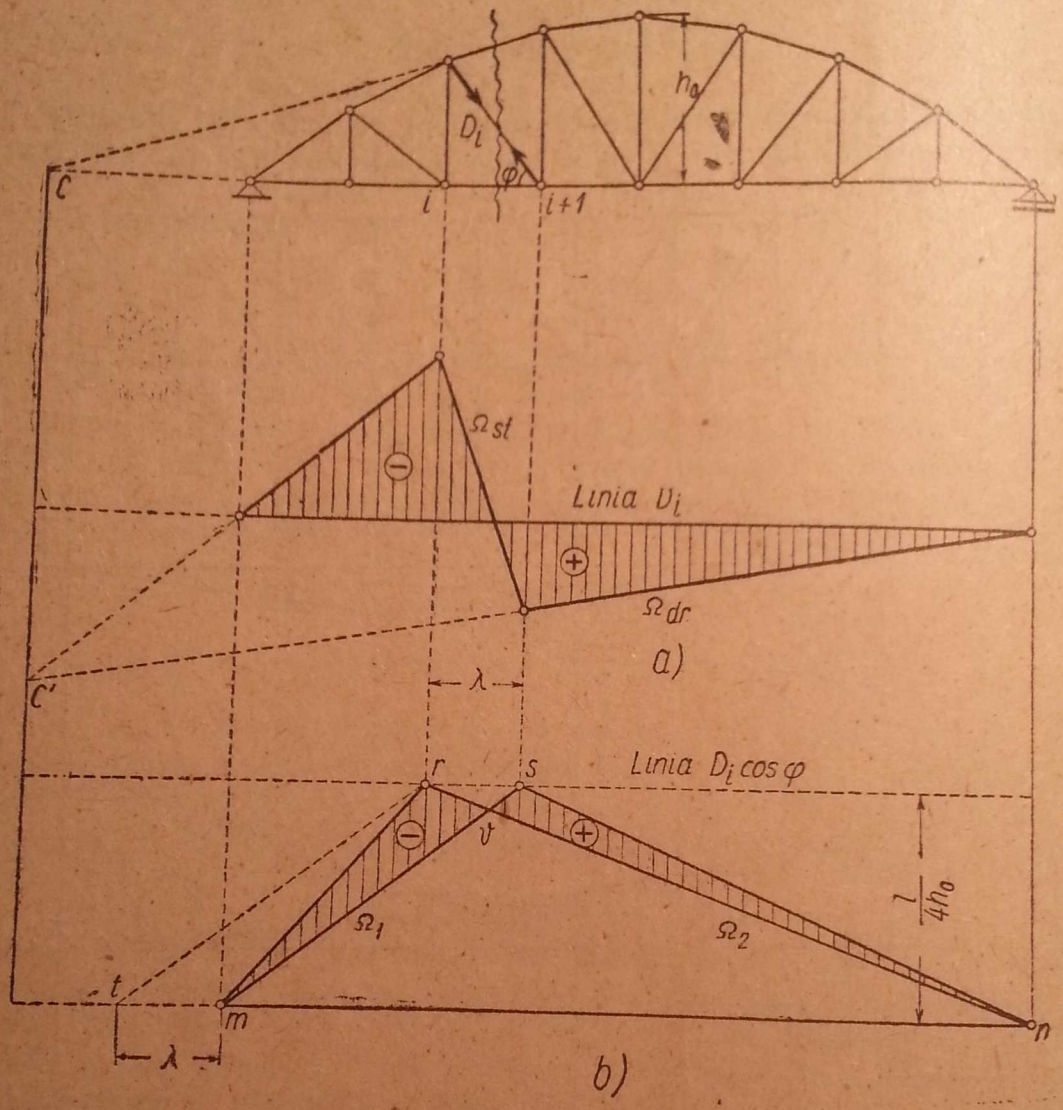


Fig. 250.

În diagonale vor avea loc eforturi din sarcina mobilă p, și în toate diagonalele eforturile vor avea semne alternante

$$D = \pm p\Omega_{dr}.$$

Se va determina acum expresia lui D din sarcina utilă p. Pentru aceasta este mai convenabil să se reprezinte linia de influență $D\cos\varphi$ din expresia (4.28)

$$D\cos\varphi = \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i}.$$

Vîrfurile triunghiurilor celor două linii de influență $\frac{M_{i+1}}{h_{i+1}}$ și $\frac{M_i}{h_i}$ au aceleași înălțime, deoarece :

$$\frac{M_i}{h_i} = \frac{\frac{x_i x_i'}{l}}{\frac{4h_0}{l^2} \cdot x_i x_i'} = \frac{l}{4h_0},$$

expresie ce nu depinde de x_i.

Valoarea suprafețelor $\Omega_1 = \Omega_2$ din fig. 250, *b* se obține din următoarele considerații geometrice : triunghiurile *m r v* și *m r n* au aceeași bază *mr* și, deci, suprafețele lor se vor găsi în raportul înălțimilor față de această bază, sau al altor laturi proporționale cu ele, de exemplu, în raportul *rv* către *rn* :

Dar : $$\frac{rv}{rn} = \frac{lm}{ln} = \frac{\lambda}{l+\lambda}$$

și deci $$\frac{\Omega_1}{\Omega mrn} = \frac{\lambda}{\lambda + l}, \quad \text{dar} \quad \Omega mrn = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{4h_0} = \frac{1}{8} \frac{l^2}{h_0}$$

și, deci, $$\Omega_1 = \frac{1}{8} \frac{l^2}{h_0} \cdot \frac{\lambda}{l+\lambda},$$

astfel încît proiecția orizontală a efortului în diagonală din sarcina utilă este :

$$D\cos\varphi = \pm \frac{1}{8} \cdot p \cdot \frac{l^2}{h_0} \cdot \frac{\lambda}{l+\lambda} \tag{4.38}$$

și nu depinde de poziția panoului.

Deci, dacă se face abstracție de variația lui $\cos\varphi$ de la un panou la altul, care nu produce diferențe mari, se poate spune că la grinda parabolică eforturile în toate diagonalele au aceeași valoare din sarcina utilă, cu ambele semne.

Valoarea este mică în raport cu eforturile maxime din tălpi care și ele sînt constante, dar fără semne alternative. Avem :

$$\left|\frac{D\cos\varphi}{N\cos\alpha}\right| = \frac{\frac{1}{8} p \frac{l^2}{h_0} \cdot \frac{\lambda}{l+\lambda}}{\frac{1}{8}(g+p)\frac{l^2}{h}} = \frac{p}{g+p} \cdot \frac{\lambda}{l+\lambda} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{p}{g+p}, \tag{4.39}$$

dacă grinda are *n* panouri, astfel încît secțiunea diagonalelor este mică în raport cu cea a tălpilor.

Grinda triunghiulară. Semnul efortului în diagonală se obține din expresia :

$$D\cos\varphi = \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i}. \tag{4.28}$$

Pentru a vedea dacă $\frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i} \gtrless 0$, se poate pune expresia sub forma :

$$\frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} \gtrless \frac{M_i}{h_i},$$

sau, deoarece toate cantitățile sînt pozitive,

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} \gtrless \frac{h_{i+1}}{h_i}. \tag{4.40}$$

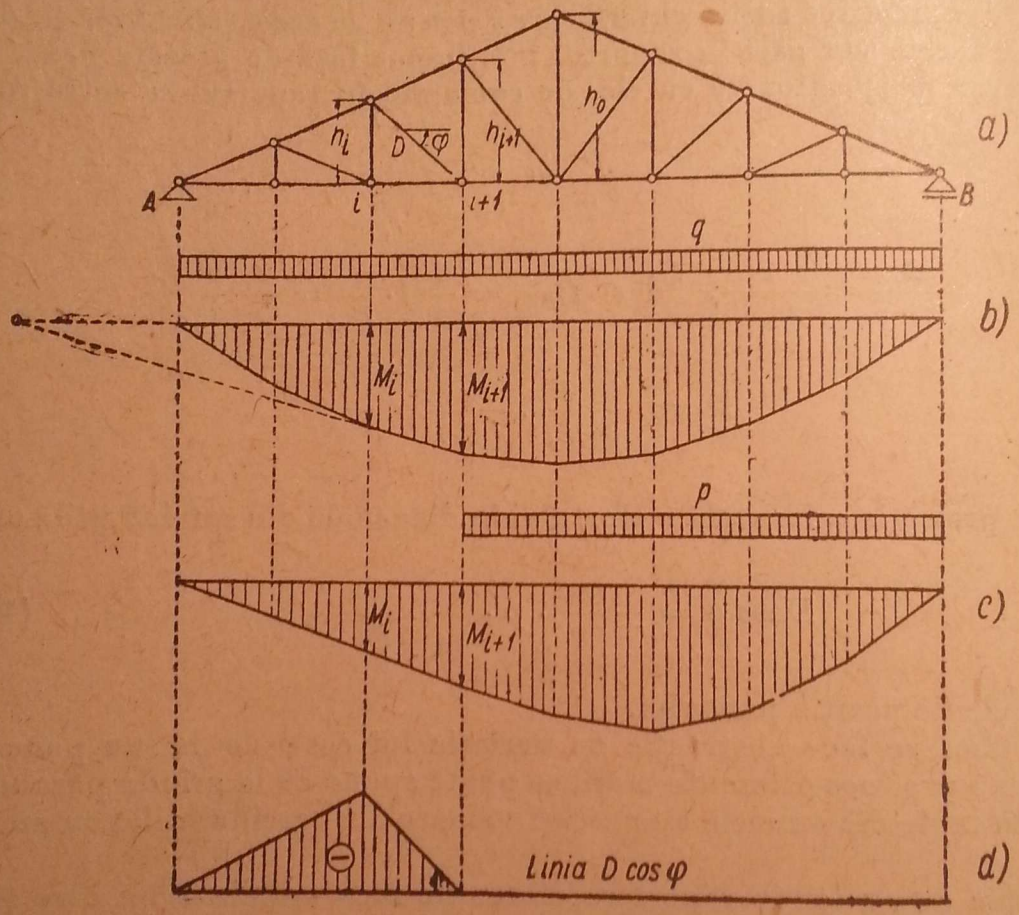


Fig. 251.

La grinda triunghiulară se vede ușor (fig. 251, *a* și *b*) că :

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} < \frac{h_{i+1}}{h_i}, \tag{4.41}$$

deoarece în panoul $i-(i+1)$ dreapta momentelor întîlnește linia de reper în stînga reazemului A (fig. 251, *b*), pe cînd tălpile grinzii se întîlnesc chiar pe reazemul A (fig. 251, *a*).

Rezultă deci : $D \cos \varphi < 0$,

adică diagonalele sînt comprimate.

În cazul particular cînd grinda ar fi încărcată cu sarcini numai la dreapta panoului $i-(i+1)$, atunci și linia momentelor din panou întîlnește linia

de reper tot pe verticala reazemului A (fig. 251, *c*) și, deci :

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} = \frac{h_{i+1}}{h_i},$$

adică :

$$D \cos \varphi = 0,$$

de unde rezultă că pentru o încărcare la dreapta panoului, efortul din diagonală este nul. Aceasta reiese cu ușurință și din linia de influență, care are forma din fig. 251, *d*.

Rezultă, deci, că diagonalele descendente către mijlocul unei grinzi triunghiulare sînt comprimate, iar în cazul cînd sarcinile se aplică numai la dreapta panoului, diagonalele nu vor avea efort.

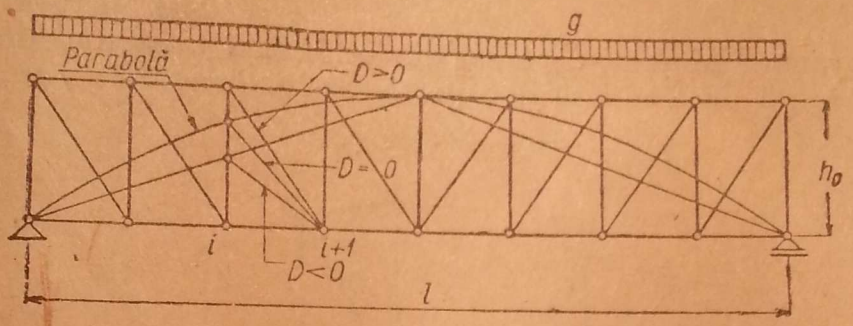


Fig. 252.

Dacă se ține seamă de cele trei tipuri : grinda cu tălpi paralele, grinda parabolică și grinda triunghiulară, rezultă că diagonalele se comportă în mod diferit pentru încărcările permanente și utile.

În fig. 252 se arată că pentru o grindă de aceeași deschidere, aceeași înălțime la mijloc și supusă la încărcări permanente, pentru diagonalele descendente către mijloc (sistem dreptunghiular) rezultă următoarea situație :

grinda cu tălpi paralele : diagonalele sînt întinse ;

grinda parabolică : diagonalele au eforturi nule ;

grinda triunghiulară : diagonalele sînt comprimate.

Ținînd seamă de aceste rezultate și de concluziile trase asupra eforturilor în tălpi, rezultă că grinda triunghiulară nu este o soluție rațională pentru sarcini mari și deschideri importante.

Soluțiile raționale se vor găsi între dreptunghi și parabolă. Grinda cu tălpi paralele are avantajul că diagonalele au eforturi cu semne alternante numai pe regiunea centrală, dar are dezavantajul unor variații mari ale eforturilor în tălpi de la reazeme spre mijlocul grinzii și ale eforturilor mari în diagonalele de lîngă reazeme.

Grinda parabolică are avantajul că eforturile în tălpi sînt aproximativ constante (la talpa curbă cresc ușor de la centru către reazeme), dar are diagonalele cu eforturi de semne alternante pe toată deschiderea, care, deși mici în valoare în raport cu cele din tălpi, necesită alcătuirea lor astfel ca flambajul să fie împiedicat și au, de asemenea, dezavantajul obosirii mai repede a materialului.

În orice caz, ambele tipuri : grinda cu tălpi paralele și grinda parabolică sînt construcții raționale și de aici rezultă că și o soluție intermediară va fi o grindă rațională.

Astfel, dacă grinda se face cu o înălțime pe reazem și va avea forma unei parabole pentru una dintre tălpi (fig. 253), (grindă numită semiparabolică, la poduri), proprietățile ei vor fi intermediare între grinda cu tălpi paralele și grinda parabolică, adică eforturile în tălpi vor avea o variație mai mică decît la grinda cu tălpi paralele între reazeme și mijloc, iar diagonalele dinspre reazeme nu vor avea semne alternante.

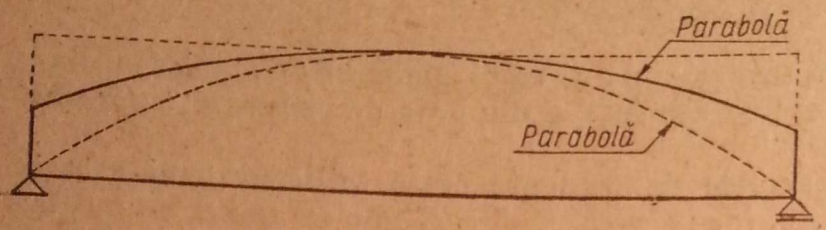


Fig. 253.

Concluziile pentru diagonale sînt valabile și pentru montanți, dar cu semn schimbat, deoarece din echilibrul unui nod de pe talpa dreaptă se vede că dacă se lasă la o parte sarcina locală din nod, rezultă:

$$V = -D \cdot \sin \varphi.$$

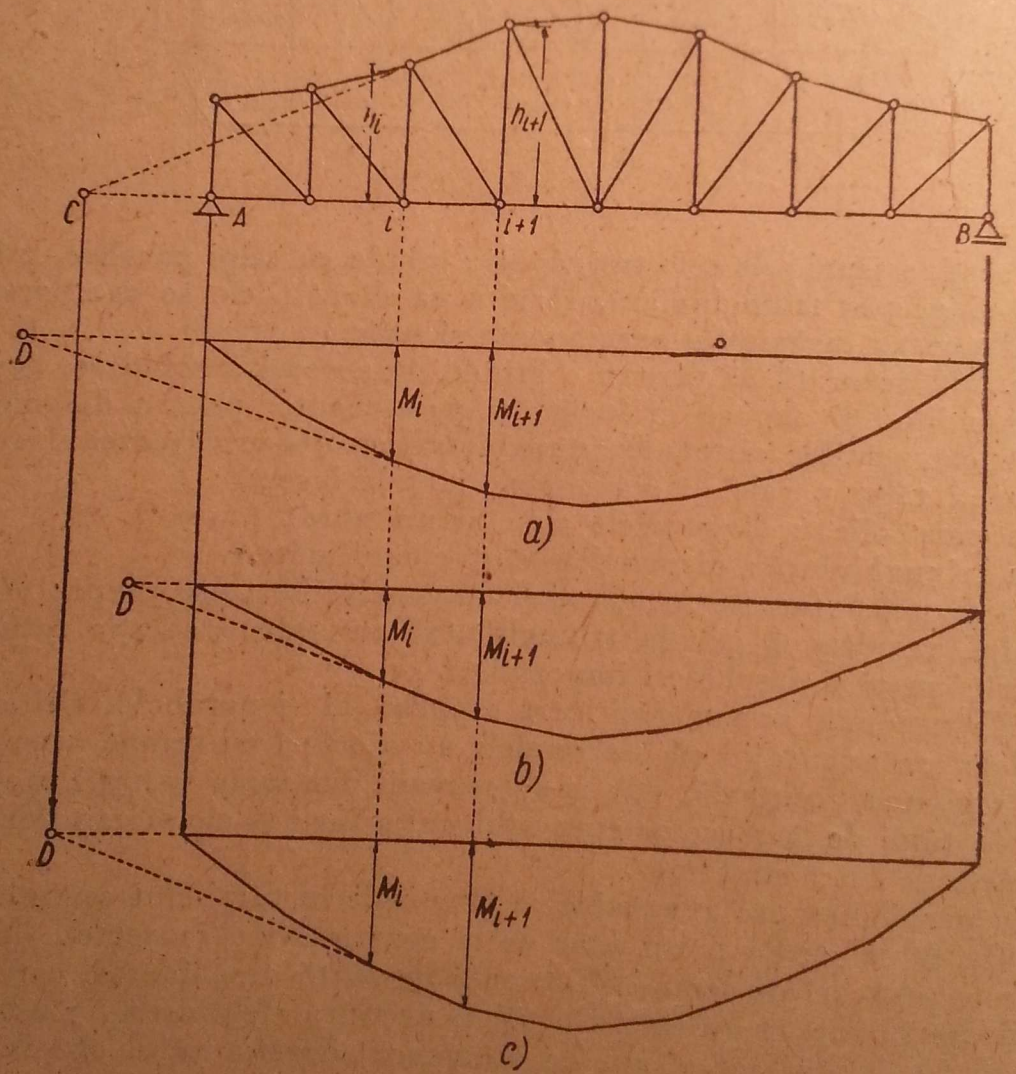


Fig. 254.

Expresia (4.40) dă indicații asupra semnului efortului din diagonală și la alte forme ale tălpilor.

În adevăr, indicații asupra semnului inegalității (4.40)

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} \gtrless \frac{h_{i+1}}{h_i}$$

dă poziția celor două puncte : C — unde se întîlnesc tălpile, și D — unde se întîlnește linia momentelor pe panou cu linia de reper (fig. 254).

Dacă punctul D se găsește la stînga lui C (fig. 254, *a*), atunci :

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} < \frac{h_{i+1}}{h_i} \quad \text{și} \quad D\cos\varphi < 0 ;$$

diagonala este comprimată.

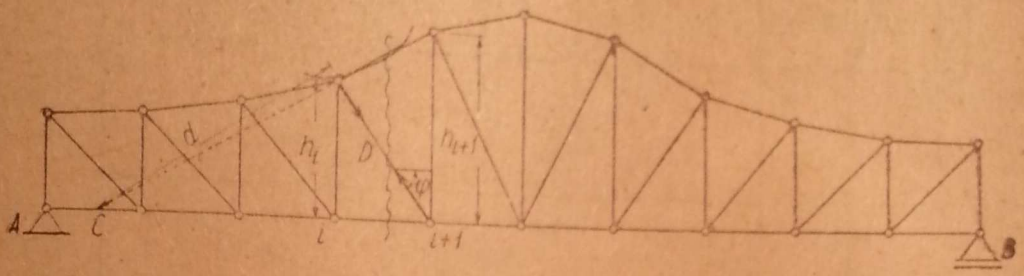


Fig. 255.

Dacă punctul D se găsește la dreapta lui C (fig. 254, *b*), atunci :

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} > \frac{h_{i+1}}{h_i} \quad \text{și} \quad D\cos\varphi > 0 ;$$

diagonala este întinsă.

Cînd punctele C și D se găsesc pe aceeași verticală, atunci :

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} = \frac{h_{i+1}}{h_i} \text{ (fig. 254, } c) \quad \text{și} \quad D\cos\varphi = 0 ;$$

diagonala nu are efort.

În unele cazuri se pot aprecia ușor pozițiile relative ale punctelor C și D, datorită faptului că pentru încărcări verticale de sus în jos, punctul D este totdeauna în afara reazemelor, putînd coincide cel mult cu unul dintre ele.

De aceea, cînd punctul C se găsește între reazeme, rezultă că efortul în diagonala respectivă își păstrează semnul pentru orice convoi dintre reazeme.

Astfel, în grinda din fig. 255 în care punctul C se găsește între panou și reazemul cel mai apropiat, rezultă, evident, că pentru orice încărcare în deschidere :

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} < \frac{h_{i+1}}{h_i} \quad \text{și} \quad D\cos\varphi < 0,$$

adică, diagonala descendentă este comprimată, oricare ar fi poziția sarcinilor în deschidere.

În cazul grinzii din fig. 256 (cu talpa concavă) în care punctul C se găsește între panou și reazemul cel mai depărtat, avem $\frac{h_{i+1}}{h_i} < 1$, iar cînd diagrama momentelor este ca în fig. 256, *a*,

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} > 1, \quad \text{deci} \quad \frac{M_{i+1}}{M_i} > \frac{h_{i+1}}{h_i},$$

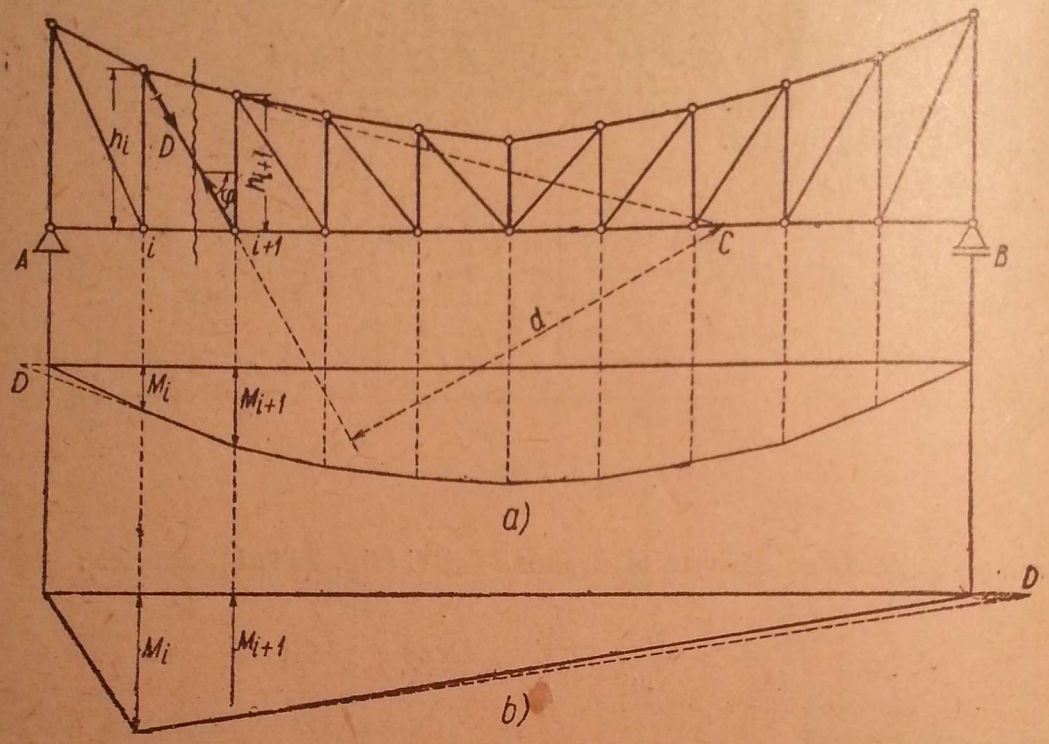


Fig. 256.

pe cînd dacă diagrama momentelor este ca în fig. 256, *b*, ambele rapoarte sînt subunitare, dar : $\frac{M_{i+1}}{M_i} > \frac{h_{i+1}}{h_i}$, deoarece punctul D este la dreapta lui B sau chiar în B.

În ambele cazuri, deci : $\frac{M_{i+1}}{M_i} > \frac{h_{i+1}}{h_i}$, de unde $D \cos \varphi > 0$, adică diagonala este întinsă oricare ar fi poziția sarcinilor în deschidere.

Aceste semne se pot justifica și direct, dacă se secționează panoul și se iau momentele părții din stînga în raport cu C.

În fig. 255 :

$$D \cdot d + M_c = 0, \text{ de unde } D = -\frac{M_c}{d},$$

iar în cazul din fig. 256 :

$$-D \cdot d + M_c = 0, \text{ de unde } D = +\frac{M_c}{d}.$$

Dar C fiind între reazeme, M_c este pozitiv, și deci diagonala D din fig. 255 este comprimată, pe cînd în fig. 256 este întinsă. Dacă diagonalele sînt ascendente către mijlocul grinzii, semnele se inversează.

CAPITOLUL V

ARCE (SISTEME CU ÎMPINGERI)

§ 29. CHESTIUNI GENERALE

Arcele sînt bare curbe plane supuse la forțe în planul lor. Reacțiunile din reazeme se găsesc, de asemenea, în planul curbei. Sarcinile fundamentale acționează în sens invers convexității curbei.

Caracteristic pentru arce, din punctul de vedere al solicitării, este faptul că eforturile axiale de compresiune sînt mai importante decît momentele încovoietoare și forțele tăietoare, spre deosebire de grinzi, unde eforturile importante sînt momentele încovoietoare.

Această influență predominantă a forței axiale este datorită formei arcului și sistemului de rezemare, care duce la reacțiuni cu componente orizontale, chiar numai la încărcări verticale. Aceste componente orizontale, sau puțin înclinate (după sistemul de axe de coordonate) se numesc împingeri, și de aceea arcele intră în categoria — numită uneori cu un termen mai general, — a sistemelor cu împingeri.

Din punctul de vedere al rezemării, arcele pot fi : cu două articulații (fig. 257, *a*), încastrate (fig. 257, *b*), cu trei articulații (fig. 257, *c*), cu o articulație și cu reazem simplu (fig. 257, *d*), cu tirant (fig. 257, *e* și *f*).

Primele două sînt static nedeterminate, cel cu două articulații (fig. 257, *a*) — odată static nedeterminat, iar cel încastrat (fig. 257, *b*) — de trei ori static nedeterminat. Arcul cu trei articulații (fig. 257, *c*) și arcul cu o articulație și cu un reazem simplu (fig. 257, *d*) sînt static determinate.

Arcul cu tirant este static determinat exterior (o articulație și un reazem simplu) dar poate fi static determinat (fig. 257, *f*) sau static nedeterminat (fig. 257, *e*) interior, după cum are sau nu o articulație intermediară.

Caracteristic arcului cu tirant este faptul că tirantul are rolul de a prelua componenta reacțiunii după direcția tirantului, astfel încît reazemele arcului se pot realiza ca reazemele unei grinzi drepte simplu rezemate.

În acest capitol se vor studia numai arcele static determinate și, în special, arcul cu trei articulații care este o formă folosită în construcții.

Arcul cu o articulație și un reazem simplu nu se realizează sub această formă în practică, dar este necesar să fie cunoscut ca o formă de bază pentru studiul arcelor static nedeterminate.

Nomenclatura obișnuită la arce es următoarea :

Secțiunile de la reazemele exterioare A și B se numesc nașterile arcului, iar dreapta $A-B$, linia naşterilor.

Punctul cel mai depărtat de linia nașterilor se numește cheia arcului. De obicei, la arcele cu trei articulații cheia arcului coincide cu a treia articulație din C.

Distanța verticală de la cheie pînă la linia nașterilor $A-B$ se numește săgeata arcului și se notează cu f. De obicei, la arcele cu trei articulații săgeata se măsoară din articulația interioară C.

Distanța orizontală dintre nașteri se numește deschiderea arcului și se notează cu l.

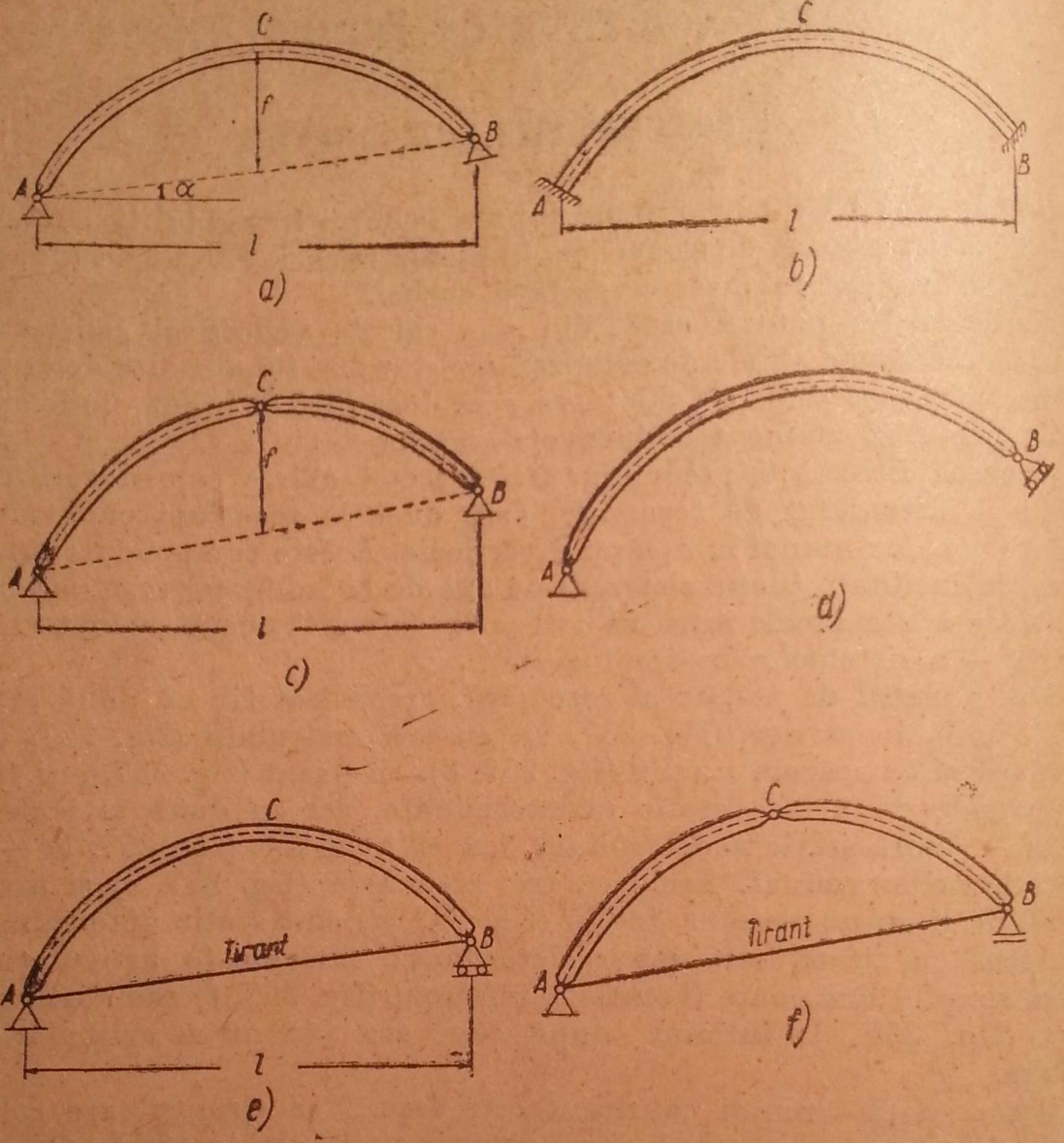


Fig. 257.

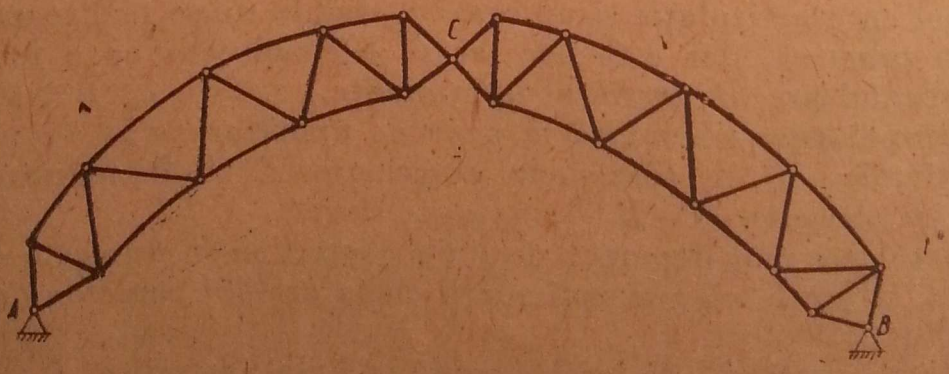


Fig. 258.

Raportul $\frac{f}{l}$ dintre săgeată și deschidere se numește pleoștirea arcului, iar inversul acestui raport : $\frac{l}{f}$ poate fi numit coeficient de îndrăzneală.

Fața exterioară a arcului (fața convexă) se numește extrados, iar fața interioară (fața concavă) — intrados.

Arce cu secțiune plină sînt cele în care materialul este distribuit continuu între extrados și intrados.

Arce cu zăbrele sînt cele în care extradosul este legat de intrados printr-un sistem de bare alcătuind o grindă cu zăbrele (fig. 258).

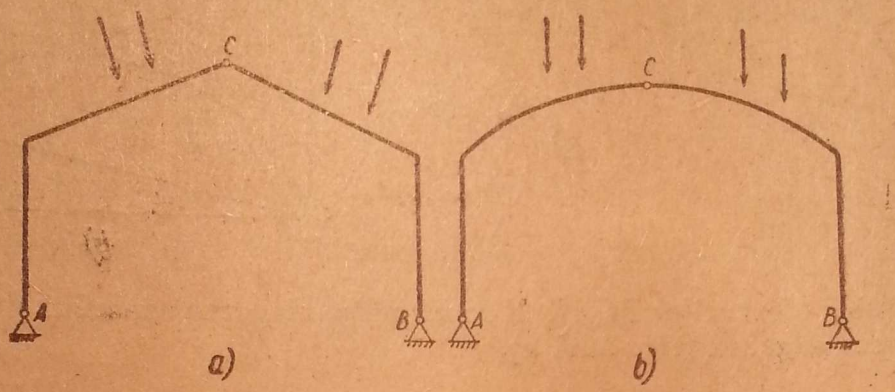


Fig. 259.

Arcele cu secțiune plină se vor raporta, pentru calcule, la axa lor, care este succesiunea centrelor de greutate ale secțiunilor transversale.

Cînd axa nu este o curbă continuă, ci este formată din drepte, sistemul se numește cadru și are comun cu arcul apariția împingerilor în reazeme, dar eforturile principale, cel puțin în unele bare, sînt momentele încovoietoare (fig. 259, *a*). Cînd unele bare sînt drepte, iar celelalte, curbe, astfel încît predomină solicitarea de încovoiere, sistemul se numește cadru cu bare curbe (fig. 259, *b*).

Sistemul de coordonate pentru arc se poate lua în diferite feluri.

Cel mai obișnuit și cu cele mai mari avantaje pentru calcule este acel în care o axă Ax' se ia după linia nașterilor, iar cealaltă axă — după verticala Ay care trece prin nașterea din stînga (fig. 260, *a*).

Coordonatele unui punct i de pe arc sînt : x, măsurată pe perpendiculara la Ay, și y, măsurată pe paralela la Ay de la punctul i pînă la linia nașterilor.

Uneori se folosește și y', distanța la Ax' măsurată pe perpendiculara pe această axă. Dacă axa Ax' (linia nașterilor) face cu orizontala unghiul α, rezultă :

$$y' = y \cos \alpha.$$

În cazul cînd $\alpha = 0$, $y' = y$.

Se poate lua ca sistem de axe și axa Ax — orizontală care trece prin A, și Ay — verticală (fig. 260, *b*), și atunci coordonatele unui punct i sînt x și y'', unde y'' se măsoară pînă la orizontala din A. Rezultă :

$$y'' = y + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Dacă $\alpha = 0$, rezultă :

$$y'' = y' = y.$$

Pentru calcule se va folosi însă sistemul cu axa Ax' după linia naşterilor, şi Ay — verticală.

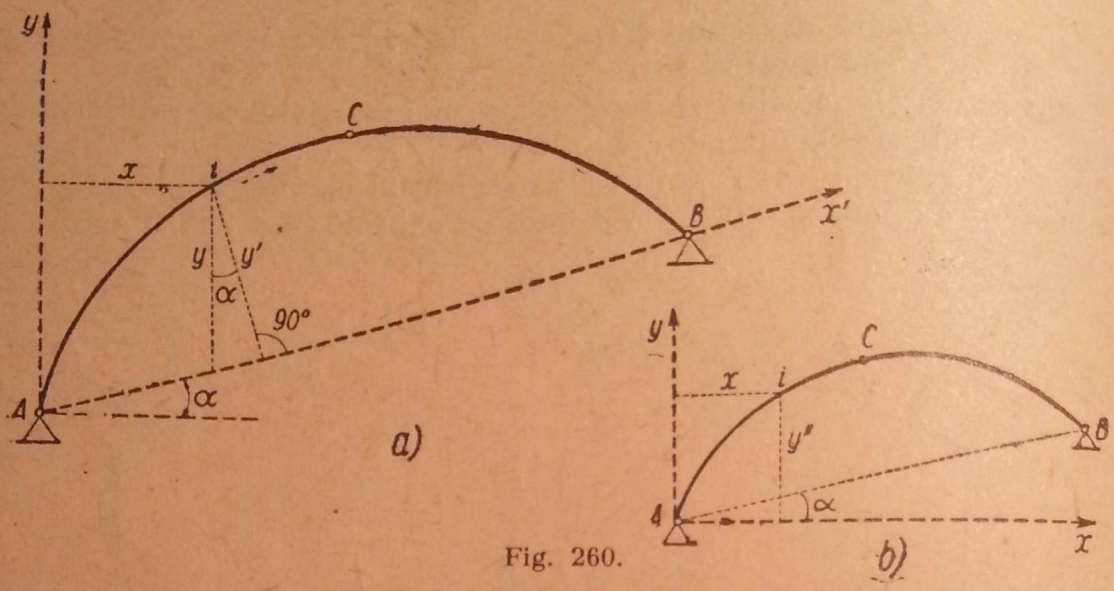
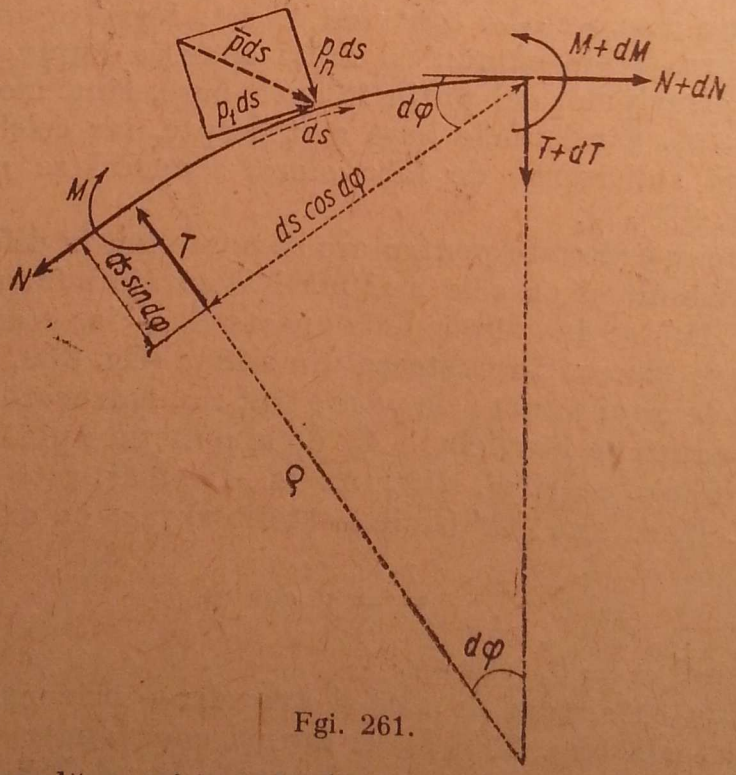


Fig. 260.

Semnele eforturilor M, N, T decurg din alegerea sensului de parcurgere indicat prin săgeată (fig. 260, *a*).

§ 30. RELAŢII DIFERENŢIALE

Dacă dintr-un arc se separă o porţiune foarte mică de lungime ds, pe care acţionează o sarcină presupusă uniform distribuită $\bar{p}$, descompusă după



Fgi. 261.

tangentă p_t şi normală p_n, şi în cele două secţiuni se pun eforturile corespunzătoare, aşa cum s-a procedat şi la bara dreaptă, din condiţiile de echilibru se obţin relaţiile diferenţiale între eforturi, încărcare şi elementele geometrice ale arcului (fig. 261).

Cele trei ecuații de echilibru sînt : proiecțiile pe tangenta și pe normala feței din dreapta și momentele în raport cu centrul de greutate al aceleiași fețe :

$$N + dN - N\cos d\varphi - T\sin d\varphi + p_t\,ds\cos\frac{d\varphi}{2} + p_n\,ds\sin\frac{d\varphi}{2} = 0;$$

$$T + dT - T\cos d\varphi + N\sin d\varphi + p_n\,ds\cos\frac{d\varphi}{2} - p_t\,ds\sin\frac{d\varphi}{2} = 0;$$

$$M - M - dM + T\,ds\cos d\varphi - N\,ds\sin d\varphi - p_n\,ds\frac{ds}{2}\cos\frac{d\varphi}{2} +$$

$$+ p_t\,ds\frac{ds}{2}\sin\frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Dacă se ține seamă că $\sin d\varphi \simeq d\varphi$, $\cos d\varphi \simeq 1$, $d\varphi = \frac{ds}{\rho}$, unde ρ este raza de curbură, și dacă se neglijează infiniții mici de ordin superior, rezultă :

$$dN - T\frac{ds}{\rho} + p_t\,ds = 0;$$

$$dT + N\frac{ds}{\rho} + p_n\,ds = 0;$$

$$-dM + T\cdot ds = 0,$$

sau

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{ds} &= -p_t + \frac{T}{\rho}\\ \frac{dT}{ds} &= -p_n - \frac{N}{\rho}\\ \frac{dM}{ds} &= T.\end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Relațiile (5.1) sînt analoge cu cele de la grinzile drepte (3.1), dar mai generale. Dacă în (5.1) se face $\rho = \infty$, se obțin relațiile (3.1) de la barele drepte.

Rezultă că și la arce momentul încovoietor va fi maxim, sau minim acolo unde se anulează forța tăietoare, dar aceasta este mai greu de folosit la arce, deoarece direcția lui T se schimbă odată cu secțiunea și nu este totdeauna ușor de găsit cum variază T și unde se anulează.

În cazul cînd pe o porțiune de arc nu sînt încărcări, adică $p_t = p_n = 0$, primele două relații din (5.1) devin :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{ds} &= \frac{T}{\rho}\\ \frac{dT}{ds} &= -\frac{N}{\rho}\end{aligned}\right\} \qquad (5.1')$$

care pot da o indicație asupra corespondenței dintre cele două diagrame pe aceste intervale, în special cînd ρ este constant sau variază puțin în același interval.

Observații.

1. Relațiile (5.1) ca și (5.1′) sînt valabile, la fel ca la bare drepte, indiferent dacă arcul este static determinat sau static nedeterminat.

2. În relațiile (5.1) s-a presupus că sarcina $\overline{p}$ se aplică pe axa arcului. Dacă această sarcină se aplică cu excentricitatea e față de axă, atunci a treia relație din (5.1) se modifică, la fel ca la grinzile drepte, devenind :

$$\frac{dM}{ds} = T + p_t \cdot e. \tag{5.1''}$$

§ 31. ARCUL CU TREI ARTICULAȚII. ÎNCĂRCĂRI FIXE

A. REACȚIUNI ȘI EFORTURI PE CALE ANALITICĂ

a) Încărcări oarecare

În cele două articulații de la nașteri A și B se descompun reacțiunile R_A și R_B după direcția $A - B$ a liniei nașterilor și după verticală. Componentele lui R_A sînt H_A' și V_A', iar ale lui R_B : H_B' și V_B' (fig. 262, a).

Exprimînd condițiile de echilibru al sistemului în ansamblu prin ecuațiile de momente în raport cu B și A și prin ecuația de proiecție pe orizontală, se obține :

$$V_A' = \frac{\sum_1^n P_i\, b_i}{l};$$

$$V_B' = \frac{\sum_1^n P_i\, a_i}{l}; \tag{5.2}$$

$$(H_A' - H_B') \cos \alpha + \sum_1^n P_i \sin \gamma_i = 0.$$

Primele două relații dau direct valorile lui V_A' și V_B', exact ca la o grindă dreaptă $A - B$, iar cea de a treia — o relație între H_A', H_B' și sarcinile de pe arc.

A patra ecuație se obține izolînd corpurile prin desfacerea legăturii din C și exprimînd condițiile de echilibru al corpului $A - C$ (fig. 262, b).

Deoarece nu se urmărește determinarea în mod special a reacțiunilor din articulația interioară C, ecuația care se folosește este ecuația de momente în raport cu C :

$$V_A' \cdot x_C - \sum_1^m P_i\, c_i - H_A' \cdot f' = 0.$$

Această a patra ecuație determină pe H_A', deoarece V_A este cunoscută din (5.2). Ea este identică cu cea care s-ar fi obținut dacă s-ar fi exprimat că momentul încovoietor în articulația C a arcului în ansamblu este nul.

Dacă se notează :

$$M_{C\,st}^0 = V_A' \cdot x_C - \sum_1^m P_i\, c_i, \tag{5.3}$$

în care $M^0_{C\,st}$ înseamnă momentul în raport cu C al tuturor forțelor de la stînga articulației C (cu excepția lui H_A'), se obține :

$$H_A' = \frac{M^0_{C\,st}}{f'}, \tag{5.4}$$

iar din a treia ecuație a grupului (5.2) se obține și H_B'.

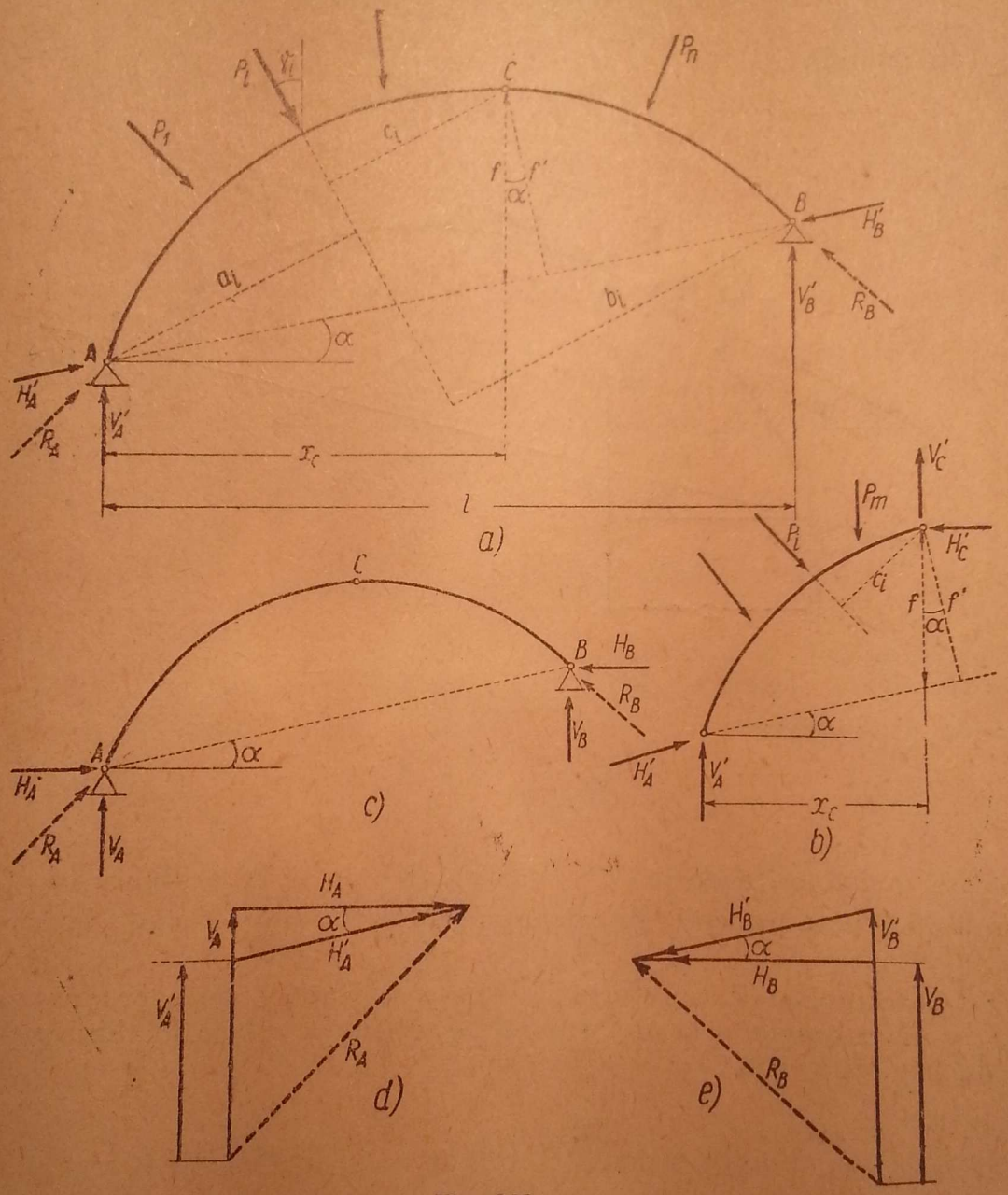


Fig. 262.

Dacă s-ar fi descompus reacțiunea R_A în V_A și H_A, unde H_A este orizontală, și, de asemenea, R_B în V_B și H_B (fig. 262, *c*), ecuațiile de momente în raport cu A și B nu ar fi eliminat pe H_A și H_B. În aceasta constă un avantaj al alegerii liniei nașterilor și verticalei ca sistem de axe de coordonate.

Din fig. 262, *d* și *e* rezultă relațiile dintre reacțiunile din primul sistem (H_A', V_A', H_B', V_B') și cele din al doilea sistem (H_A, V_A, H_B, V_B):

$$\begin{aligned} H_A &= H_A' \cos \alpha; \\ V_A &= V_A' + H_A' \sin \alpha = V_A' + H_A \operatorname{tg} \alpha; \\ H_B &= H_B' \cos \alpha; \\ V_B &= V_B' - H_B' \sin \alpha = V_B' - H_B \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Din relațiile:

$$H_A' = \frac{H_A}{\cos \alpha} \quad \text{și} \quad f' = f \cos \alpha,$$

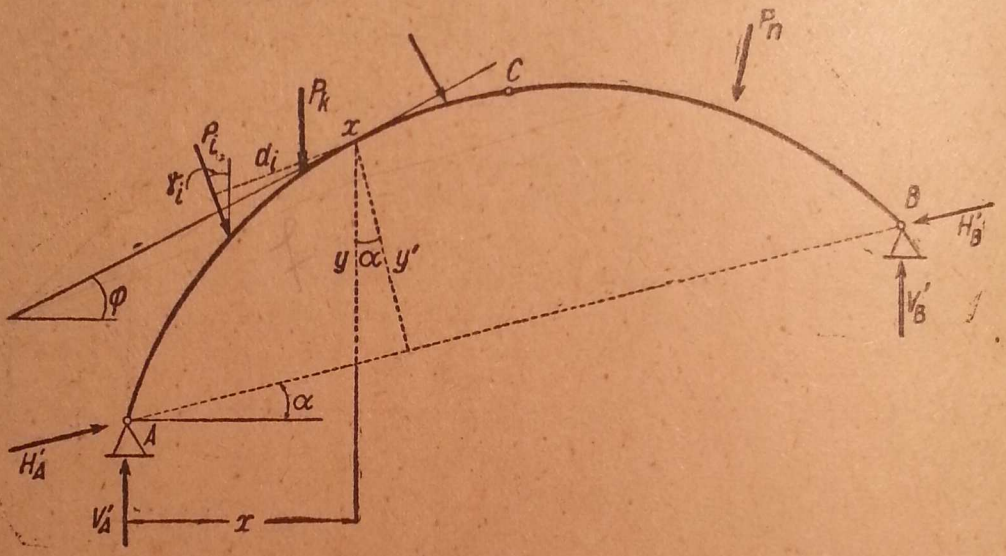


Fig. 263.

expresia (5.4) devine:

$$H_A = \frac{M_{C\,st}^0}{f}, \tag{5.6}$$

care este mai folosită decît (5.4), dar nu trebuie să se neglijeze că H_A din formula (5.6) este proiecția pe orizontală a lui H_A' din sistemul de reacțiuni V_A', H_A'.

Cu reacțiunile aflate, eforturile într-o secțiune x de coordonate x, y', sau x, y unde tangenta la axa arcului în secțiunea x face unghiul φ cu orizontala (fig. 263) sînt:

$$N_x = -V_A' \sin \varphi + \sum_1^k P_i \sin (\varphi - \gamma_i) - H_A' \cos (\varphi - \alpha); \tag{5.7}$$

$$T_x = V_A' \cos \varphi - \sum_1^k P_i \cos (\varphi - \gamma_i) - H_A' \sin (\varphi - \alpha);$$

$$M_x = V_A' \cdot x - \sum_1^k P_i d_i - H_A' y',$$

care, dacă se ține seamă că :

$$H_A' = \frac{H_A}{\cos \alpha} \quad \text{și} \quad y' = y \cos \alpha,$$

se mai exprimă și în felul următor :

$$N_x = -\left[V_A' \sin \varphi - \sum_1^k P_i \sin (\varphi - \gamma_i)\right] - H_A \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha};$$

$$T_x = \left[V_A' \cos \varphi - \sum_1^k P_i \cos (\varphi - \gamma_i)\right] - H_A \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}; \qquad (5.8)$$

$$M_x = \left[V_A' \cdot x - \sum_1^k P_i d_i\right] - H_A y.$$

b) Încărcări verticale (fig. 264)

Pentru sarcini verticale expresiile reacțiunilor și, în special, ale eforturilor se simplifică și capătă interpretări ușor de reținut.

Din ecuația de proiecție pe orizontală rezultă $H_A' = H_B' = H'$ și, evident, și $H_A = H_B = H$, cu relația $H = H' \cos \alpha$.

Expresia (5.3) devine :

$$M^0_{C\,st} = M^0_{C\,dr} = M^0_C = V_A' \cdot x_C - \sum_1^m P_i (x_C - a_i), \qquad (5.9)$$

adică M^0_C este momentul încovoietor în secțiunea C a unei grinzi simplu rezemate de deschidere l încărcată cu sarcinile verticale P_i (fig. 264, *a*).

Reacțiunile sînt :

$$V_A' = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l};$$

$$V_B' = \frac{\sum_1^n P_i a_i}{l}; \qquad (5.10)$$

$$H' = \frac{M^0_C}{f'} \quad \text{sau} \quad H = \frac{M^0_C}{f}.$$

Expresiile (5.10) arată că V_A' și V_B' sînt reacțiunile verticale ale unei grinzi simplu rezemate de deschidere l încărcată cu sistemul de sarcini verticale dat (fig. 264, *a*), iar împingerea H', respectiv H, se deduce împărțind momentul încovoietor în secțiunea C a aceleiași grinzi simplu rezemate prin săgeata f' măsurată normal pe linia nașterilor, respectiv, săgeata f măsurată vertical.

De aici rezultă că reacțiunile nu depind de forma arcului, ci numai de încărcări, de deschidere și de poziția articulației C față de linia nașterilor.

Eforturile într-o secțiune x în cazul încărcărilor verticale sînt:

$$N_x = -(V_A' - \sum_1^k P_i)\sin\varphi - H'\cos(\varphi-\alpha) =$$

$$= -\left(V_A' - \sum_1^k P_i\right)\sin\varphi - H\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha};$$

$$T_x = \left(V_A' - \sum_1^k P_i\right)\cos\varphi - H'\sin(\varphi-\alpha) =$$

$$= \left(V_A' - \sum_1^k P_i\right)\cos\varphi - H\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}; \tag{5.11}$$

$$M_x = \left[V_A' \cdot x - \sum_1^k P_i(x-a_i)\right] - H'y' = \left[V_A' \cdot x - \sum_1^k P_i(x-a_i)\right] - H\cdot y.$$

Dacă se notează:

$$T_x^0 = V_A' - \sum_1^k P_i,$$

$$M_x^0 = V_A' \cdot x - \sum_1^k P_i(x-a_i), \tag{5.12}$$

în care T_x^0 și M_x^0 reprezintă forța tăietoare și momentul încovoietor în secțiunea x a grinzii simplu rezemate orizontale de deschidere l încărcată cu sistemul de sarcini verticale dat (fig. 264, *a*), atunci ecuațiile (5.11) se pot scrie prescurtat:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= -T_x^0\sin\varphi - H'\cos(\varphi-\alpha) = -T_x^0\sin\varphi - H\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha};\\ T_x &= T_x^0\cos\varphi - H'\sin(\varphi-\alpha) = T_x^0\cos\varphi - H\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha};\\ M_x &= M_x^0 - H'\cdot y' = M_x^0 - H\cdot y. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Primele două relații (5.13) se memorează ușor dacă se construiesc fig. 264, *b* și *c*, care arată că N_x și T_x sînt suma proiecțiilor pe tangentă și pe normala la arc, în secțiunea x, ale lui T_x^0 și H'.

Ultima relație din (5.13) arată că momentele încovoietoare într-un arc supus la încărcări verticale se obțin din momentele încovoietoare de pe grinda simplu rezemată, din care se scad momentele date de împingerea arcului.

În cazul particular, cu mare aplicație practică, cînd nașterile A și B sînt pe o orizontală ($\alpha = 0$), (fig. 265), rezultă:

$$H' = H;\quad V_A' = V_A;\quad V_B' = V_B;\quad f = f';\quad y = y',$$

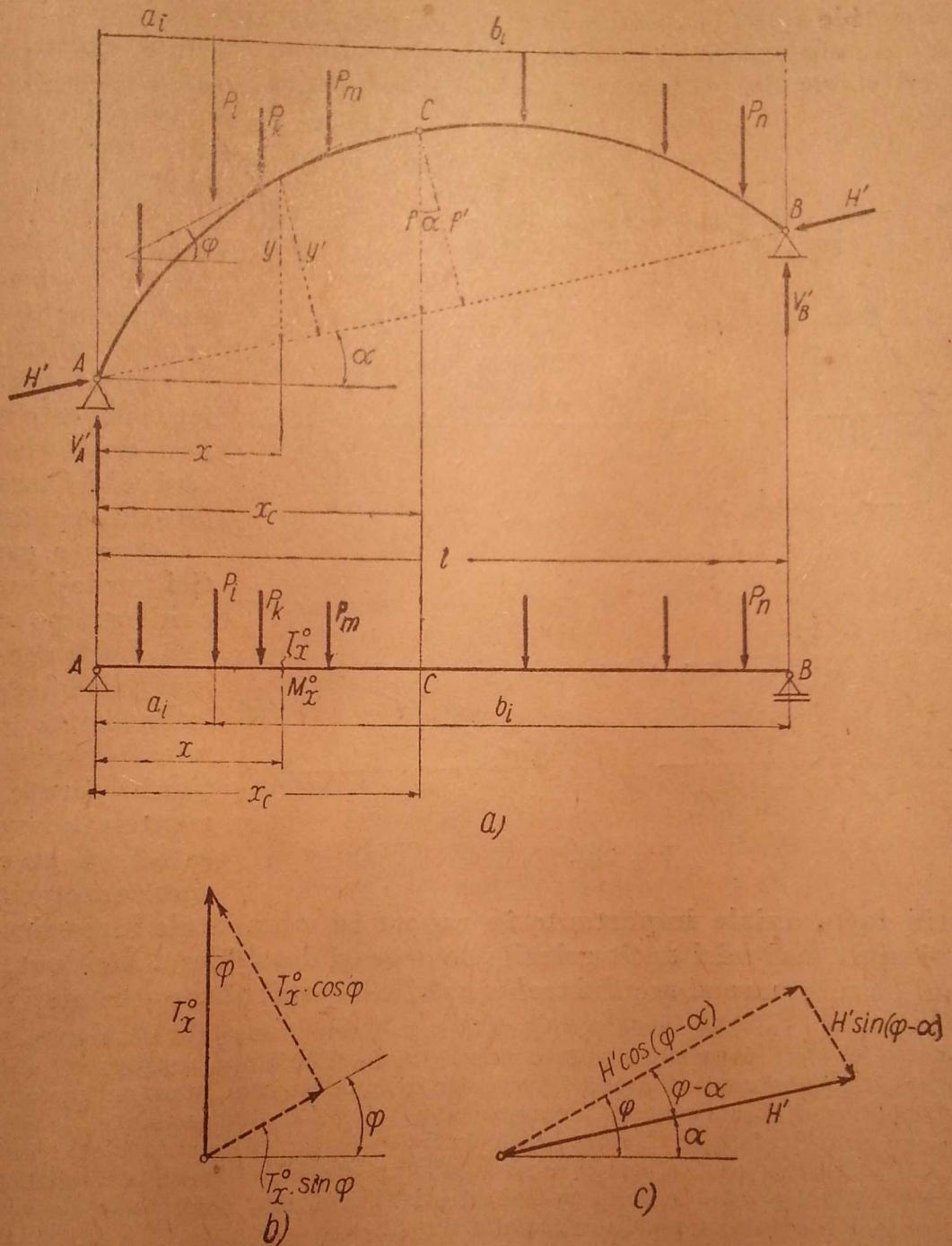


Fig. 264.

și formulele (5.13) devin :

$$\begin{aligned} N_x &= -T_x^0 \sin\varphi - H\cos\varphi; \\ T_x &= T_x^0 \cos\varphi - H\sin\varphi; \\ M_x &= M_x^0 - H\cdot y. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Relațiile (5.14) urmărite în fig. 265 pun în evidență ordinul de importanță al eforturilor din arc față de eforturile din grinzi.

Astfel, rezultă că forța axială N_x are valori importante și este negativă (compresiune), deoarece ambii termeni sînt negativi.

Forța tăietoare T_x este mai mică decît la grindă, deoarece cei doi termeni sînt de semne contrarii.

Momentul încovoietor M_x este mult mai mic decît la grindă, căci cei doi termeni sînt de semne contrarii.

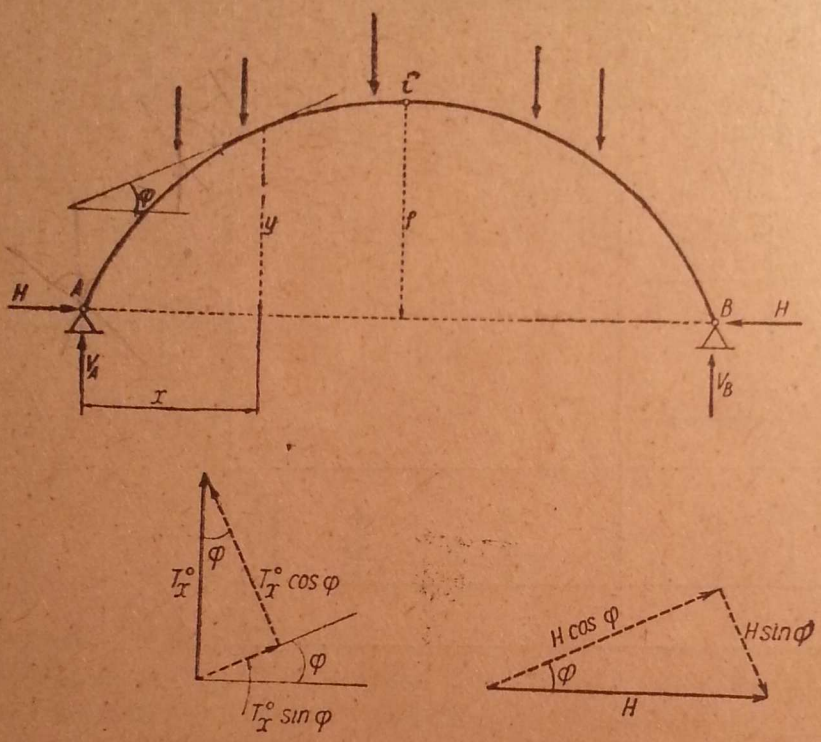


Fig. 265.

Aceste caracteristici vor ieși mai clar în evidență pe cale grafică. La dimensionarea unei bare forțele axiale necesită secțiuni mici în raport cu secțiunile cerute de momentele încovoietoare, astfel că arcele, care sînt caracterizate tocmai prin forțe axiale importante în raport cu momentele încovoietoare, au secțiuni mult mai mici decît grinzile de aceeași deschidere. Evident, însă, că sistemul de rezemare al arcului trebuie să fie capabil să suporte împingerea H;

Observație. Formulele (5.8) și (5.13), ca și cele deduse din ele, conțin două părți: prima parte, cu efect de grindă simplu rezemată, în care intră numai articulațiile din A și B, H'. Cînd împingerea H este cunoscută, formulele (5.8) și (5.13) rămîn valabile, indiferent dacă arcul are sau nu articulație în C. Deci, aceste formule se aplică și la arcul static nedeterminat cu două articulații. La acestea însă H se va determina din condiția de deformație (condiție de echilibru elastic), pe cînd la arcul cu trei articulații H a fost determinat din condiția statică de moment încovoietor nul în articulația din C.

B. REACȚIUNI ȘI EFORTURU PE CALE GRAFICĂ

a) Încărcări oarecare

Se folosesc poligonul de forțe și poligonul funicular.

Se va considera întîi cazul cînd numai una dintre cele două părți $A - C$ și $C - B$ ale arcului este încărcată (fig. 266). În acest caz, partea neîncărcată $C - B$ este o bară articulată la ambele capete și fără nici o forță între

articulații, deci reacțiunile ei de la capete trebuie să fie dirijate după direcția liniei articulațiilor B și C. Rezultanta R a forțelor care acționează pe partea $A - C$ aflată cu ajutorul unui poligon de forțe și al unui poligon funicular, împreună cu reacțiunile din B și A trebuie să fie în echilibru, deci reacțiunea din A va trece prin intersecția D a dreptei $B - C$ cu R. În poligonul forțelor se duc prin originea și extremitatea lui R paralele la direcțiile AD și BCD și, închizînd poligonul, se determină mărimea și sensul reacțiunilor R_A și R_B.

Trecînd acum la arcul încărcat pe ambele părți, se observă că acest caz poate fi adus la cazul precedent, făcînd întîi construcția de mai sus pentru încărcarea numai de pe o parte, CB, apoi alta, pentru încărcarea numai de pe partea AC, și compunînd reacțiunile găsite în A și B de fiecare dată, se obțin reacțiunile totale.

În fig. 267, R' este rezultanta grupului de forțe dintre A și C, iar R'' — rezultanta grupului de forțe dintre C și B, obținute cu două poligoane funiculare ajutătoare.

R' și direcția BC a lui R'_B determină punctul pe unde trece R'_A, iar în poligonul forțelor se obțin cele două reacțiuni R'_A și R'_B provocate de R'.

Apoi R'' și direcția AC a lui R''_A determină punctul pe unde trece R''_B. În poligonul forțelor sînt aflate R''_A și R''_B. R'_A și R'_B în poligonul forțelor se întîlnesc în O', iar R''_A și R''_B — în O''.

Reacțiunea totală R_A va fi rezultanta lui R'_A cu R''_A, iar R_B — rezultanta lui R'_B cu R''_B.

În poligonul forțelor această compunere se face ușor ducîndu-se din O' paralela la R''_A, și din O'' — paralela la R'_B. Aceste paralele se întîlnesc în O, completînd un paralelogram. Unind O cu originea poligonului forțelor se obține R_A, și unind pe O cu extremitatea poligonului forțelor se obține R_B.

Dacă din O ca pol, se duc razele polare corespunzătoare forțelor date P_1, P_2, etc., și apoi se construiește poligonul funicular $0'$, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ începînd din A, el va trece cu latura $3'$ prin C, și cu ultima latură $5'$ — prin B.

Poligonul forțelor cu polul în O și poligonul funicular corespunzător dau toate elementele pentru a determina reacțiunile și eforturile din orice secțiune a arcului.

Înainte de a analiza eforturile, se mai indică o construcție grafică în cazul forțelor oarecare, așa cum se vede în fig. 268.

Grupul de forțe dintre A și C, împreună cu reacțiunile din A și C sînt în echilibru. Reacțiunile din A și C sînt date de un poligon funicular care trebuie să treacă prin A și C. Avem o infinitate de astfel de poligoane, însă toate au polii pe o dreaptă paralelă cu AC. La fel, reacțiunile din C și B pentru grupul de forțe respectiv sînt date de un poligon funicular care trece prin C și B. Toate soluțiile acestor poligoane au polii pe o dreaptă paralelă cu BC. Dar reacțiunea din C trebuie să fie aceeași în ambele sisteme (aceeași direcție, aceeași mărime, sens contrar), deci laturile de poligon funicular din ambele sisteme care trec prin C trebuie să se suprapună, iar raza polară respectivă să aibă aceeași mărime, adică, în realitate, trebuie să existe un singur poligon funicular care trece prin cele trei puncte A, C și B. Se știe că dacă punctele A, C și B nu sînt în linie dreaptă, rezultă un singur poligon funicular care trece prin cele trei puncte, și polul său este determinat de intersecția celor două drepte pe care se găsesc polii grupurilor AC și BC.

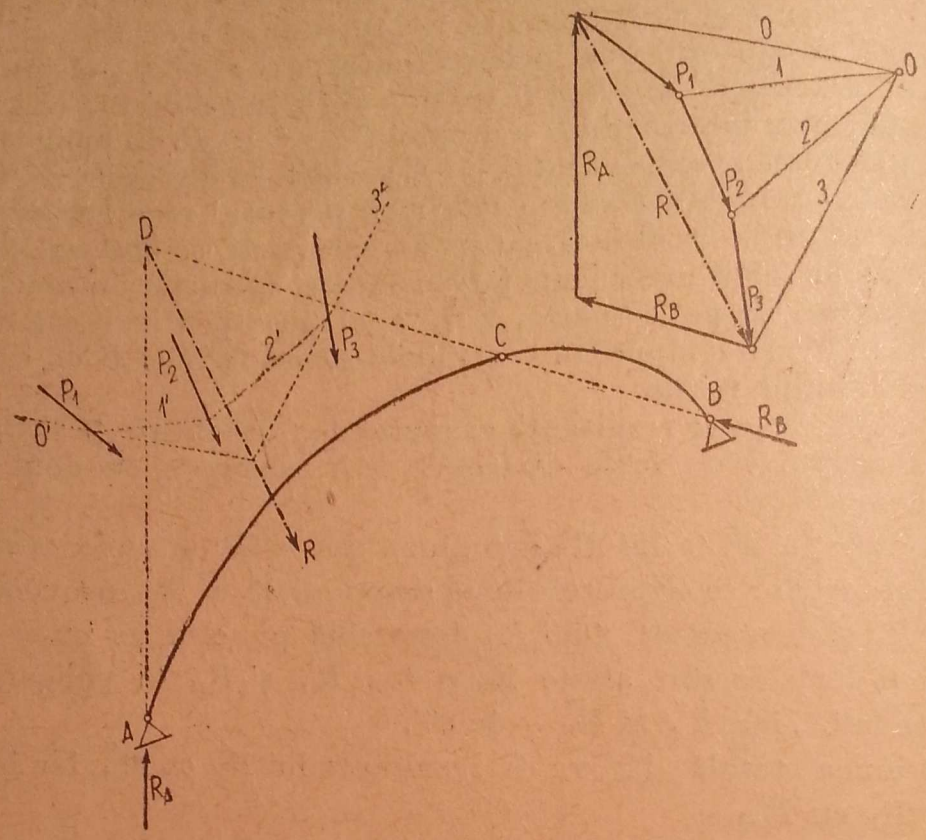


Fig. 266.

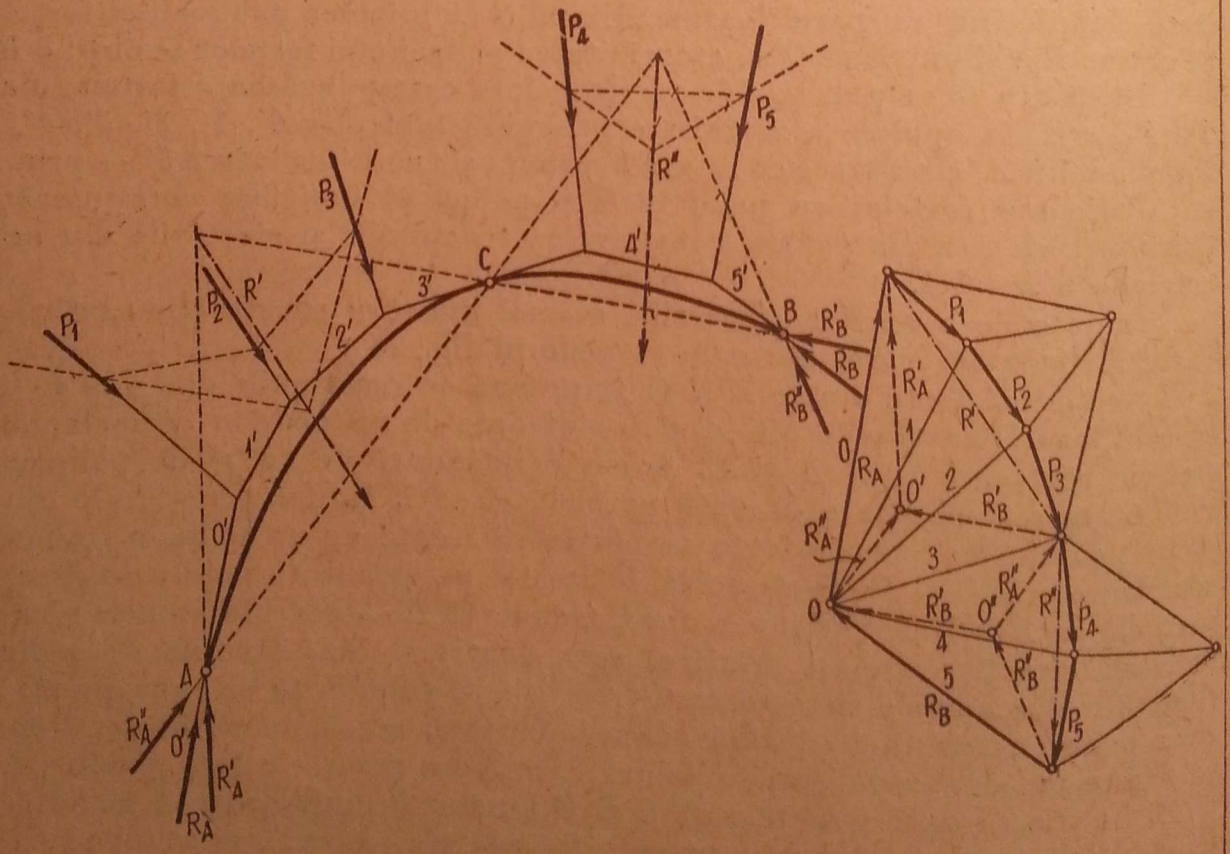


Fig. 267.

În fig. 268 este reprezentată această construcție. Cu doi poli ajutători O_1 și O_2 se determină rezultantele parțiale R' și R''.

Se ia un punct E pe rezultanta R' și se unește cu A și C, iar în poligonul forțelor se duc paralelele respective determinîndu-se polul O' prin care se duce dreapta Δ' paralelă cu AC; pe această dreaptă se găsesc polii tuturor poligoanelor funiculare care trec prin A și C, corespunzătoare forțelor dintre

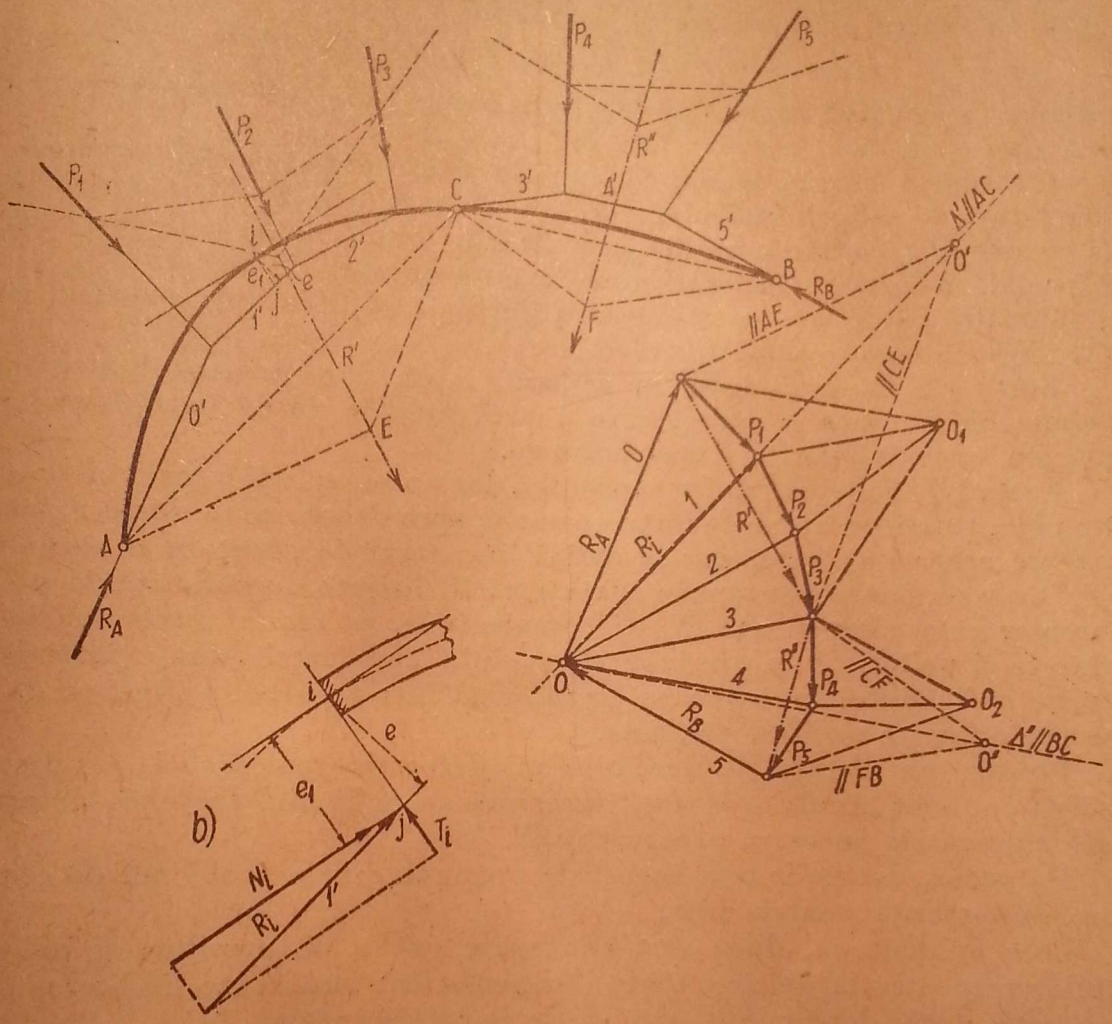


Fig. 268.

A și C. La fel se determină polul O'' și dreapta Δ'' paralelă cu BC pentru grupul de forțe dintre B și C. Cele două drepte Δ' și Δ'' se întîlnesc în O, care este polul poligonului funicular ce trece prin cele trei puncte A, C și B.

Din acest pol se duc razele polare *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* corespunzătoare forțelor date și se începe poligonul funicular din punctul A. El trebuie să treacă cu latura $3'$ prin C, și cu $5'$ — prin B.

Reacțiunile din A și B sînt determinate de razele polare *0* și *5*.

Eforturile într-o secțiune i se determină astfel: se știe că pe fața din dreapta a acestei secțiuni eforturile sînt determinate de rezultanta forțelor din stînga secțiunii; or, din poligonul forțelor și poligonul funicular se cunosc atît rezultanta, cît și poziția ei.

Astfel, secțiunea i găsindu-se între forțele P_1 și P_2, rezultanta grupului de forțe exterioare (forțe date și reacțiuni) din stînga este $\bar{R}_i = \bar{R}_A + \ldots$ dată în mărime, direcție și sens de raza polară 1, iar poziția ei este dată de latura $1'$ a poligonului funicular.

Dacă se descompune această forță $\bar{R}_i$ după tangenta și normala în i (fig. 268, b), se găsesc forța axială N_i și forța tăietoare T_i.

Momentul încovoietor se află luînd momentul acestei rezultante în raport cu centrul de greutate al secțiunii :

$$M_i = R_i \cdot e = N_i \cdot e_1 \quad \text{(în valoare absolută)},$$

în care e se măsoară normal pe latura de poligon funicular $1'$, iar e_1 — după normala la curbă.

Trebuie să se țină seamă că punctul j este punctul unde normala din i taie latura de poligon funicular, corespunzătoare forțelor din stînga secțiunii, așa că uneori j apare pe prelungirea laturii respective de poligon funicular, în special, la forțe cu înclinări mari față de normala la curbă.

Rezultă că R_i are componenta principală N_i după tangenta la curbă și că N_i este compresiune (intră în corp).

Forța tăietoare T_i este, în general, mică, iar momentul încovoietor depinde de distanța e sau e_1, care poartă numele de excentricitate ; e_1 se numește excentricitatea forței normale.

Forța N_i care are direcția tangentei, dar nu se aplică în centrul de greutate al secțiunii, se numește forța normală, spre deosebire de forța axială N_i, care are aceeași valoare, dar se aplică în centrul de greutate al secțiunii i.

Deoarece componenta principală a lui R_i dirijată după latura de poligon funicular este componenta N_i de compresiune, poligonul funicular se mai numește și poligonul de presiune al arcului. Cînd forțele sînt repartizate, și laturile poligonului funicular se transformă într-o curbă, poligonul de presiune se numește *curbă de presiune*.

Pentru un sistem de sarcini dat, determinarea curbei de presiune rezolvă complet arcul, deoarece, împreună cu poligonul forțelor, determină toate elementele necesare pentru calcul.

De aceea, determinarea curbei de presiune este o problemă de cea mai mare importanță pentru arce.

Este evident că, dacă sînt cunoscute curba de presiune și poligonul forțelor respectiv la un arc, toate eforturile sînt cunoscute, indiferent dacă arcul este static determinat, sau static nedeterminat.

La arcele cu trei articulații, curba de presiune se determină prin cunoașterea a trei puncte (cele trei articulații) pe unde trebuie să treacă curba.

La arcele static nedeterminate unde se cunosc numai două puncte (la arcul cu două articulații), sau nu se cunoaște apriori nici un punct (arcul încastrat), prin condiții de deformații se obțin punctele pe unde trebuie să treacă curba de presiune.

În privința semnelor momentelor încovoietoare, se observă din fig. 268, b că atunci cînd curba de presiune se găsește dedesubtul axei arcului, momentul încovoietor este negativ, adică provoacă întinderi în zona de sus a secțiunii, și compresiuni în zona de jos. Invers, în secțiunile în care curba de presiune trece deasupra axei arcului, momentele încovoietoare sînt pozitive, adică provoacă întinderi jos și compresiuni sus.

Mai simplă de reținut este observația : curba de presiune apare pe partea zonei comprimate a secțiunii.

b) Încăreări verticale. Forțe paralele

În cazul sarcinilor verticale se pot aplica soluțiile grafice pentru determinarea poligonului de presiune (a poligonului funicular prin cele trei articulații) folosite în fig. 267 și 268, valabile pentru orice fel de sarcini.

Se indică încă o construcție grafică aplicabilă în cazul sarcinilor verticale (sau, mai general, în cazul cînd toate forțele sînt paralele), care are avantajul că toate construcțiile ajutătoare se pot depărta de arc (fig. 269).

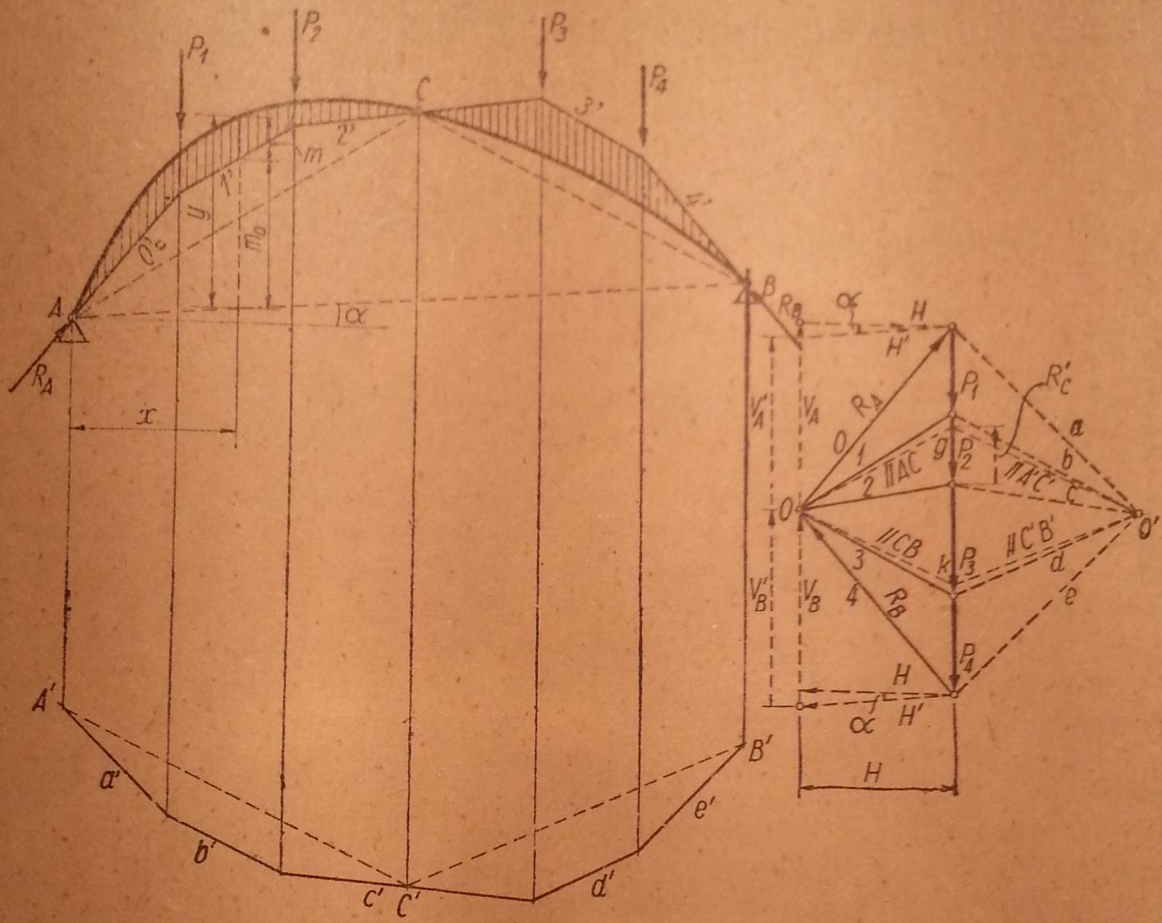


Fig. 269.

Cu un pol oarecare O' se construiește poligonul tuturor forțelor date și poligonul funicular respectiv (a', b', c', d', e').

Rezultanta R' a forțelor dintre A și C (nefigurată în desen) se descompune în componentele verticale din A și C. Acestea se obțin dacă se duce linia de închidere $A'C'$; ducînd apoi din O' paralela la ea, rezultă valoarea R'_c. Dar această componentă nu depinde de poziția polului O'; ea trebuie să aibă aceeași valoare și pentru un poligon funicular care ar trece prin A și C și care ar avea, deci, ca linie de închidere dreapta AC. Deoarece mărimea componentelor din A și C se cunoaște, fiind determinate de punctul g, înseamnă că polul acestui poligon funicular se va găsi pe paralela din g la AC.

Se repetă raționamentul pentru partea din dreapta (CB) și se obține dreapta din k paralelă cu BC.

Polul O al poligonului funicular care trece prin cele trei puncte se va găsi la intersecția celor două drepte.

Se duc din acest pol razele polare $0, 1, 2, 3, 4$ și se construiește poligonul funicular $0', 1', 2', 3', 4'$ care, început dintr-unul din punctele A, B sau C, trebuie să treacă și prin celelalte două.

Prima și ultima rază polară sînt chiar reacțiunile R_A și R_B. Dacă se descompun după verticală și linia nașterilor, se obțin V_A, V_B și H', iar dacă se descompun după orizontală și verticală se obțin V_A, V_B și H, cum se vede în figură.

Reiese că H este distanța polară a poligonului funicular.

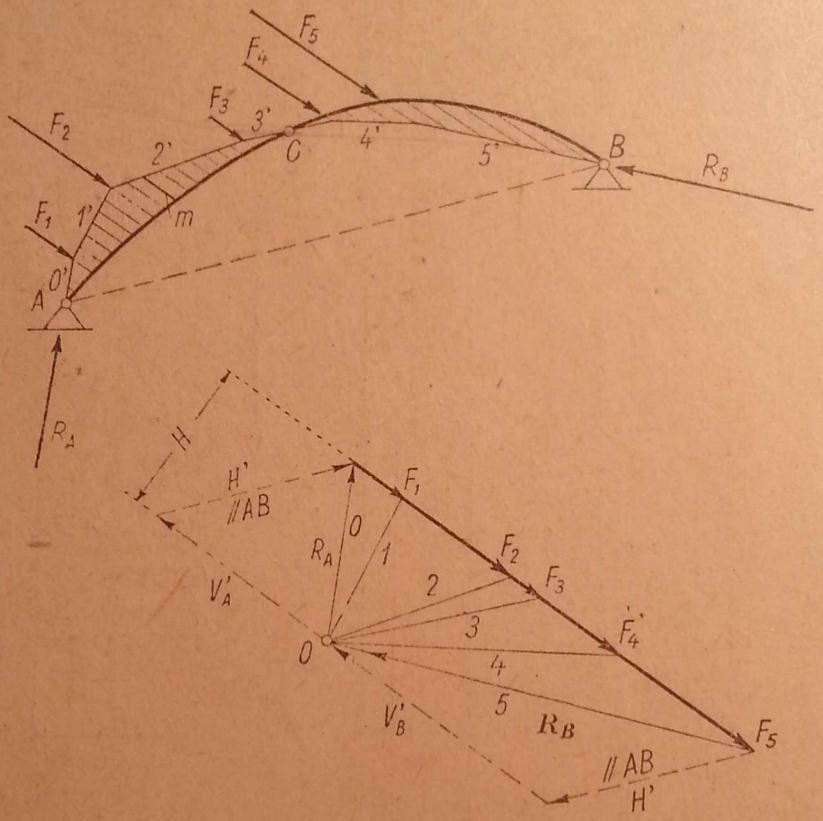


Fig. 269 A.

Eforturile dintr-o secțiune oarecare N, T, M se pot determina cu ajutorul razei polare și al poziției laturii de poligon funicular corespunzătoare, față de centrul de greutate al secțiunii.

Momentul încovoietor capătă însă o interpretare mai sugestivă în cazul forțelor paralele.

Expresia

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y \,, \qquad (a)$$

interpretată grafic, arată că

$$M_x^0 = H \cdot m_0 \,,$$

în care m_0 este ordonata între linia de închidere AB și latura de poligon funicular din secțiune, iar H — distanța polară cu care a fost construit poligonul funicular, deoarece M_x^0 este momentul încovoietor în secțiunea x a unei grinzi simplu rezemate.

Expresia (a) devine:

$$M_x = H \cdot m_0 - H \cdot y = - H (y - m_0) = - H \cdot m, \qquad (5.15)$$

în care cu m s-a notat diferența de ordonată dintre axa arcului și poligonul de presiune.

Variația lui m reprezintă variația momentului încovoietor pe arc, deoarece H este constant.

Deci, momentul încovoietor într-o secțiune a arcului încărcat cu sarcini verticale este produsul dintre distanța polară H, și m, care este diferența de ordonate verticale dintre axa arcului și curba de presiune.

Dacă forțele paralele nu sînt verticale, ordonatele m se măsoară pe direcția comună a forțelor, iar distanța polară H e perpendiculară pe această direcție așa cum se vede în fig. 269 A.

În privința semnului, se observă că m a fost considerat pozitiv în jos; expresia

$$M_x = - H \cdot m \qquad (5.15)$$

arată că pentru m sub axă, momentele încovoietoare sînt negative. Invers, pentru m negativ (adică deasupra axei), momentele încovoietoare sînt pozitive.

Diagrama momentelor încovoietoare pe arc din construcția grafică cu ajutorul poligonului de presiune a rezultat cu semnele inverse decît la grinda dreaptă, deoarece poligonul (curba) de presiune apare de partea zonei comprimate a secțiunii, pe cînd la grinzi s-a convenit ca diagrama momentelor să se deseneze pe partea zonei întinse.

Adeseori la arce se obțin diagrame mai sugestive pentru momente încovoietoare, dacă nu se va respecta cu strictețe convenția de a desena momentele încovoietoare pe partea întinsă.

Diagrama momentelor încovoietoare la arc, reprezentate de variația lui m, ne arată în fig. 269 că aceste momente sînt mici în raport cu momentele de pe o grindă simplu rezemată de aceeași deschidere, care sînt reprezentate de variația lui m_0 (distanța polară H este aceeași).

Rezultă, deci, că arcul folosește mult mai bine materialul decît grinda, deoarece în loc să aibă momente mari, are forțe axiale mari și momente încovoietoare mici.

Se mai observă că, dacă axa arcului coincide cu curba de presiune, momentele încovoietoare sînt nule și, de asemenea, și forțele tăietoare. Rezultanta R_i a tuturor forțelor din sînga secțiunii i este tangentă la axă în i și în orice secțiune $R_i = N_i$, arcul fiind solicitat numai la forțe axiale de compresiune. Arcul a cărui axă coincide cu curba de presiune pentru anumite încărcări date se numește arc de coincidență pentru acele încărcări.

Dacă sistemul de sarcini este dat, se observă că determinarea curbei de presiune nu depinde de forma arcului, ci numai de pozițiile celor trei articulații, astfel că, dîndu-se pozițiile celor trei articulații și încărcările independente de forma arcului, se poate trage poligonul, sau curba funiculară respectivă, și apoi se poate alege ca axă a arcului această curbă funiculară.

Practic, însă, sistemul de sarcini depinde de forma arcului atît prin greutatea sa proprie, cît și prin încărcările ce le suportă, care își schimbă

valoarea în oarecare măsură, odată cu schimbarea formei arcului, astfel încît nu se poate face evaluarea sarcinilor fără a se cunoaște forma arcului. Curba funiculară respectivă nu va coincide, în general, cu forma inițială a arcului, și dacă se modifică axa arcului după curba funiculară obținută, trebuie să se țină seamă apoi de modificările corespunzătoare de sarcini, care, la rîndul lor, vor modifica curba de presiune. Este, deci, nevoie să se repete determinarea curbei de presiune de două sau trei ori pînă se ajunge ca două curbe succesive să aibă diferențe neglijabile.

C. ARCE CU AXĂ RAȚIONALĂ PENTRU EFORTURI

Dintre cele trei eforturi N, M, T, în secțiunile unui arc, forțele tăietoare sînt mici și nu contribuie la dimensionarea secțiunilor.

Eforturile M și N produc eforturi unitare σ, care, în cazul arcelor cu raze de curbură mari, așa cum sînt folosite în construcții, se pot calcula cu expresia de mai jos în care este neglijat efectul curburii :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y,$$

y fiind distanța punctului de la axa normală pe plan care trece prin centrul de greutate al secțiunii, A — aria secțiunii, și I — momentul de inerție în raport cu aceeași axă.

Materialul este cu atît mai bine folosit, cu cît momentele încovoietoare sînt mai mici. Cînd momentele încovoietoare sînt nule pe toată lungimea arcului, eforturile unitare sînt date numai de forța axială N :

$$\sigma = \frac{N}{A} .$$

Pentru încărcări permanente se poate totdeauna aranja axa arcului cu trei articulații astfel, încît să coincidă cu poligonul funicular al încărcărilor și, deci, momentele încovoietoare în arc să fie nule.

Din punctul de vedere al eforturilor, arcele a căror axă coincide cu curba funiculară a încărcărilor (arce de coincidență) sînt cele mai raționale.

Pentru sarcini permanente care nu depind de forma arcului, această coincidență se realizează foarte ușor, deoarece fiind date cele trei articulații și sarcinile, poligonul funicular care trece prin cele trei articulații este chiar axa arcului.

Cînd sarcinile depind ele însele de forma arcului, aceasta se stabilește prin încercări succesive. În unele cazuri, cînd sarcina poate fi exprimată printr-o funcție analitică continuă, se poate găsi și expresia matematică a formei axei.

Încărcări verticale. La încărcări verticale s-a găsit :

$$M_x = M_x^0 - H y$$

și punînd condiția ca $M_x = 0$, rezultă :

$$M_x^0 - H y = 0$$

sau

$$y = \frac{M_x^0}{H} , \qquad \text{(a)}$$

adică forma arcului trebuie să fie dată de curba momentelor încovoietoare produse de încărcarea considerată pe o grindă simplu rezemată de aceeași deschidere.

La capitolul barelor drepte s-a găsit :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p, \tag{b}$$

în care p este intensitatea sarcinii în secțiunea x.

Din (a) și (b) rezultă :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{d^2M_x^0}{dx^2} = -\frac{p}{H}$$

sau

$$y'' = -\frac{p}{H}. \tag{5.16}$$

În expresia (5.16) semnul membrului al doilea depinde de poziția centrului de curbură față de axele de coordonate.

Cazurile obișnuite sînt cele ale arcelor simetrice cu încărcare simetrică, axa de simetrie trecînd prin articulația intermediară. Mai jos vor fi studiate trei cazuri de încărcare :

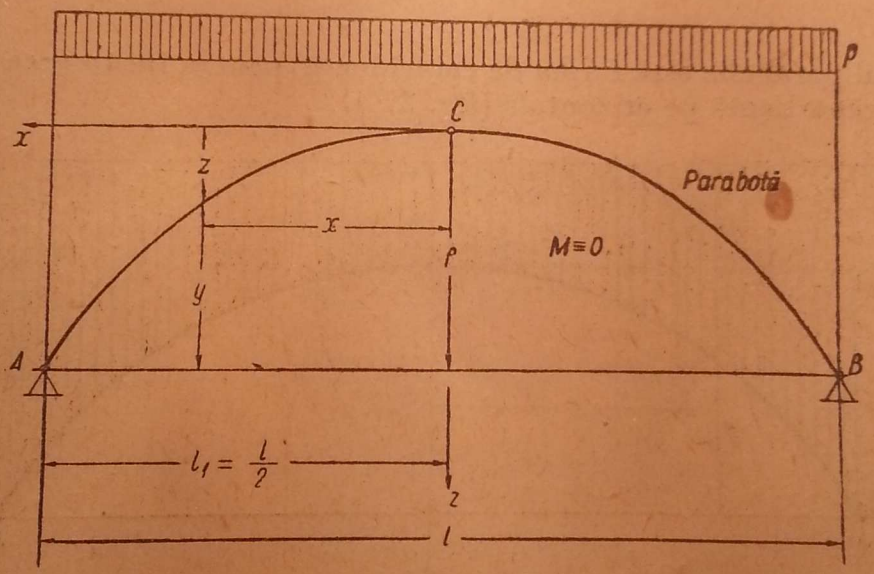


Fig. 270.

1. ***Sarcina p verticală este uniform repartizată pe proiecția orizontală a arcului.*** Luînd sistemul de axe prin cheie (fig. 270), rezultă :

$$z = f - y.$$

În acest caz, ecuația (5.16) devine :

$$z'' = -y'' = \frac{p}{H} = \text{const.}$$

și integrînd de două ori, rezultă :

$$z' = \frac{p}{H} x + C_1,$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{H} x^2 + C_1 x + C_2.$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită.

Din motive de simetrie și din alegerea sistemului de axe trebuie ca pentru $x = 0$ să avem :

$$z' = 0 \text{ și } z = 0,$$

de unde rezultă

$$C_1 = 0 \text{ și } C_2 = 0.$$

Ecuația devine :

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{H} x^2,$$

iar din condiția ca pentru $x = \frac{l}{2}$, $z = f$, rezultă :

$$z = \frac{4f}{l^2} x^2. \tag{5.17}$$

Deci : arcul parabolic este forma de coincidență pentru încărcarea verticală *p* unifom repartizată pe orizontală (fig. 270).

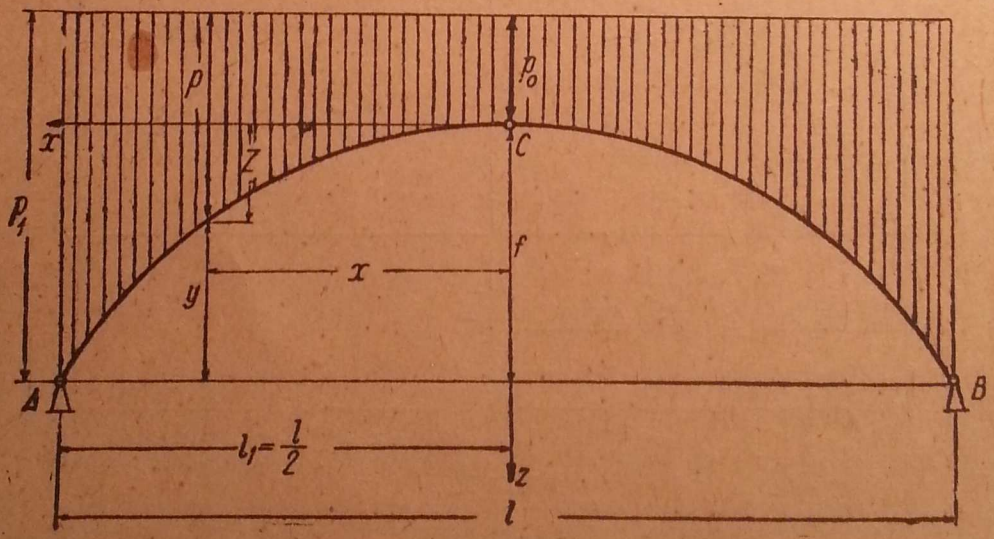


Fig. 271.

2. *Arcul este încărcat cu sarcini verticale continue care variază proporțional cu ordonatele arcului de la o dreaptă orizontală* (fig. 271). Se va presupune că sînt date încărcările la cheie p_0 și la nașteri p_1, săgeata arcului fiind f, și deschiderea l.

Sarcina într-o secțiune oarecare este :

$$p = p_0 + \gamma \cdot z.$$

Fiind cunoscute p_0 la cheie și p_1 la naștere, rezultă :

$$p_1 = p_0 + \gamma \cdot f$$

și apoi :

$$p = p_0 + p_0 \frac{m-1}{f} z, \tag{a}$$

în care s-a notat

$$m = \frac{p_1}{p_0}. \tag{5.18}$$

Avem $y'' = -z''$, deci (5.16) devine :

$$z'' = \frac{I_0}{H} + \frac{I_0 (m-1)}{fH} \cdot z.$$

Notînd

$$k_0^2 = \frac{p_0 (m-1)}{fH}, \tag{b}$$

rezultă

$$z'' - k_0^2 z = \frac{p_0}{H},$$

cu soluția

$$z = C_1 \operatorname{sh} k_0 x + C_2 \operatorname{ch} k_0 x - \frac{p_0}{k_0^2 H}, \tag{c}$$

a cărei derivată este :

$$z' = k_0 C_1 \operatorname{ch} k_0 x + k_0 C_2 \operatorname{sh} k_0 x.$$

Pentru $x = 0$, avem $z = z' = 0$, deci $C_1 = 0$ și $C_2 = \frac{p_0}{k_0^2 H}$, astfel încît (c) devine :

$$z = \frac{p_0}{k_0^2 H} (\operatorname{ch} k_0 x - 1).$$

Dacă se ține seamă de (b) și se notează $x = l_1 \xi_1$ și $k_0 \cdot l_1 = k$, rezultă :

$$z = \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} k \xi_1 - 1). \tag{5.19}$$

Pentru $\xi_1 = 1$ $(x = l_1)$, avem $z = f$, și din (5.19) se obține :

$$m = \operatorname{ch} k \tag{d}$$

și deci

$$k = \operatorname{arg} \operatorname{ch} m. \tag{5.18'}$$

Introducînd în (b) valoarea lui $k_0^2 = \frac{k^2}{l_1^2}$, se obține :

$$H = \frac{p_0 l_1^2 \cdot (m-1)}{f \cdot k^2}. \tag{5.20}$$

Dacă se introduce valoarea lui z din (5.19) în (a), se obține expresia sarcinii într-o secțiune :

$$p = p_0 \operatorname{ch} k\xi_1.$$

Reacțiunile verticale V_A și V_B au valoarea :

$$V_A = V_B = \int_0^{l_1} p\,dx = p_0 l_1 \int_0^1 \operatorname{ch} k\,\xi_1\,d\xi_1 = \frac{p_0 l_1}{k} \operatorname{sh} k. \qquad (5.20')$$

Tangenta la curbă într-o secțiune oarecare este :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{f\cdot k}{(m-1)l_1} \operatorname{sh} k\,\xi_1. \qquad (5.19')$$

Curba z definită de ecuația (5.19) se numește catenoidă (lănțișor).

În rezumat, elementele geometrice și statice ale arcului în condițiile de mai sus sînt :

$$m = \frac{p_1}{p_0} = \operatorname{ch} k\,; \qquad (5\ 18)$$

$$k = \operatorname{arg}\operatorname{ch} m\,; \qquad (5.18')$$

$$p = p_0 \operatorname{ch} k\,\xi_1\,; \qquad (5.18'')$$

$$z = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\,\xi_1 - 1)\,; \qquad (5.19)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{kf}{l_1(m-1)} \operatorname{sh} k\,\xi_1\,; \qquad (5.19')$$

$$H = \frac{p_0 l_1^2 (m-1)}{fk^2}\,; \qquad (5.20)$$

$$V_A = V_B = \frac{p_0 l_1}{k} \operatorname{sh} k\,; \qquad (5.20')$$

$$N = \frac{H}{\cos\varphi}\,;\quad M = T = 0. \qquad (5.20'')$$

Aceste formule sînt destul de dificile datorită liniilor hiperbolice și, de aceea, în tratatele de poduri sînt tabele speciale care dau ordonatele, tangentele etc., în funcție de parametrul m.

3. Sarcina p este dată de un polinom care conține puterile pare ale lui x (fig. 272) Se va presupune că expresia lui p este :

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \ldots + \alpha_n x^{2n}, \qquad (a)$$

în care $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt niște coeficienți care pot fi determinați din datele inițiale. Această expresie pentru încărcare poate înlocui, în anumite condiții, încărcarea precedentă.

Din

$$z = f - y,$$

rezultă

$$z'' = -y''$$

și ecuația (5.16) devine :

$$z'' = \frac{p}{H}.$$

Integrînd de două ori și punînd condiția ca pentru $x = 0$ să avem $z = 0$ și $z' = 0$, rezultă :

$$z = \frac{1}{H}\left[\frac{\alpha_0}{2}x^2 + \frac{\alpha_1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{\alpha_2}{5\cdot 6}x^6 + \cdots + \frac{\alpha_n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}\right]. \qquad \text{(b)}$$

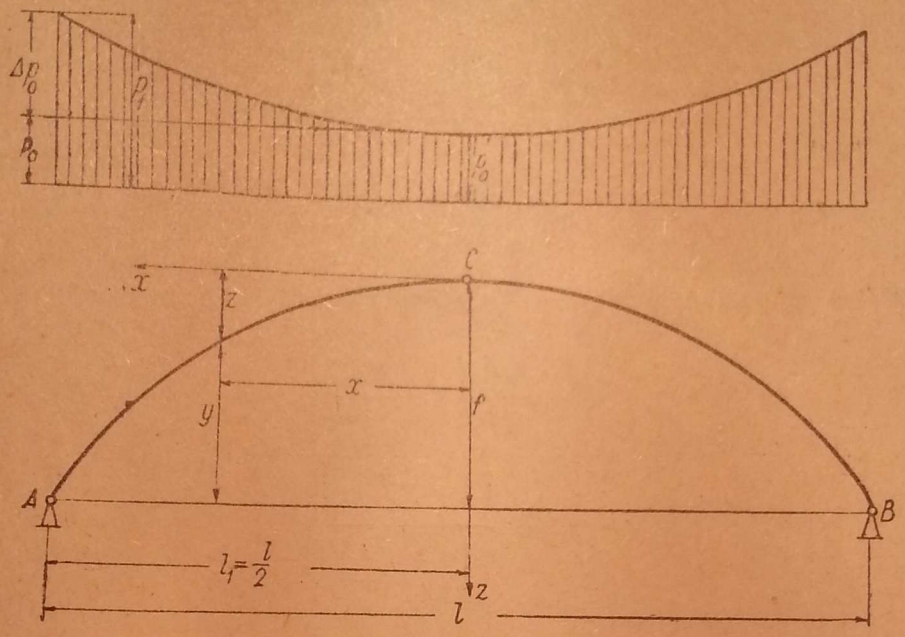


Fig. 272.

Punînd condiția ca pentru $x = l_1$ să avem $z = f$, rezultă :

$$H = \frac{l_1^2}{f}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{3\cdot 4}l_1^2 + \frac{\alpha_2}{5\cdot 6}l_1^4 + \cdots + \frac{\alpha_n}{(2n+1)(2n+2)}l_1^{2n}\right], \qquad \text{(c)}$$

care, introdusă în (b), conduce la :

$$z = f\cdot\xi_1^2\cdot\frac{\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{3\cdot 4}\cdot\xi_1^2 l_1^2 + \frac{\alpha_2}{5\cdot 6}\cdot\xi_1^4 l_1^4 + \cdots + \frac{\alpha_n}{(2n+1)(2n+2)}\xi_1^{2n} l_1^{2n}}{\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{3\cdot 4}l_1^2 + \frac{\alpha_2}{5\cdot 6}l_1^4 + \cdots + \frac{\alpha_n}{(2n+1)(2n+2)}l_1^{2n}}, \qquad \text{(d)}$$

în care s-a notat $x = \xi_1 l_1$.

Reacțiunile verticale se găsesc din relația :

$$V_A = V_B = \int_0^{l_1} p\,dx,$$

$$V_A = V_B = l_1\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1 l_1^2}{3} + \frac{\alpha_2 l_1^4}{5} + \cdots + \frac{\alpha_n l_1^{2n}}{2n+1}\right). \qquad \text{(e)}$$

De obicei, se pot evalua anticipat sarcina la cheie p_0 și sarcina la nașteri p_1, astfel că din (a) se pot determina ușor numai doi termeni.

Avem evident, $p_0 = \alpha_0$, iar p_1 de la nașteri va folosi la determinarea unuia dintre coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

A. Să presupunem că reținem numai primii doi termeni. Avem:

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 x^2,$$

unde

$$\alpha_0 = p_0$$

și dacă se notează

$$p_1 = p_0 + \Delta p_0,$$

rezultă că

$$\alpha_1 = \frac{\Delta p_0}{l_1^2} = \frac{m_0 p_0}{l_1^2},$$

în care s-a notat

$$\frac{\Delta p_0}{p_0} = m_0.$$

Cu relația $m_0 = m - 1$, unde $m = \frac{p_1}{p_0}$, ecuațiile (c), (d) și (e) vor da:

$$H = \frac{p_0 l_1^2}{2f}\left(1 + \frac{m_0}{6}\right);$$

$$z = f\xi_1^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{m_0}{6}\xi_1^2\right)}{\left(1 + \frac{m_0}{6}\right)}; \qquad (5.21)$$

$$V_A = V_B = p_0 l_1\left(1 + \frac{m_0}{3}\right).$$

B. Să presupunem că reținem numai primul și al treilea termen din expresia (a):

$$p = \alpha_0 + \alpha_2 x^4.$$

Cu notațiile de mai sus, se obține:

$$\alpha_0 = p_0 \; ; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta p_0}{l_1^4} = \frac{m_0 p_0}{l_1^4}$$

și apoi

$$H = \frac{p_0 l_1^2}{2f}\left(1 + \frac{m_0}{15}\right);$$

$$z = f\xi_1^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{m_0}{15}\xi_1^4\right)}{\left(1 + \frac{m_0}{15}\right)}; \qquad (5.22)$$

$$V_A = V_B = p_0 l_1\left(1 + \frac{m_0}{5}\right).$$

C. Să presupunem că reținem primii trei termeni din expresia (a):

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4.$$

Pentru a determina pe α_0, α_1 și α_2, afară de p_0 și p_1 ar mai trebui cunoscută valoarea sarcinii într-un punct intermediar, ceea ce este greu de determinat înainte de a fi cunoscută forma arcului.

De aceea, vom introduce un coeficient arbitrar, în felul următor.

Punem

$$\Delta p_0 = \Delta'_{p_0} + \Delta''_{p_0},$$

și apoi,

$$\frac{\Delta'_{p_0}}{p_0} = \beta_1 m_0,$$

$$\frac{\Delta''_{p}}{p_0} = \beta_2 m_0,$$

în care

Rezultă:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1.$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 m_0}{l_1^2} p_0,$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2 m_0}{l_1^4} p_0,$$

și apoi,

$$H = \frac{p_0 l_1^2}{2f}\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{6} + \frac{\beta_2 m_0}{15}\right);$$

$$z = f\xi_1^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{6}\xi_1^2 + \frac{\beta_2 m_0}{15}\xi_1^4\right)}{\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{6} + \frac{\beta_2 m_0}{15}\right)}; \qquad (5.23)$$

$$V_A = V_B = p_0 l_1\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{3} + \frac{\beta_2 m_0}{5}\right).$$

Dacă se face o comparație între rezultatele date de formulele de la catenoidă (5.18), (5.19) și (5.20) cu cele date de formulele (5.21) și (5.22), se constată că pentru aceleași elemente geometrice f și l_1 și pentru aceleași încărcări la cheie p_0 și la nașteri p_1, formulele (5.21) dau valori mai mari, iar formulele (5.22) dau valori mai mici pentru H și V_A decît formulele (5.20) de la catenoidă.

Rezultă deci, că o combinație între (5.21) și (5.22) așa cum este dată de formulele (5.23) se poate apropia de rezultatele de la (5.20).

În adevăr, pentru $m < 5$, se poate lua aproximativ $\beta_2 \simeq 0{,}1\, m_0 = 0{,}1\,(m-1)$ în formulele (5.23), și apoi, $\beta_1 = 1 - \beta_2$; rezultatele vor diferi cu mai puțin decît 1% față de cele date de formulele (5.19)—(5.20).

Calculele analitice date mai sus nu rezolvă însă efectiv problema, deoarece chiar la bolțile cu umplutură, sarcina permanentă p nu variază riguros după nici una dintre expresiile luate în considerație, datorită diferențelor de greutate specifică ale materialelor respective (boltă, umplutură, cale), încît formulele date servesc numai ca un punct de plecare pentru determinarea primei forme a bolții, după care se fac calcule succesive pe cale grafică sau analitică.

Pentru determinarea pe cale grafică a curbei de presiune trebuie să se țină seamă de următoarele:

Se presupune că se împarte arcul într-o serie de tronsoane numite bolțari și se evaluează forțele înlocuindu-le cu rezultanta lor pe fiecare

bolțar. Se construiește apoi poligonul funicular care trece prin cele trei articulații A, C, B pentru sarcinile concentrate pe fiecare bolțar. Valorile ordonatelor acestui poligon funicular pentru sarcini concentrate coincid cu cele ale curbei reale de presiune pentru sarcinile repartizate numai în dreptul rosturilor de separație între bolțari (din aceleași considerații ca la grinda dreaptă), astfel încît curba de presiune trebuie trasată continuă și tangentă la poligon în dreptul rosturilor.

Dacă pe boltă există numai sarcini repartizate, rosturile se pot alege după voie, de obicei, la distanțe egale între ele.

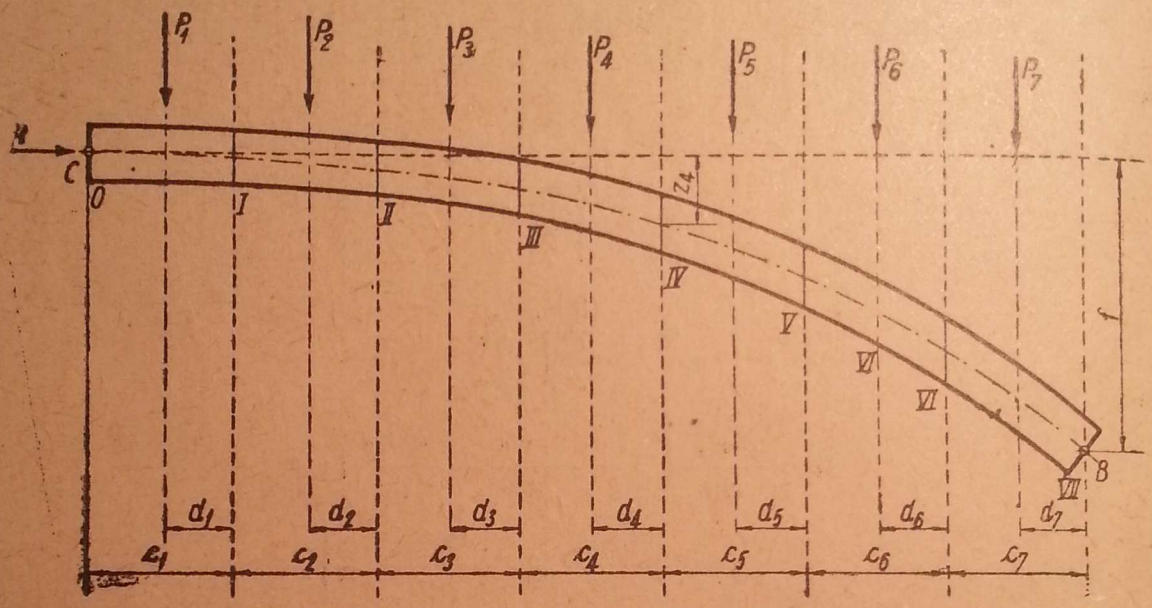


Fig. 273.

Dacă însă apar și forțe concentrate reale aduse prin stîlpi care transmit sarcinile la arc, atunci, neapărat în dreptul acestora trebuie puse rosturi, pentru ca poligonul de presiune să aibă valori juste și în dreptul forțelor concentrate. Dacă aceste forțe concentrate sînt prea depărtate între ele, se pun și rosturi intermediare.

În felul acesta se trasează curba de presiune pentru sarcinile evaluate și, în cazul cînd este foarte apropiată de axa arcului de la care am pornit, se consideră definitivă. În cazul cînd diferențele sînt mari, se adoptă curba funiculară obținută ca o nouă axă a arcului, și se evaluează din nou sarcinile. Diferențele de sarcini sînt mici la calea transmisă prin stîlpi la arcele și bolțile de poduri, și mai mari — în cazul cînd între boltă și cale este umplutură masivă.

Cu sarcinile astfel corectate, se trasează din nou curba de presiune, și dacă este foarte apropiată de prima, se consideră ca axă definitivă a bolții. Dacă există încă diferențe, se repetă operația.

La arce simetrice, încărcate simetric, toate calculele grafice se fac numai pe jumătate de boltă (deoarece reacțiunea din articulația C, din motive de simetrie, este orizontală, iar în cazul încărcărilor verticale — egală cu împingerea H din nașteri).

Pe cale analitică calculele se conduc după recomandări analoge.

La arce simetrice și simetric încărcate, calculele se fac pe jumătate de boltă (fig. 273).

Se împarte arcul în bolțari prin rosturi. La arce pleoștite $\left(\text{cu } \frac{f}{l} \text{ mic}\right)$, se pot considera rosturi verticale în locul rosturilor normale pe axă (rosturile *I*, *II*, ...).

Se evaluează forțele pe fiecare bolțar prin rezultantele lor (P_1, P_2, ...).

Deoarece ordonatele juste se găsesc în dreptul rosturilor, se evaluează momentele în dreptul lor, și dacă arcul este de coincidență, momentul total în dreptul fiecărui rost este nul.

Făcînd reducerea forțelor de la stînga, în rostul *IV* rezultă :

$$H \cdot z_4 - M_{IV} = 0, \tag{a}$$

în care, prin M_{IV} se înțelege momentul tuturor forțelor verticale (P_1, P_2, P_3, P_4) de la stînga în raport cu rostul *IV*.

Din expresia (a) se scoate :

$$z_4 = \frac{M_{IV}}{H},$$

și așa mai departe.

Momentele M_I, M_{II}, M_{III} se calculează prin relații de recurență. Astfel :

$$M_{IV} = M_{III} + c_4 \cdot \sum_1^3 P_i + d_4 \cdot P_4. \tag{b}$$

Calculele se conduc așa cum este arătat în tabela 5.

Tabela 5

Forțe	$\sum_1^{n-1} P_i$	Secțiuni	c	d	Momente	z
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	$M_0 = 0$	$z_0 = 0$
P_1	0	*I*	c_1	d_1	$M_I = d_1 P_1$	$z_1 = \frac{M_I}{H}$
P_2	P_1	*II*	c_2	d_2	$M_{II} = M_I + c_2 P_1 + d_2 P_2$	$z_2 = \frac{M_{II}}{H}$
P_3	$P_1 + P_2$	*III*	c_3	d_3	$M_{III} = M_{II} + c_3 \sum_1^2 P_i + d_3 P_3$	$z_3 = \frac{M_{III}}{H}$
P_4	$\sum_1^3 P_i$	*IV*	c_4	d_4	$M_{IV} = M_{III} + c_4 \sum_1^3 P_i + d_4 P_4$	$z_4 = \frac{M_{IV}}{H}$
P_5	$\sum_1^4 P_i$	*V*	c_5	d_5	$M_V = M_{IV} + c_5 \sum_1^4 P_i + d_5 P_5$	$z_5 = \frac{M_V}{H}$
P_6	$\sum_1^5 P_i$	*VI*	c_6	d_6	$M_{VI} = M_V + c_6 \sum_1^5 P_i + d_6 P_6$	$z_6 = \frac{M_{VI}}{H}$
P_7	$\sum_1^6 P_i$	*VII* (B)	c_7	d_7	$M_{VII} = M_{VI} + c_7 \sum_1^6 P_i + d_7 P_7$	$H = \frac{M_{VII}}{f}$

Se completează coloanele 1, 2, 3, 4, 5 și se fac evaluările momentelor din coloana 6. Apoi, în ultimul rînd al tabelei, se determină H din relația $H = \frac{M_{VII}}{f}$, și cu valoarea lui H cunoscută se determină ordonatele z din coloana 7.

Aici sînt valabile aceleași observații ca la calculul grafic : în dreptu sarcinilor transmise prin stîlpi trebuie puse rosturi.

Calculul se repetă de două sau de trei ori prin reevaluarea sarcinilor, pînă cînd se obțin două serii de ordonate z foarte puțin diferite între ele.

Astfel se obține axa rațională a arcului în cazul încărcărilor permanente.

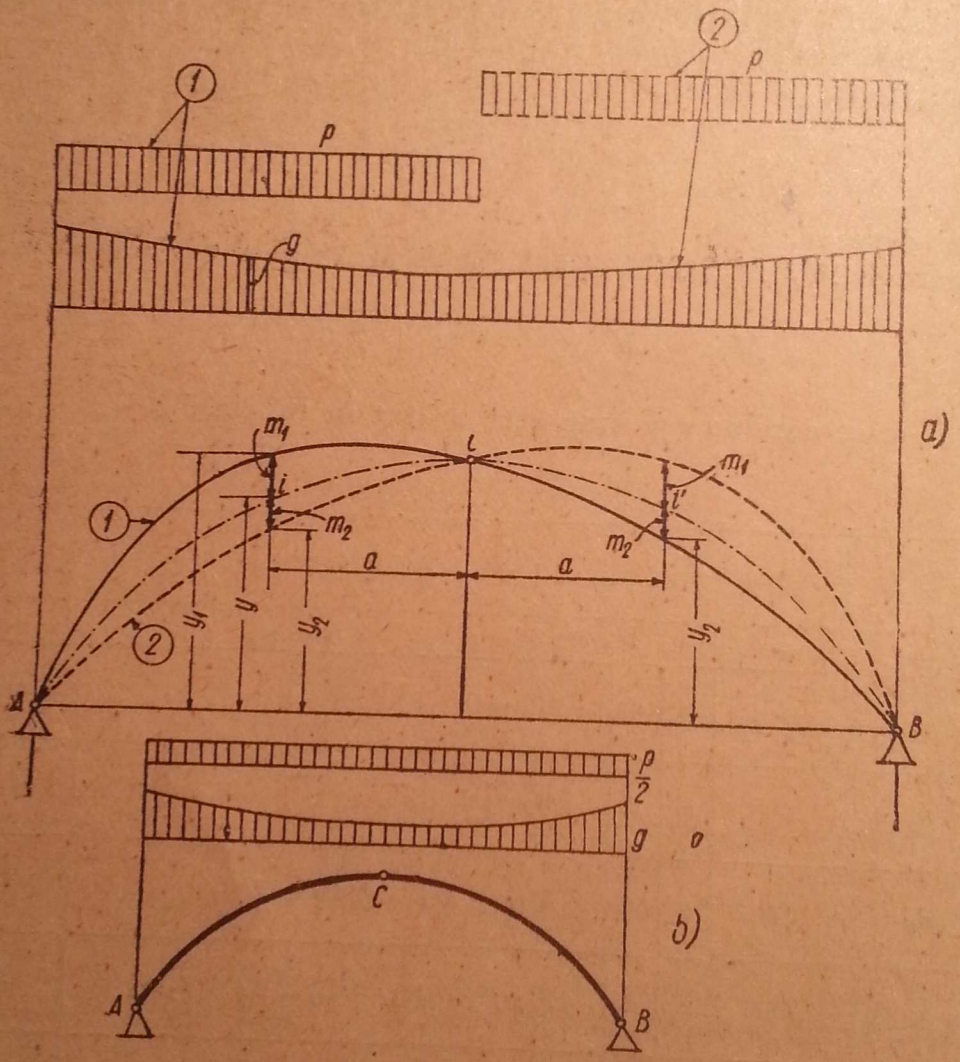


Fig. 274.

Problema devine mai dificilă, cînd afară de sarcini permanente, pe arc acționează și sarcini mobile. În acest caz, dacă s-a luat forma arcului după curba funiculară a încărcărilor permanente, sub acțiunea sarcinilor mobile, curba de presiune va trece în aceeași secțiune cînd deasupra axei, cînd dedesubtul ei, după poziția sarcinii mobile. Rațional este ca momentele să fie cît mai mici, adică axa arcului să se găsească la mijlocul pozițiilor extreme pe care le poate lua curba de presiune, sub influența sarcinilor mobile și permanente.

Limitîndu-ne la arce simetrice cu încărcarea permanentă g simetrică, iar încărcarea utilă redusă la o sarcină p uniform repartizată numai pe jumătate de arc (fig. 274, *a*), rezultă că dacă

se face curba funiculară pentru încărcarea permanentă și sarcina utilă pe jumătatea din stînga, se obține curba funiculară *1*, pe cînd curba funiculară pentru încărcarea permanentă și încărcarea utilă pe jumătatea din dreapta este curba *2*, care nu este altceva decît curba *1* inversată față de axa verticală care trece prin *C*, astfel că, de fapt, cele două ordonate y_1 și y_2 extreme în punctul *i* se pot obține dintr-o singură încărcare *1*, luînd ordonata y_1 din dreptul lui *i* și ordonata y_2 din dreptul lui *i'* simetric cu *i*, în raport cu axa verticală care trece prin *C*.

Axa rațională este cea care trece prin mijlocul pozițiilor extreme, adică cea care are ca ordonată : $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Or, cu ajutorul expresiei $M = -H \cdot m$, în care se ține seamă că H se compune din două părți : H_g din încărcarea permanentă, și $\frac{1}{2} H_p$, provenit din încărcarea utilă (H_p fiind împingerea pentru încărcarea utilă pe toată deschiderea), rezultă că axa cu ordonatele y de mai sus corespunde curbei funiculare determinate de încărcarea $g + \frac{1}{2} p$ pe toată deschiderea (fig. 274, *b*), astfel că aceasta se consideră axă rațională în acest caz.

Arc de coincidență pentru încărcări radiale p_n. În ecuațiile (5.1), $p_t = 0$, și deci prima ecuație devine :

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{\rho};$$

dar dacă arcul este tocmai curba funiculară a sarcinii, avem în orice secțiune $T = 0$, și cum ρ este diferit de zero, rezultă

$$\frac{dN}{ds} = 0,$$

adică $dN = 0$, deci $N = \text{const}$.

Așadar, la o încărcare radială, arcul care este o curbă de coincidență pentru această încărcare are forța axială constantă în orice secțiune.

Dacă $T \equiv 0$ pe toată lungimea arcului și $\frac{dT}{ds} = 0$; atunci a doua ecuație a grupului (5.1) devine :

$$\frac{N}{\rho} + p_n = 0$$

sau

$$N = -\rho p_n \tag{5.24}$$

și, deoarece N este constant, formula (5.24) arată că produsul dintre raza de curbură și intensitatea sarcinii în secțiune trebuie să fie constant.

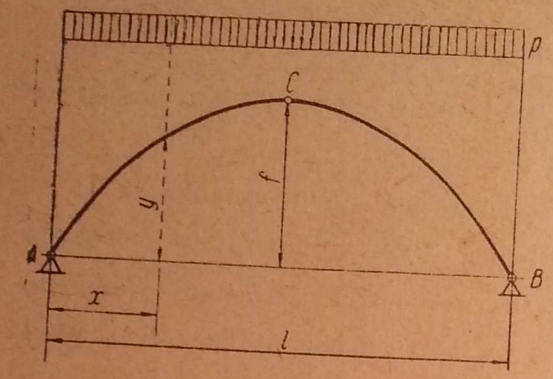
Aplicație practică are cazul : $p_n = \text{const} = p$.

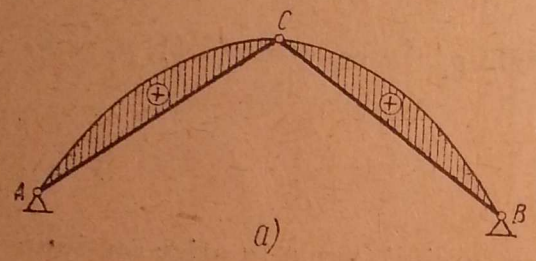
În acest caz, rezultă că $\rho = r = \text{const}$, adică, curba devine un cerc de rază r, și expresia forței axiale din arc este :

$$N = -p r. \tag{5.24'}$$

Această încărcare intervine la presiunea hidrostatică a apei la barajele curbe în plan.

Aplicația 62. Să se determine diagrama momentelor încovoietoare din încărcarea uniform repartizată pe toată deschiderea la un arc simetric (fig. 275).





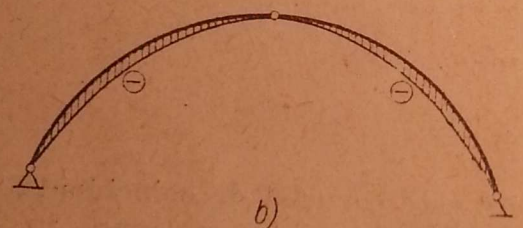


Fig. 275.

Răspuns. În relația :

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y$$

avem

$$M_x^0 = \frac{1}{2} p\, x\, x'$$

și

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{1}{8} \cdot \frac{p\, l^2}{f},$$

deci

$$M_x = \frac{1}{8} p\, l^2 \left(\frac{4\, x\, x'}{l^2} - \frac{y}{f} \right)$$

sau, notînd

$$\xi = \frac{x}{l} \; ; \quad \xi' = \frac{x'}{l} \; ; \quad \eta = \frac{y}{f},$$

rezultă :

$$M_x = \frac{1}{8} p\, l^2 (4\, \xi\, \xi' - \eta). \tag{5.25}$$

Ecuația unei parabole care trece prin cele trei puncte este :

$$f'_p = \frac{4f}{l^2}\, xx'$$

sau

$$\frac{y_p}{f} = 4\, \frac{x\, x'}{l^2}$$

sau

$$\eta_p = 4\, \xi\, \xi'$$

și ecuația (5.25) se poate pune sub forma :

$$M_x = \frac{1}{8} pl^2 (\eta_p - \eta)\,, \tag{5.25'}$$

adică momentele sînt proporționale cu diferențele de ordonată dintre arcul dat și parabola care trece prin cele trei puncte. Dacă arcul se găsește sub parabolă, momentele sînt pozitive, iar dacă se găsește deasupra parabolei, momentele sînt negative. De exemplu, pentru două bare drepte AC și BC momentele sînt pozitive (fig. 275, *a*), pe cînd pentru un arc de cerc, momentele sînt negative (fig. 275, *b*).

În cazul parabolei, $\eta_p = \eta$, și momentele sînt nule pe tot arcul.

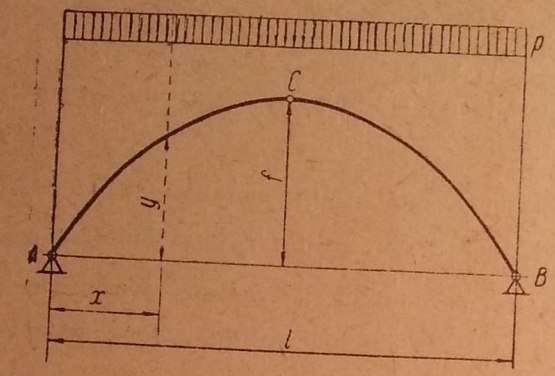
Momentul maxim se găsește acolo unde forța tăietoare este nulă :

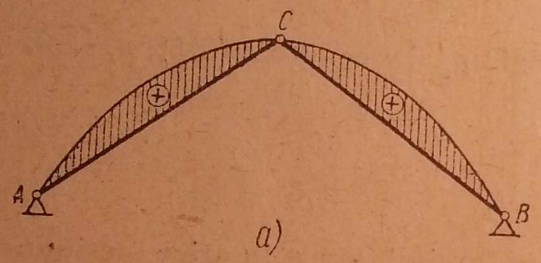
$$T_x = T_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi = 0,$$

deci,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{T_x^0}{H} = \frac{\frac{1}{2} pl\,(1 - 2\, \xi)}{\frac{1}{8} \cdot \frac{p\, l^2}{f}}$$

Aplicația 62. Să se determine diagrama momentelor încovoietoare din încărcarea uniform repartizată pe toată deschiderea la un arc simetric (fig. 275).





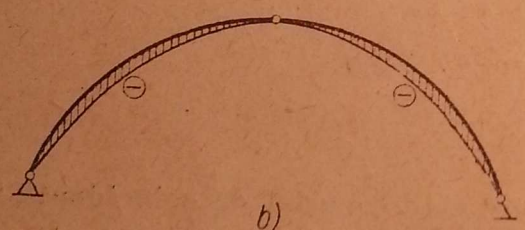


Fig. 275.

Răspuns. În relația :

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y$$

avem

$$M_x^0 = \frac{1}{2} p\, x\, x'$$

și

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{1}{8} \cdot \frac{p\, l^2}{f},$$

deci

$$M_x = \frac{1}{8} p\, l^2 \left(\frac{4\, x\, x'}{l^2} - \frac{y}{f} \right)$$

sau, notînd

$$\xi = \frac{x}{l} \; ; \quad \xi' = \frac{x'}{l} \; ; \quad \eta = \frac{y}{f},$$

rezultă :

$$M_x = \frac{1}{8} p\, l^2 (4\, \xi\, \xi' - \eta). \tag{5.25}$$

Ecuația unei parabole care trece prin cele trei puncte este :

$$y_p = \frac{4 f}{l^2} xx'$$

sau

$$\frac{y_p}{f} = 4 \frac{x\, x'}{l^2}$$

sau

$$\eta_p = 4\, \xi\, \xi'$$

și ecuația (5.25) se poate pune sub forma :

$$M_x = \frac{1}{8} pl^2 (\eta_p - \eta)\,, \tag{5.25'}$$

adică momentele sînt proporționale cu diferențele de ordonată dintre arcul dat și parabola care trece prin cele trei puncte. Dacă arcul se găsește sub parabolă, momentele sînt pozitive, iar dacă se găsește deasupra parabolei, momentele sînt negative. De exemplu, pentru două bare drepte AC și BC momentele sînt pozitive (fig. 275, *a*), pe cînd pentru un arc de cerc, momentele sînt negative (fig. 275, *b*).

În cazul parabolei, $\eta_p = \eta$, și momentele sînt nule pe tot arcul.

Momentul maxim se găsește acolo unde forța tăietoare este nulă :

$$T_x = T_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi = 0,$$

deci,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{T_x^0}{H} = \frac{\frac{1}{2} pl\,(1 - 2\, \xi)}{\frac{1}{8} \cdot \frac{p\, l^2}{f}}$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = 4\frac{f}{l}(1-2\xi)$$

și depinde de forma arcului.

În cazul cînd AC și CB sînt drepte (fig. 275, a), avem :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2f}{l}$$

și, deci,

$$\frac{2f}{l} = \frac{4f}{l}(1-2\xi),$$

de unde $\xi = \frac{1}{4}$, adică sfertul deschiderii.

Observație. Pentru valoarea lui H (împingerea) are o foarte mare importanță pleoștirea $\frac{f}{l}$, dar nu intervine forma arcului, pe cînd la valoarea momentului încovoietor (5.25′) pleoștirea nu intervine, dar are influență forma arcului.

Aplicația 63. Să se determine diagrama momentelor încovoietoare pe un arc simetric, încărcat cu sarcină uniform repartizată pe jumătate din deschidere (fig. 276).

Răspuns :

$$V_A = \frac{3}{8}pl; \quad V_B = \frac{1}{8}pl;$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{1}{16}\cdot\frac{pl^2}{f}.$$

Pe intervalul $A-C$:

$$M_x = \frac{3}{8}plx - \frac{px^2}{2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{pl^2}{f}y =$$

$$= \frac{pl^2}{16}[8\xi\xi' - 2\xi - \eta]; \qquad (5.26)$$

ξ, ξ', η au aceleași semnificații ca și în problema precedentă.

Pe intervalul $B-C$:

$$M_x = \frac{1}{8}plx' - \frac{1}{16}\cdot\frac{pl^2}{f}y =$$

$$= \frac{pl^2}{16}(2\xi' - \eta). \qquad (5.26')$$

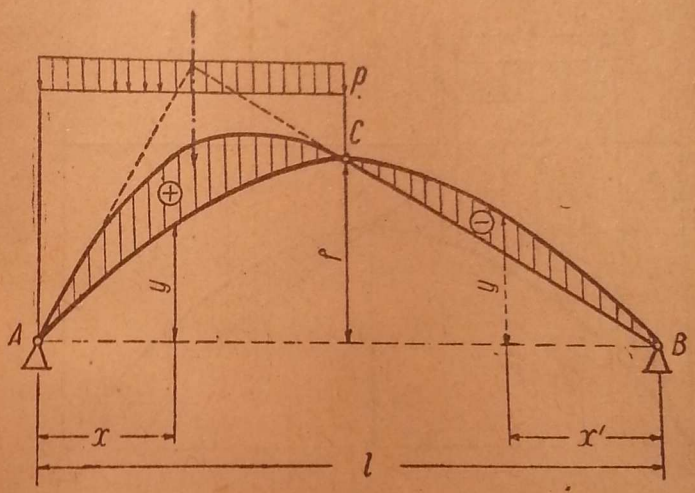


Fig. 276.

Momentul maxim pe intervalul $B-C$ are loc în secțiunea unde se anulează forța tăietoare :

$$T_x = T_x^0\cos\varphi - H\sin\varphi = 0,$$

de unde

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{T_x^0}{H} = \frac{-\frac{1}{8}pl}{\frac{1}{16}\cdot\frac{pl^2}{f}} = -2\frac{f}{l},$$

adică așa cum se vede în diagramă, în secțiunea unde tangenta la curbă este paralelă cu coarda BC.

Momentul maxim pe intervalul $A-C$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{T_x^0}{H} = \frac{\frac{3}{8}pl - px}{\frac{1}{16}\cdot\frac{pl^2}{f}} = 6\frac{f}{l}\left(1 - \frac{8}{3}\xi\right).$$

Pentru arcul parabolic :

$$y = \frac{4f}{l^2} xx' \quad \text{sau} \quad \eta = 4\,\xi\,\xi'.$$

Rezultă :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = \frac{4f}{l}(1 - 2\,\xi),$$

astfel că pentru intervalul $B - C$ se obține :

$$4\,\frac{f}{l}(1 - 2\xi) = -\,2\,\frac{f}{l},$$

de unde rezultă

$$\xi = \frac{3}{4}\,; \quad \left(\xi' = \frac{1}{4}\right)$$

$$M_{max} = \frac{pl^2}{16}\left(2 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = -\,\frac{pl^2}{64}, \tag{5.27}$$

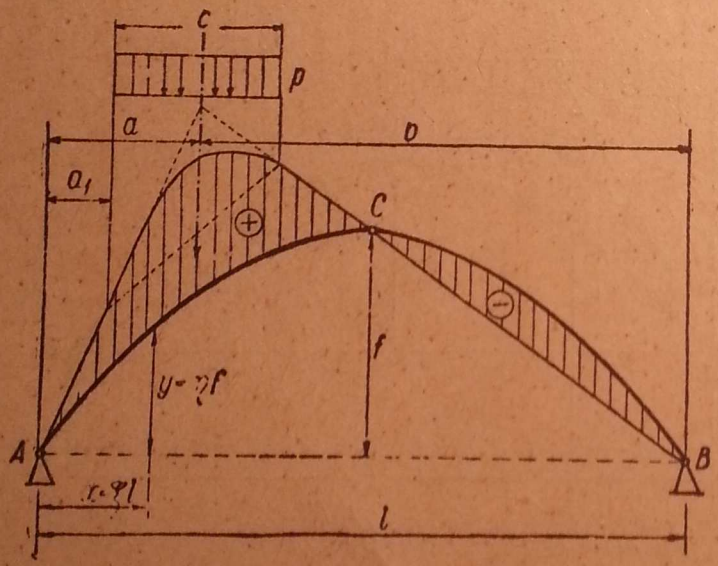


Fig. 277.

iar pe intervalul $A - C$:

$$4\,\frac{f}{l}(1 - 2\xi) = 6\,\frac{f}{l}\left(1 - \frac{8}{3}\,\xi\right),$$

de unde rezultă

$$\xi = \frac{1}{4}\,; \qquad \left(\xi' = \frac{3}{4}\right)$$

și

$$M_{max} = \frac{pl^2}{16}\left(8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = +\,\frac{pl^2}{64}. \tag{5.27'}$$

Momentele maxime au loc la sferturile arcului și sînt egale și de semne contrarii.

O b s e r v a ț i e. La arcul parabolic în două secțiuni simetrice față de C, momentele sînt egale dar de semne contrarii, pentru că prin suprapunerea cu încărcarea pe cealaltă jumătate, momentele încovoietoare se anulează pe tot arcul.

Aplicația 64. Să se determine diagrama momentelor încovoietoare pentru arcul simetric, încărcat ca în fig. 277.

Răspuns :

$$V_A = \frac{pcb}{l}\,; \qquad V_B = \frac{pca}{l}\,; \qquad H = \frac{pca}{2f}.$$

Momentul încovoietor :

$x < a_1$:

$$M_x = \frac{pcb}{l}\,x - \frac{pca}{2f}\,y = \frac{pca}{2}\left(2\,\frac{b}{a}\,\xi - \eta\right). \tag{5.28}$$

$a_1 < x < a_1 + c$:

$$M_x = \frac{pcb}{l} x - \frac{p(x-a_1)^2}{2} - \frac{pca}{2f} y = \frac{pca}{2}\left[2\frac{b}{a}\xi - \frac{(x-a_1)^2}{ca} - \eta\right]. \tag{5.29}$$

$a_1 + c < x < l$:

$$M_x = \frac{pca}{l} x' - \frac{pca}{2f} y = \frac{pca}{2}(2\xi' - \eta). \tag{5.30}$$

Momentul încovoietor maxim are loc în secțiunea în care

$$T_x = T_x^0 \cos\varphi - H \sin\varphi = 0,$$

de unde rezultă:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{T_x^0}{H}. \tag{5.31}$$

Pe intervalul $B - C$:

$$T_x^0 = -V_B = -\frac{pca}{l};$$

$$T_x = -V_B \cos\varphi - H \sin\varphi = -\frac{pca}{l}\cos\varphi - \frac{pca}{2f}\sin\varphi = 0$$

și deci

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2f}{l},$$

care se interpretează foarte simplu în diagramă: momentul maxim pe intervalul $B - C$ neîncărcat al arcului are loc în secțiunea unde tangenta la arc este paralelă cu coarda $B - C$, indiferent de natura și de lungimea încărcării pe partea $A - C$.

Pe intervalul $A - C$, în porțiunea încărcată ($a_1 < x < a_1 + c$):

$$T_x^0 = V_A - p(x - a_1) = \frac{pcb}{l} - p(x - a_1)$$

și formula (5.31) dă:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2f}{l} \cdot \frac{b}{a}\left[1 - \frac{}{cb}(x - a_1)\right]. \tag{5.32}$$

Pentru o curbă dată, din (5.32) se găsește ecuația care-l dă pe x.

Pentru parabolă:

Avem $\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x)$, și introducînd în ecuația (5.32) obținem secțiunea de moment maxim pe zona încărcată:

$$\xi = \frac{x}{l} = \frac{\frac{b}{a} + \frac{la_1}{ca} - 2}{\frac{l^2}{ca} - 4}. \tag{5.33}$$

În cazul particular, cînd $a_1 = 0$, și deci

$$a = \frac{c}{2}; \quad b = l - \frac{c}{2},$$

formula (5.33) devine :

$$\xi = \frac{x}{l} = \frac{2 \cdot \frac{l}{c} - 3}{2\left[\left(\frac{l}{c}\right)^2 - 2\right]},$$

și dacă se notează $\gamma = \frac{c}{l}$ și se fac transformările necesare, se obține relația :

$$\xi = \frac{\gamma\left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)}{1 - 2\gamma^2}. \tag{5.34}$$

În acest caz, momentul în secțiunea x pe porțiunea încărcată se obține dacă se fac înlocuirile respective în formula (5.29) :

$$M_x = \frac{pl^2}{2}\xi\left[2\gamma\left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) - \xi(1 - 2\gamma^2)\right]. \tag{5.35}$$

Momentul maxim pe porțiunea încărcată se obține dacă în (5.35) se înlocuiește ξ cu valoarea (5.34) :

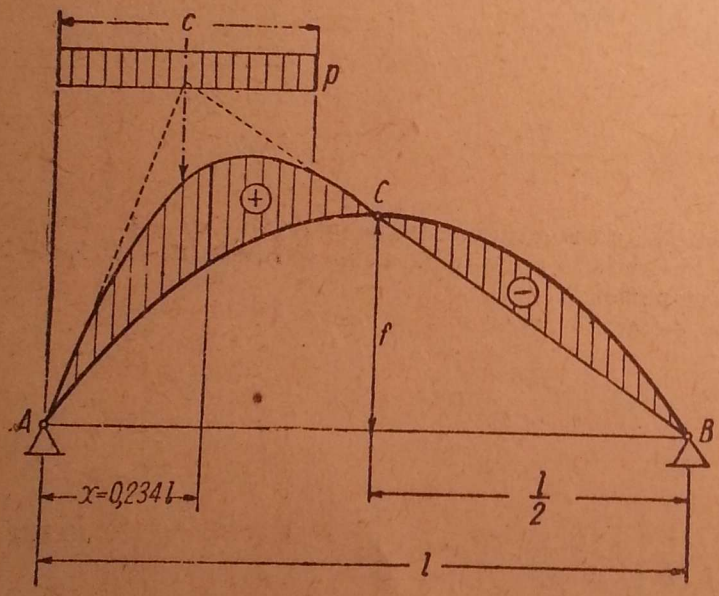


Fig. 278.

$$M_{max} = \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{\gamma^2\left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)^2}{1 - 2\gamma^2}, \tag{5.36}$$

iar momentul maxim pe porțiunea neîncărcată $B - C$ are loc la jumătatea distanței $B - C$. Valoarea se se obține din (5.30), unde se introduc elementele geometrice :

$$a = \frac{c}{2}; \quad \xi' = \frac{1}{4}$$

și $$\eta = 4\,\xi\xi' = \frac{3}{4};$$

$$M_{max} = -\frac{1}{16}\,pc^2. \tag{5.37}$$

Aplicația 65. Să se determine care este lungimea c de încărcare pe arcul parabolic din fig. 278 pentru a obține cel mai mare moment pe arc, în ce secțiune și ce valoare are acesta.

Răspuns. Momentul maxim pe porțiunea încărcată este dat de expresia (5.36) din aplicația precedentă.

Anulînd derivata :

$$\frac{dM_{max}}{d\gamma} = 0, \tag{5.38}$$

se obține γ căutat și, deci, lungimea $c = \gamma l$ căutată.

Condiția (5.38) conduce la ecuația :

$$3\gamma^3 - 3\gamma + 1 = 0, \tag{5.39}$$

a cărei soluție convenabilă este $\gamma = 0{,}395$.

Secțiunea cu moment maxim este dată de formula (5.34), unde, introducînd $\gamma = 0{,}395$, se obține :

$$\xi = 0{,}234,$$

iar momentul maxim este dat de relația (5.36), unde, introducînd pe γ, se obține :

$$M_{max} = \frac{1{,}205}{64} pl^2. \tag{5.40}$$

Pe porțiunea neîncărcată $B - C$ vom avea valoarea maximă dată de relația (5.37) cînd $c = 0{,}395\, l$:

$$M_{max} = -\frac{0{,}624}{64} pl^2. \tag{5.41}$$

Dacă se încarcă porțiunea $l - c$, se vor găsi aceleași valori, dar cu semne schimbate, astfel că momentul maxim dat de expresia (5.40) trebuie considerat că poate avea loc, atît pozitiv, pentru încărcarea pe lungimea c începînd de la A, cît și negativ, pentru încărcarea pe lungimea $l - c$, începînd de la B.

În practică se ia $\gamma = 0{,}4\, l$ și se consideră că M_{max} are loc în secțiunea $\xi = 0{,}25$, și atunci rezultă :

Pe porțiunea de lungime $c = 0{,}4\, l$ din $A - C$:

$$M_{max} = \pm \frac{1{,}2}{64} pl^2. \tag{5.40'}$$

Pe porțiunea $B - C$:

$$M_{max} = \mp \frac{0{,}64}{64} pl^2 = \mp \frac{1}{100} pl^2. \tag{5.41'}$$

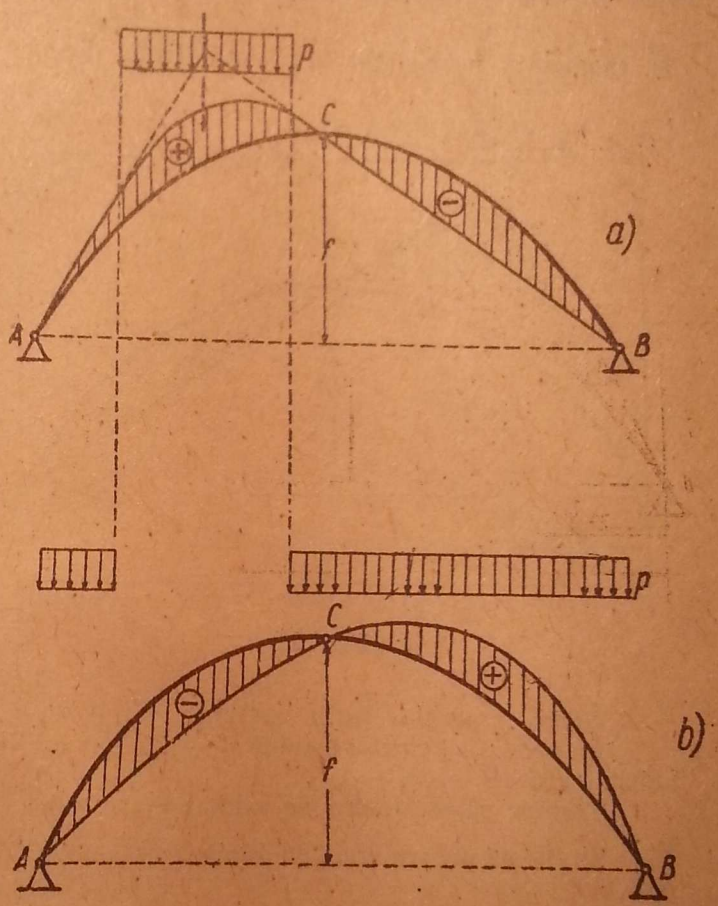


Fig. 279.

Rezultă că momentul maxim pe porțiunea încărcată este cu 20% mai mare decît dacă se încarcă arcul pe jumătate.

Aplicația 66. Cum sînt momentele încovoietoare pe arcul parabolic încărcat ca în fig. 279, *a* și *b*?

Răspuns. Momentele încovoietoare sînt egale și de sens contrar, pentru că dacă se suprapun încărcările, momentele încovoietoare trebuie să fie nule.

Aplicația 67. Să se găsească expresiile momentelor încovoietoare pe arcul simetric din fig. 280 încărcat cu o forță concentrată verticală în secțiunea *i*.

Răspuns :

$$V_A = \frac{Pb}{l}; \quad V_B = \frac{Pa}{l}; \quad H = \frac{Pa}{2f}.$$

Pe intervalul $A - i \quad (x < a)$:

$$M_x = \frac{Pb}{l} x - Hy = P \cdot \frac{a}{2} \left(2 \frac{b}{a} \xi - \eta \right). \tag{5.42}$$

Pe intervalul $i - B \quad (x > a)$:

$$M_x = \frac{Pa}{l} x' - Hy = P \cdot \frac{a}{2} (2\xi' - \eta). \tag{5.43}$$

În dreptul forței:

$$M_i = \frac{Pa}{2} \left(2 \frac{b}{l} - \eta_i \right). \tag{5.44}$$

Arc parabolic:

unde

$$\eta_i = 4\alpha \cdot (1 - \alpha),$$

$$\alpha = \frac{a}{l}$$

și momentul încovoietor în dreptul forței devine:

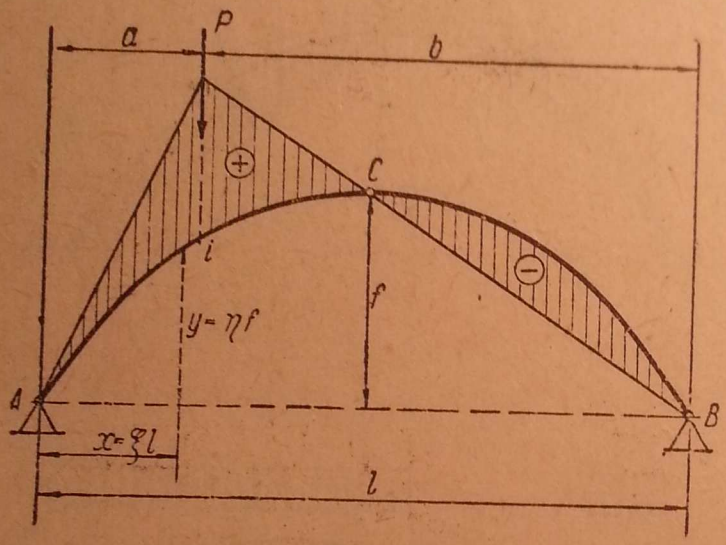


Fig. 280.

$$M_i = Pl\alpha (1 - \alpha) (1 - 2\alpha). \tag{5.45}$$

Poziția forței pentru momentul maxim pe arcul parabolic se obține din relația

$$\frac{dM_i}{d\alpha} = 0,$$

care dă ecuația:

$$6\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0,$$

cu soluția valabilă:

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = 0{,}211,$$

pe care, introducînd-o în (5.45), se obține:

$$M_{max} = \frac{\sqrt{3}}{18} Pl = 0{,}0962 Pl = \frac{1}{10{,}4} Pl. \tag{5.46}$$

Forța P se găsește în secțiunea $a = 0{,}211\ l$.

Să vedem ce poziție trebuie să ocupe forța P, pentru ca momentul să fie maxim pe partea neîncărcată $(B - C)$.

Trebuie să se determine maximul expresiei (5.43) pentru η dat de parabolă.

Se știe că pentru arcul prrabolic acest maxim are loc la $\xi' = \frac{1}{4}$; atunci

$$\eta = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

și, deci,

$$M = \frac{Pl\alpha}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) = - \frac{Pl}{8} \alpha.$$

Valoarea maximă a lui α pentru care este valabilă formula (5.43) pe intervalul $B-C$ este $\alpha = 0{,}5$, deci:

$$M_{max} = - \frac{Pl}{16} = - 0{,}0625\ Pl \tag{5.47}$$

și are loc pentru poziția forței P chiar în articulația C.

Aplicația 68. Să se găsească momentele încovoietoare pe un arc simetric supus la o încărcare orizontală uniform distribuită pe verticală ca în fig. 281.

Răspuns:

$$V_A = -\frac{pf^2}{2l}; \quad V_B = \frac{pf^2}{2l}; \quad H_A = -\frac{3}{4}pf; \quad H_B = \frac{1}{4}pf.$$

Pe intervalul $A - C$:

$$M_x = -\frac{pf^2}{2}\left(\xi - \frac{3}{2}\eta + \eta^2\right). \tag{5.48}$$

Pe intervalul $B - C$:

$$M_x = \frac{pf^2}{4}(2\xi' - \eta). \tag{5.49}$$

Dacă porțiunile AC și BC sînt drepte, se obține $\eta = 2\xi$ pe intervalul $A - C$, și $\eta = 2\xi'$ pe intervalul $B - C$. Deci,
pe intervalul $A - C$:

$$M_x = + pf^2\xi(1 - 2\xi)$$

cu valoarea maximă

$$M_{max} = \frac{1}{8}pf^2$$

la $\xi = \frac{1}{4}$.

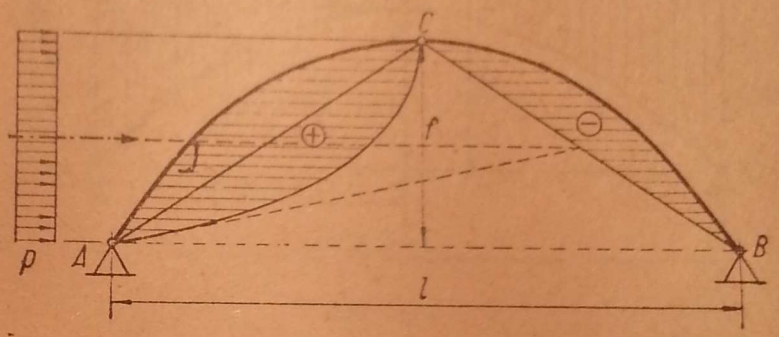


Fig. 281.

Pe intervalul $B - C$ avem $M = 0$.

Dacă arcul are *formă de parabolă*:

$$\eta = 4\xi\xi',$$

momentele încovoietoare la $\xi = \frac{1}{4}$ și $\xi' = \frac{1}{4}$ sînt:

Pe intervalul $A - C$:

pentru $\xi = \frac{1}{4}$, avem $\eta = \frac{3}{4}$; formula (5.48) dă:

$$M_{1/4} = \frac{5}{32}pf^2, \tag{5.50}$$

valoare cu 25% mai mare decît pe o grindă simplu rezemată verticală de deschidere f.

Pe intervalul $B - C$:

pentru $\xi' = \frac{1}{4}$, avem $\eta = \frac{3}{4}$; formula (5.49) dă:

$$M_{3/4} = -\frac{1}{16}pf^2. \tag{5.50'}$$

Aplicația 69. În articulația C a unui arc de formă oarecare se introduc două momente M, ca în fig. 282.

Care sînt valorile eforturilor într-o secțiune x?

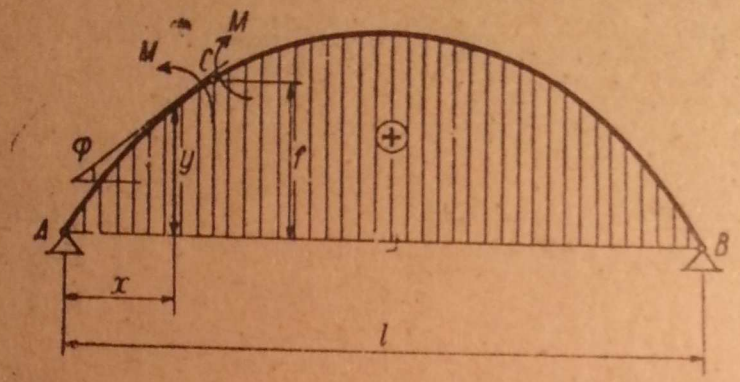


Fig. 282.

Răspuns:

$$V_A = V_B = 0; \quad H = -\frac{M}{f};$$

$$N_x = \frac{M}{f}\cos\varphi; \quad T_x = \frac{M}{f}\sin\varphi;$$

$$M_x = \frac{M}{f}y = M\cdot\eta.$$

Aplicația 70. Să se găsească împingerea H, reacțiunile $V_A = V_B$ și ordonatele axei arcului de coincidență cu deschiderea $l = 30$ m și săgeata $f = 5$ m pentru încărcarea din fig. 283.

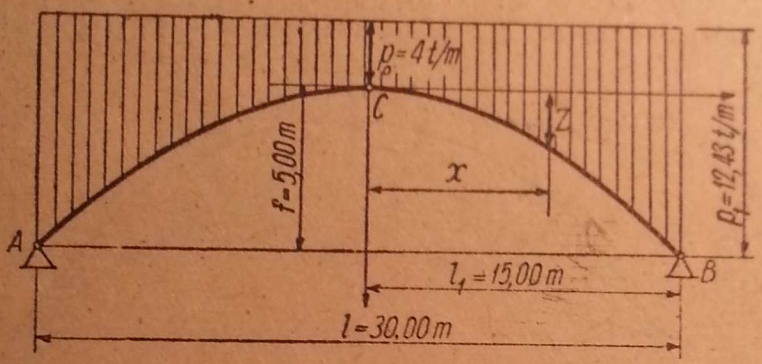


Fig. 283.

Răspuns. Se aplică formulele (5.18)–(5.20):

$$m = \frac{p_1}{p_0} = \frac{12{,}43}{4{,}0} = 3{,}1075.$$

În tabelele de funcțiuni hiperbolice se găsește:
$k = \operatorname{arg\,ch}\, m = \operatorname{arg\,ch}\, 3{,}1075 = 1{,}80$.

Apoi, cu formulele (5.18)–(5.20):

$$H = \frac{p_0 l_1^2 (m-1)}{f\cdot k^2} = \frac{4\cdot 15^2\cdot 2{,}1075}{5\cdot 1{,}8^2} = 117{,}083 \text{ t};$$

$$V_A = V_B = \frac{p_0 l_1}{k}\operatorname{sh} k = \frac{4\cdot 15}{1{,}8}\,2{,}94217 = 98{,}072 \text{ t}.$$

Ordonatele arcului măsurate de la orizontala dusă prin C sînt:

$$z = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\xi_1 - 1) = \frac{f}{2{,}1075}(\operatorname{ch} 1{,}80\,\xi_1 - 1)$$

sau

$$\eta = \frac{z}{f} = \frac{\operatorname{ch} 1{,}80\,\xi_1 - 1}{2{,}1075} \qquad (a)$$

și se obțin dînd lui ξ_1 valori între 0 și 1.

În lipsa tabelelor cu linii hiperbolice se pot folosi și expresiile (5.23), în care se poate pune:

$$\beta_2 = 0{,}1\, m_0 = 0{,}1\,(m-1) = 0{,}1\cdot 2{,}1075 \cong 0{,}21.$$

$$\beta_1 = 1 - \beta_2 = 0{,}79,$$

deoarece $m = 3{,}1075 < 5$.

Se găsesc astfel valorile aproximative:

$$H = \frac{p_0 l_1^2}{2f}\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{6} + \frac{\beta_2 m_0}{15}\right) = \frac{4 \cdot 15^2}{2 \cdot 5}\left(1 + \frac{0{,}79 \cdot 2{,}1075}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}21 \cdot 2{,}1075}{15}\right) = 117{,}630 \text{ t};$$

$$V_A = V_B = p_0 l_1\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{3} + \frac{\beta_2 m_0}{5}\right) = 4 \cdot 15\left(1 + \frac{0{,}79 \cdot 2{,}1075}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}21 \cdot 2{,}1075}{5}\right) = 98{,}610 \text{ t}$$

și ordonatele

$$\eta = \frac{z}{f} = \xi_1^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{6}\xi_1^2 + \frac{\beta_2 m_0}{15}\xi_1^4\right)}{\left(1 + \frac{\beta_1 m_0}{6} + \frac{\beta_2 m_0}{15}\right)} = \frac{1}{1{,}307}\xi_1^2 (1 +$$

$$+ 0{,}2775\,\xi_1^2 + 0{,}0295\,\xi_1^4). \qquad \text{(b)}$$

În tabela 6 sînt date rapoartele $\frac{z}{f} = \eta$ și ordonatele z calculate cu formulele (a) și (b pentru $\xi_1 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1$.

Tabela 6

	ξ_1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
(a)	η	0,0311	0,128	0,305	0,583	1
	z cm	15,50	64,00	152,5	291,5	500,0
(b)	η	0,03095	0,128	0,304	0,582	1
	z cm	15,47	64,00	152,0	291,0	500,0

Atît reacțiunile H și $V_A = V_B$, cît și ordonatele z, diferă cu mai puțin decît 1% prin înlocuirea formulelor (5.18)—(5.20) cu formulele (5.23). Această corespondență se menține pentru $m < 5$, dacă se ia $\beta_2 = 0{,}1\ m_0$.

Aplicația 71. Să se găsească pleoștirea $\frac{f}{l}$ care dă soluția de arc parabolic cu trei articulații cu minimum de material, cînd este încărcat cu o sarcină verticală uniform distribuită pe orizontală (fig. 284) [1]).

[1]) Din *I. M. Rabinovici*, op. cit.

Răspuns. Arcul are numai forțe axiale cu valoarea :

$$N = -\frac{H}{\cos\varphi},$$

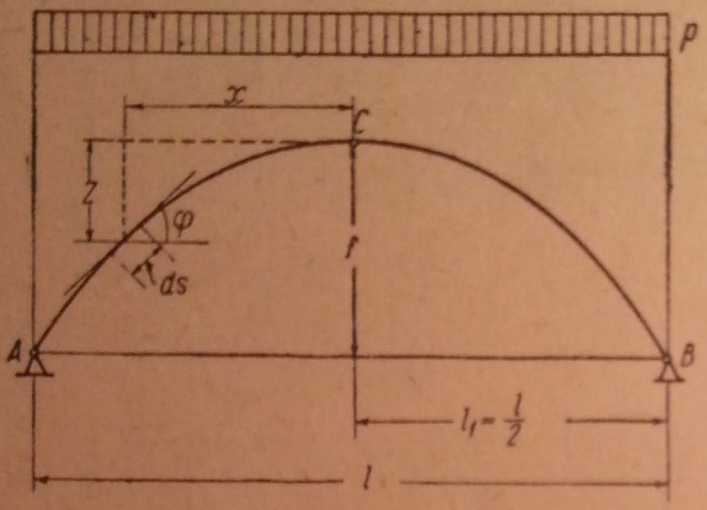


Fig. 284.

unde

$$H = \frac{M_c^0}{f}.$$

Pentru a avea toate secțiunile arcului cu același efort unitar σ, secțiunea A va avea valoarea dată de expresia :

$$A = \frac{N}{\sigma} = \frac{H}{\sigma\cos\varphi} = \frac{M_c^0}{f\sigma\cos\varphi}.$$

Elementul de volum al arcului va fi :

$$dV = A \cdot ds = \frac{M_c^0}{f\sigma} \cdot \frac{ds}{\cos\varphi} = \frac{M_c^0}{f\sigma} \cdot \frac{dx}{\cos^2\varphi} = \frac{M_c^0}{f\sigma}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] dx,$$

iar volumul total al arcului va fi :

$$V = 2\int_0^{l_1} dV = \frac{2M_c^0}{f\sigma}\int_0^{l_1}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] dx.$$

La parabolă avem :

$$z = \frac{f}{l_1^2}x^2 \quad \text{și} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2f}{l_1^2}x$$

de unde rezultă :

$$V = \frac{2M_c^0}{f\sigma} l_1\left[1 + \frac{4}{3}\left(\frac{f}{l_1}\right)^2\right] = \frac{M_c^0}{\sigma}\left[\left(\frac{l}{f}\right) + \frac{16}{3}\left(\frac{f}{l}\right)\right].$$

Pentru un material cu σ dat, volumul V va fi minim cînd derivata lui V în raport cu variabila $\frac{f}{l}$ se va anula, de unde rezultă condiția :

$$1 - \frac{16}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2 = 0$$

sau

$$\frac{f}{l} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2{,}31}.$$

§ 32. LINII DE INFLUENȚĂ LA ARCUL CU TREI ARTICULAȚII

A. METODA ANALITICĂ

Liniile de influență ale reacțiunilor și ale eforturilor la arcul cu trei articulații pentru o sarcină mobilă $P = 1$ verticală se obțin din reprezentarea grafică a expresiilor analitice ale acestor reacțiuni și eforturi.

a) Liniile de influență ale reacțiunilor

1. *Liniile* V'_A *și* V'_B. Sînt chiar liniile reacțiunilor la o grindă simplu rezemată, așa cum rezultă din expresia (5.10) (fig. 285).

2. *Linia* $H' = \frac{H}{\cos \alpha}$. Din expresia :

$$H' = \frac{M_c^0}{f'}$$

rezultă că linia H' este linia momentului încovoietor în secțiunea C a unei grinzi simplu rezemate, împărțită prin săgeata $f' = f \cos \alpha$ (fig. 285).

3. *Liniile* V_A *și* V_B. Din expresiile :

$$V_A = V'_A + H' \sin \alpha = V'_A + \frac{M_c^0}{f} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$V_B = V'_B - H' \sin \alpha = V'_B - \frac{M_c^0}{f} \operatorname{tg} \alpha,$$

rezultă că va trebui să se suprapună linia de influență a lui V'_A cu cea a lui H' multiplicată cu $\sin \alpha$ (fig. 285).

b) Liniile de influență ale eforturilor

1. *Linia* M_i. Din expresia :

$$M_i = M_i^0 - H'y' = M_i^0 - Hy$$

rezultă că trebuie să se suprapună peste linia de influență a lui M_i^0, construită pentru grinda simplu rezemată de deschidere l în secțiunea i, linia de influență a lui H multiplicată cu y.

Operația este efectuată în fig. 285.

Să determinăm punctul unde se întîlnesc cele două linii suprapuse, adică punctul de ordonată nulă al lui M_i.

Forța $P = 1$ este mereu în echilibru împreună cu reacțiunile R_A și R_B și, deci, este concurentă cu ele. Să presupunem că $P = 1$ se găsește între i și C. Atunci direcția reacțiunii din B este dreapta BC, și prin intersecția ei cu $P = 1$ va trece și reacțiunea din A. Momentul încovoietor în secțiunea i va fi produsul dintre reacțiunea R_A din A și distanța de la i la R_A. Pentru ca M_i să fie nul, trebuie ca R_A să treacă prin i. Deci, dacă pe verticala intersecției L a dreptelor BC și Ai se aplică $P = 1$, avem $M_i = 0$, și linia de influență M_i trebuie să aibă ordonata nulă în L', proiecția lui L.

Valorile ordonatelor pe reazeme rezultă din suprapunerea lui M_{ij}^0 cu $-Hy$.

În fig. 285 linia de influență M_i este redesenată de la o dreaptă de reper orizontală, care reprezintă conturul $A_1C_1B_1$ al primei linii desenate.

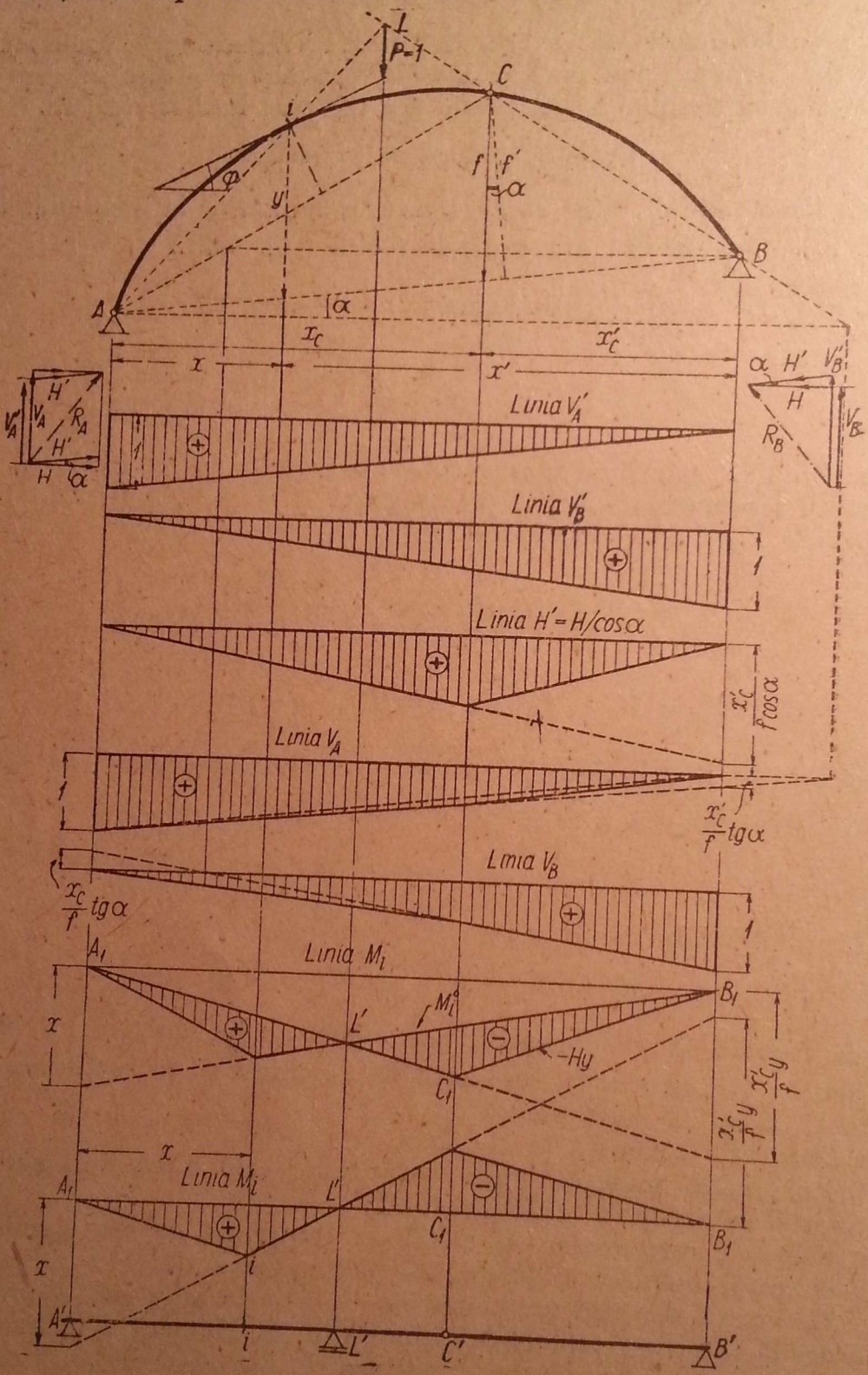


Fig. 285.

Se observă că linia M_i este identică cu a momentului încovoietor pe o grindă cu consolă și articulație, de deschidere $A' - L'$, consola $L' - C'$ și grinda independentă $C' - B'$.

2. *Linia* T_i. Din expresia :

$$T_i = T_i^0 \cos\varphi - H' \sin(\varphi - \alpha)$$

rezultă că la linia lui T_i^0 de pe grinda simplu rezemată, multiplicată cu cos φ,

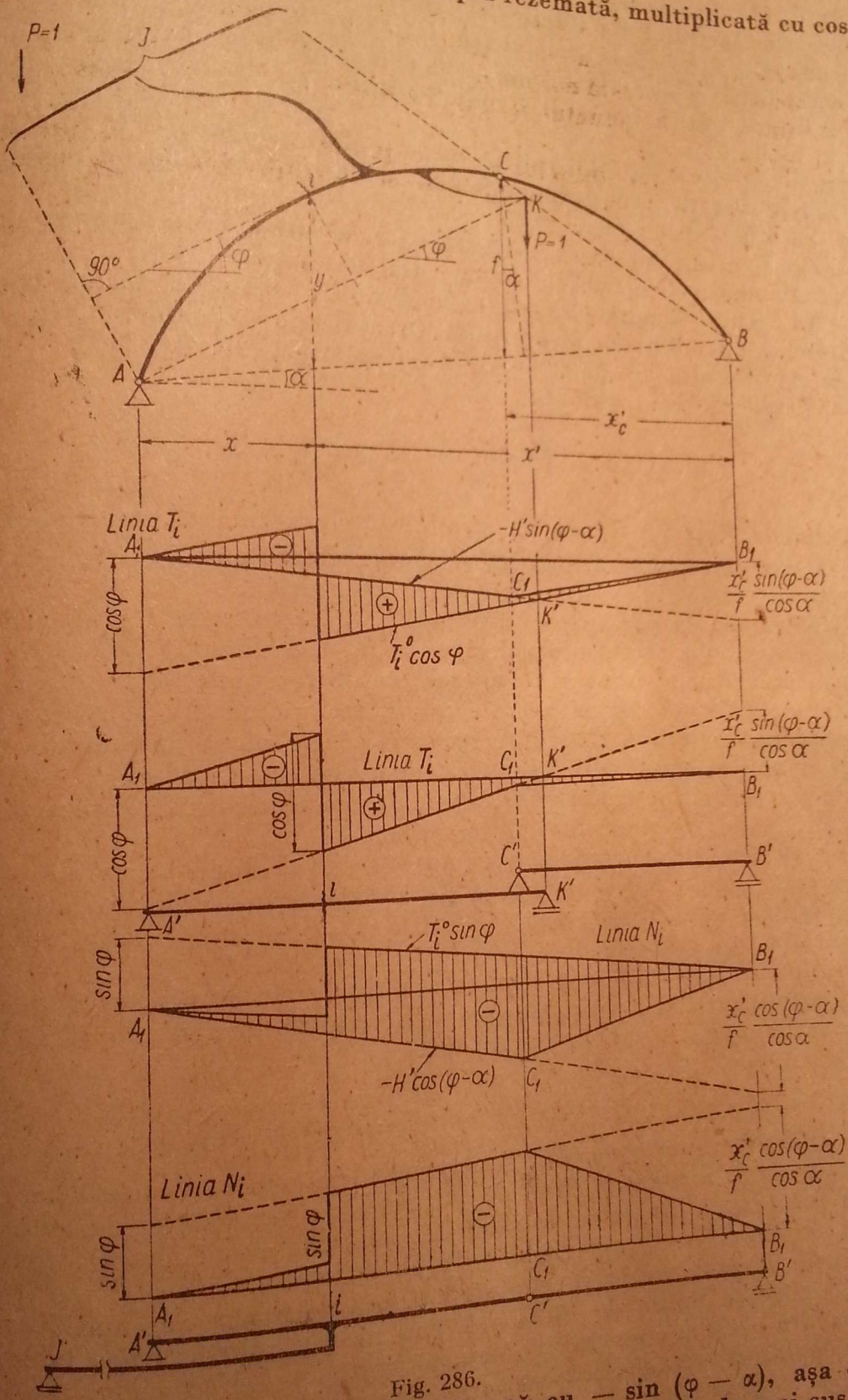


Fig. 286.

trebuie adăugată linia lui H', multiplicată cu $-\sin(\varphi - \alpha)$, așa cum se vede în fig. 286 ; ordonatele pe reazem reies din expresia de mai sus.

Punctul unde se întîlnesc cele două linii de influență, adică punctul de ordonată nulă al lui T_i se determină astfel :

Dacă $P=1$ se găsește între i și C, sau pe o consolă scoasă din acea regiune, direcția reacțiunii din B este BC, iar forța tăietoare din i este proiecția reacțiunii din A pe normala la curbă în i, și va fi nulă atunci cînd R_A va fi perpendiculară pe această normală. Deci, din A se duce o paralelă la tangenta din secțiunea i și în punctul K unde se întîlnește cu BC, dacă acționează $P = 1$, avem $T_i = 0$.

În cazul de față, punctul K fiind în afara zonei $i - C$, proiecția sa (punctul K') arată unde prelungirea liniei de influență de pe regiunea iC întîlnește linia sa de reper.

Linia T_i este redesenată în figură cu ordonatele de la o orizontală care reprezintă conturul $A_1C_1B_1$ al primei linii desenate.

Din figură rezultă că T_i este linia de influență a forței tăietoare multiplicată cu cos φ de pe o grindă dreaptă de deschidere $A'K'$ peste care se așază o altă grindă $C' - B'$ (v. și aplicația 20, fig. 113).

3. *Linia* N_i. Din expresia :

$$N_i = - T_i^0 \sin \varphi - H' \cos (\varphi - \alpha)$$

rezultă că la linia lui T_i^0 de pe grinda simplu rezemată, multiplicată cu $-$ sin φ, trebuie adăugată linia lui H', multiplicată cu $-$ cos $(\varphi - \alpha)$, așa cum este arătat în fig. 286, cu ordonatele respective.

Dacă și aici se presupune că $P = 1$ se găsește între i și C, sau pe o consolă scoasă din acest interval, atunci R_B are direcția BC și N_i va fi proiecția pe tangentă a lui R_A. Pentru a se obține punctul J unde trebuie aplicată forța $P = 1$, ca să avem $N_i = 0$, trebuie ca din A să se ducă o perpendiculară pe tangentă, și intersecția ei cu BC ne va da punctul J, care aici are numai o semnificație teoretică, deoarece este în afara arcului.

Linia N_i este redesenată de la o linie de reper orizontală care reprezintă conturul $A_1C_1B_1$ al primei linii N_i desenate.

Sub ea se găsește o grindă rezemată în A' și J' cu o consolă pe care este așezată grinda independentă $C' - B'$ și a cărei linie de influență a forței tăietoare în secțiunea i multiplicată cu sin φ este aceeași cu linia N_i construită (v. aplicația 20, fig. 114).

Liniile de influență atît pentru reacțiuni, cît și pentru eforturi, se obțin foarte ușor dacă se ține seamă de efectul de grindă simplu rezemată la care se adaugă efectul împingerii H'.

B. METODA DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Se aplică metoda generală : se suprimă legătura corespunzătoare reacțiunii sau efortului căutat și se dă o deplasare virtuală egală cu 1 după direcția respectivă. Deplasările liniei de încărcare după direcția constantă a forței mobile $P = 1$ reprezintă linia de influență.

În cele ce urmează se presupune că linia de încărcare coincide cu axa arcului, deoarece liniile de influență pentru sarcini transmise indirect se obțin tot din acestea cu corecțiile corespunzătoare lonjeroanelor respective.

La deplasări virtuale, reazemele vor fi reprezentate prin pendule pentru a pune în evidență caracteristicile lor cinematice.

a) Liniile de influență ale reacțiunilor cu ajutorul centrelor instantanee

1. *Linia* V'_A. Articulațiile din A și B se reprezintă prin pendule care să corespundă ipotezelor pentru reacțiuni. Astfel, reacțiunile V_A, V_B, H' au fost obținute în ipoteza că H' acționează după linia nașterilor, și V'_A și V'_B sînt verticale. În consecință, pendulele din A și B vor avea aceste direcții (fig. 287).

Se suprimă pendulul vertical din A. Centrele instantanee sînt : (I, II) în C și (II, T) în B. Centrul (I, T) se găsește odată pe direcția pendulului rămas în A, adică pe direcția $A - B$, iar altă dată, din combinația I, II, T

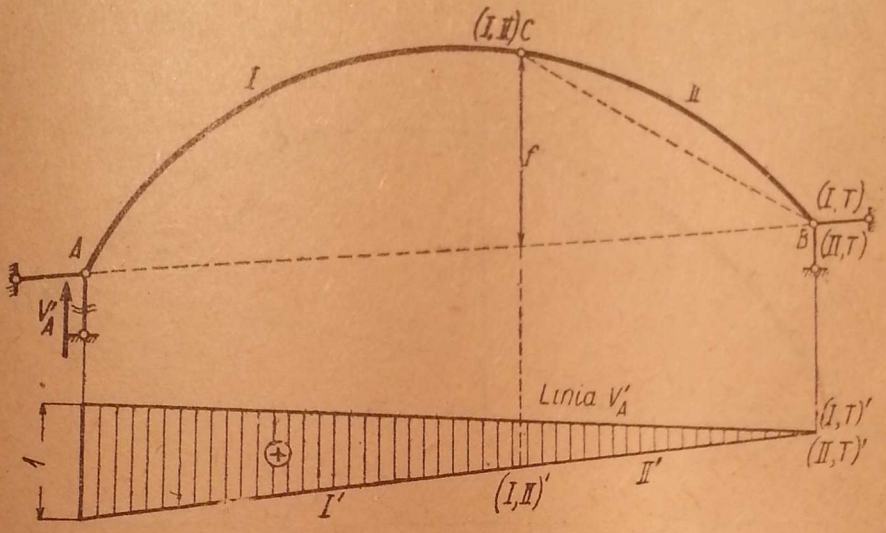


Fig. 287.

pe linia $(I, II) - (II, T)$, adică pe direcția BC, deci în B, suprapus peste (II, T). Se dă deplasarea egală cu 1 verticală de sens opus lui V'_A capătului A, și aceasta este linia de influență.

Cele două drepte I' și II' sînt în prelungire, pentru că au două puncte comune : centrele $(I, II)'$ și $(I, T)'$ suprapus peste $(II, T)'$.

2. *Linia* H' (fig. 288). Se suprimă pendulul din A corespunzător direcției $A-B$. Centrele (I, II) și (II, T) sînt evidente, iar centrul (I, T) se găsește odată pe direcția pendulului vertical din A, și altă dată, din combinația I, II și T pe linia $(I, II) - (II, T)$, adică pe BC. De altfel, nici nu avem nevoie de poziția lui exactă pe verticala din A, deoarece, oriunde ar fi, se proiectează pe linia de reper în același punct. Dînd lui A o deplasare unitară în sens opus lui H', punctul C se lasă în jos, astfel că linia de influență este pozitivă. Pentru scară vedem că deplasarea punctului A nu apare în epură, dar această deplasare avînd direcția dreptei $A - B$ poate fi considerată produsă de rotația relativă a corpurilor I și II în jurul centrului (I, II) și, deci,

$$u_{AB} = f' \cdot \theta_{I,II},$$

în care f' este perpendiculara din (I, II) pe $A - B$. Deoarece B stă pe loc, $u_{AB} = 1$, și deci :

$$\theta_{I,II} = \frac{u_{AB}}{f'} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f \cos \alpha}.$$

3. *Linia H.* Dacă se consideră H ca proiecție pe orizontală a lui H', $H = H' \cos \alpha$, linia de influență se obține din linia lui H' multiplicată cu $\cos \alpha$, dar dacă se consideră H ca provenind din sistemul de reacțiuni V_A, V_B, H_A, H_B unde V_A și V_B sînt verticale, iar $H_A = H_B$ au direcția orizontală prin A și prin B, atunci trebuie să punem pendulele în consecință (fig. 289).

Linia H va fi construită și pe această cale, pentru mai multă obișnuință cu analiza cinematică a legăturilor.

Se suprimă pendulul orizontal din A și centrele (I, II), (II, T) și (I, T) se găsesc exact ca în cazul precedent. Prin deplasarea lui A în sens opus lui H, punctul C se lasă în jos, deci linia H este pozitivă pe toată deschiderea.

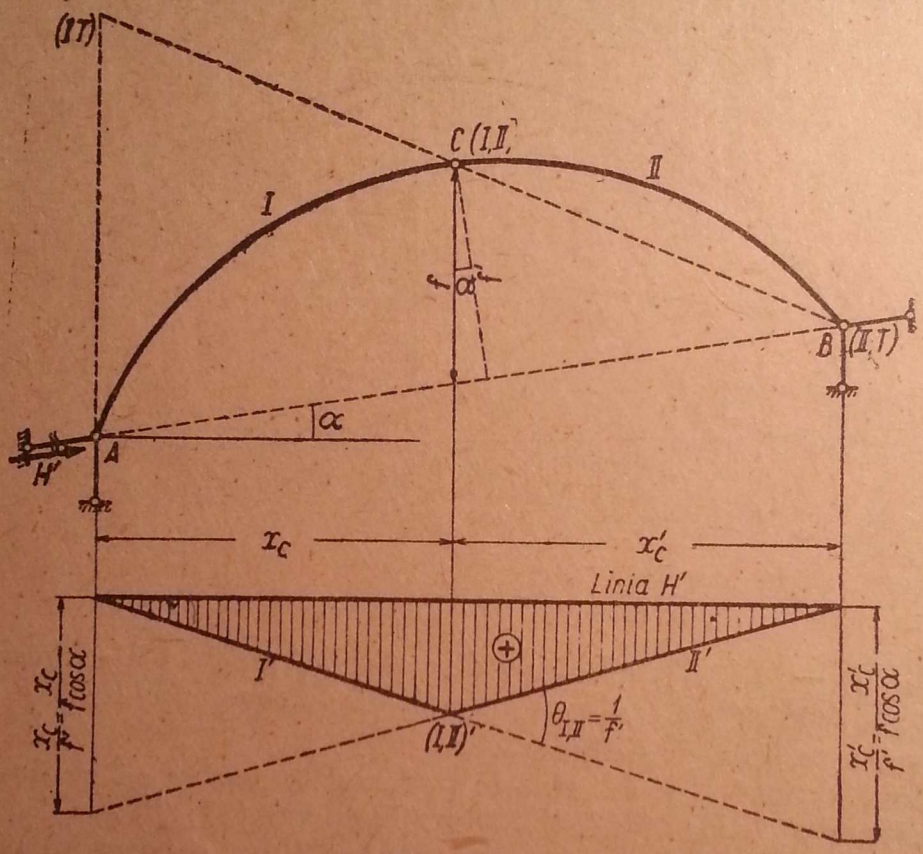


Fig. 288.

Pentru scară, deplasarea unitară a lui A nu apare în epură și nici nu se poate aplica direct cazul precedent, deoarece deplasarea lui A nu se face după direcția lui $A - B$. Se poate observa totuși în fig. 289, *a*, că pentru deplasarea 1 pe orizontală corespunde deplasarea $1 \cdot \cos \alpha$ pe direcția $A - B$ și, în acest caz, se obține o situație analogă celei precedente :

$$u_{AB} = 1 \cdot \cos \alpha = \theta_{I.II} \cdot f' ,$$

de unde rezultă :

$$\theta_{I.II} = \frac{\cos \alpha}{f'} = \frac{1}{f} ,$$

iar ordonata pe reazemul B a lui I' este :

$$x'_c \cdot \theta_{I.II} = \frac{x'_c}{f} .$$

Se poate proceda însă și direct, în felul următor :

Deplasarea lui A pe orizontală provine din rotația corpului I față de teren cu unghiul θ_I, în jurul lui (I, T), și este :

$$u = 1 = h\,\theta_I,$$

(fig. 289, *b*) unde h este distanța de la centrul (I, T) la deplasarea u, adică la orizontala din A.

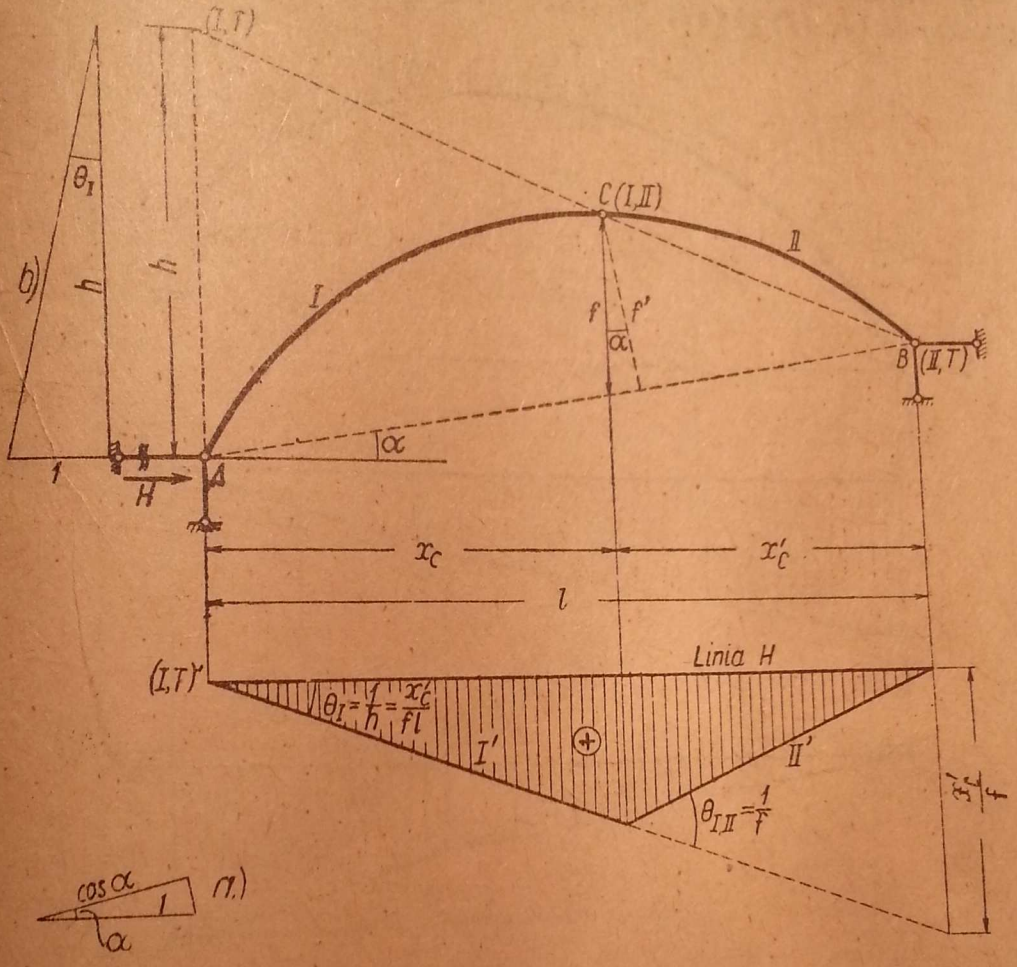


Fig. 289.

Rezultă :

$$\theta_I = \frac{1}{h}$$

și scara este astfel determinată.

Pentru a determina ordonatele în funcție de elementele geometrice precedente, din triunghiurile asemenea din figură rezultă :

$$\frac{f}{h} = \frac{x_c'}{l},$$

de unde :

$$\theta_I = \frac{1}{h} = \frac{x_c'}{f \cdot l}.$$

Ordonata lui I' pe reazemul B este :

$$\theta_I \cdot l = \frac{I x'_c}{f}$$

identică cu cea obținută anterior.

4. *Linia* V_A (fig. 290). Se suprimă pendulul vertical al lui A și centrele instantanee (I, II) și (II, T) sînt evidente. Centrul (I, T) se găsește odată

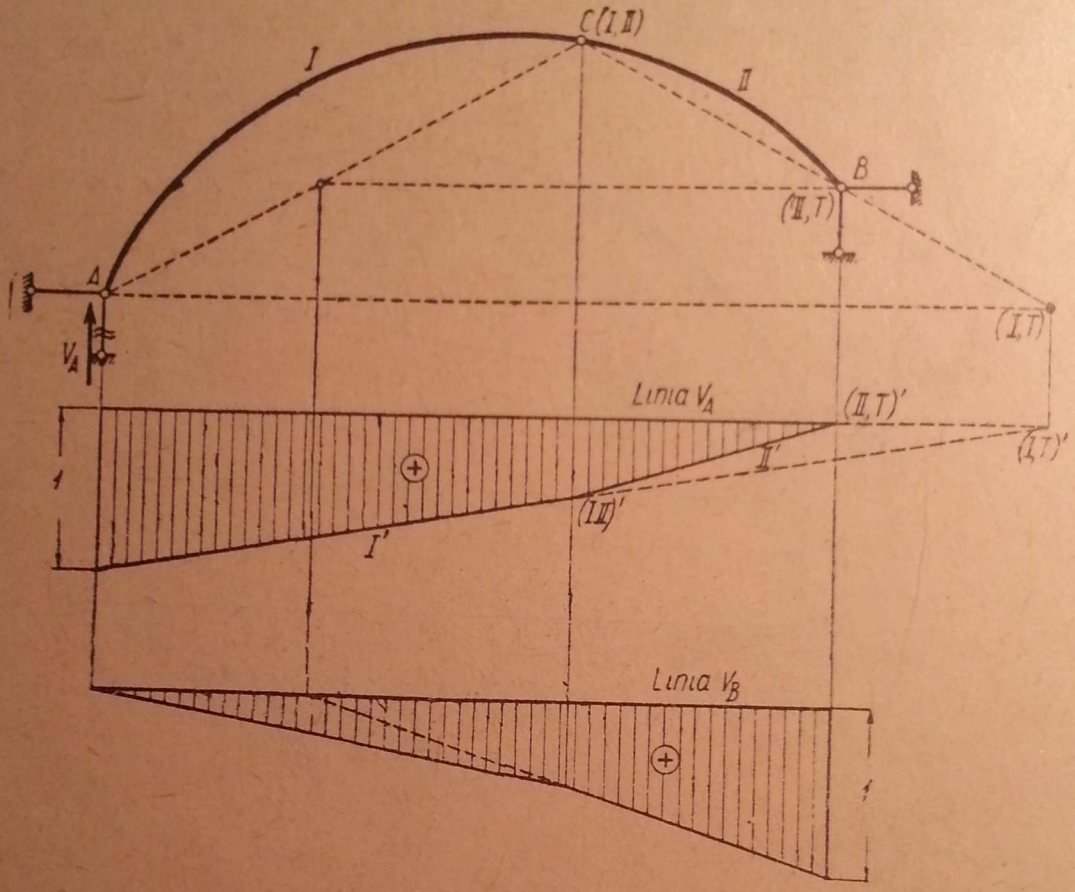


Fig. 290.

pe direcția pendulului orizontal rămas în A, iar altă dată din combinația I, II, T pe dreapta $(I, II) - (II, T)$, adică pe dreapta BC, deci la intersecția lor.

Linia de influență se obține dînd deplasarea unitară verticală lui A de sens contrar lui V_A, și această deplasare apare chiar în valoarea dată în epura deplasărilor.

Absolut analog se determină linia V_B (fig. 290) pentru care nu s-au notat centrele, ca să nu se confunde cu prima construcție.

Rezultă de aici că linia lui V_A este diferită de V'_A prin faptul că are o frîntură în dreptul articulației, deci nu este permis să se facă vreo confuzie între V'_A și V_A. Cele două linii coincid numai cînd (I, T) se suprapune peste (II, T), și aceasta se întîmplă numai cînd linia nașterilor $A - B$ este orizontală.

Aceleași observații sînt valabile pentru V_B și V'_B.

b) Liniile de influență ale eforturilor cu ajutorul centrelor instantanee

1. ***Linia M_i.*** Se suprimă legătura corespunzătoare momentului, adică se introduc în i o articulație și o pereche de momente M_i corespunzătoare. Sistemul obținut astfel este un mecanism cu un grad de libertate, care este identic cu patrulaterul clasic pe care au fost studiate deplasările virtuale, astfel încît centrele corpurilor I, II, III, T sînt evidente în fig. 291.

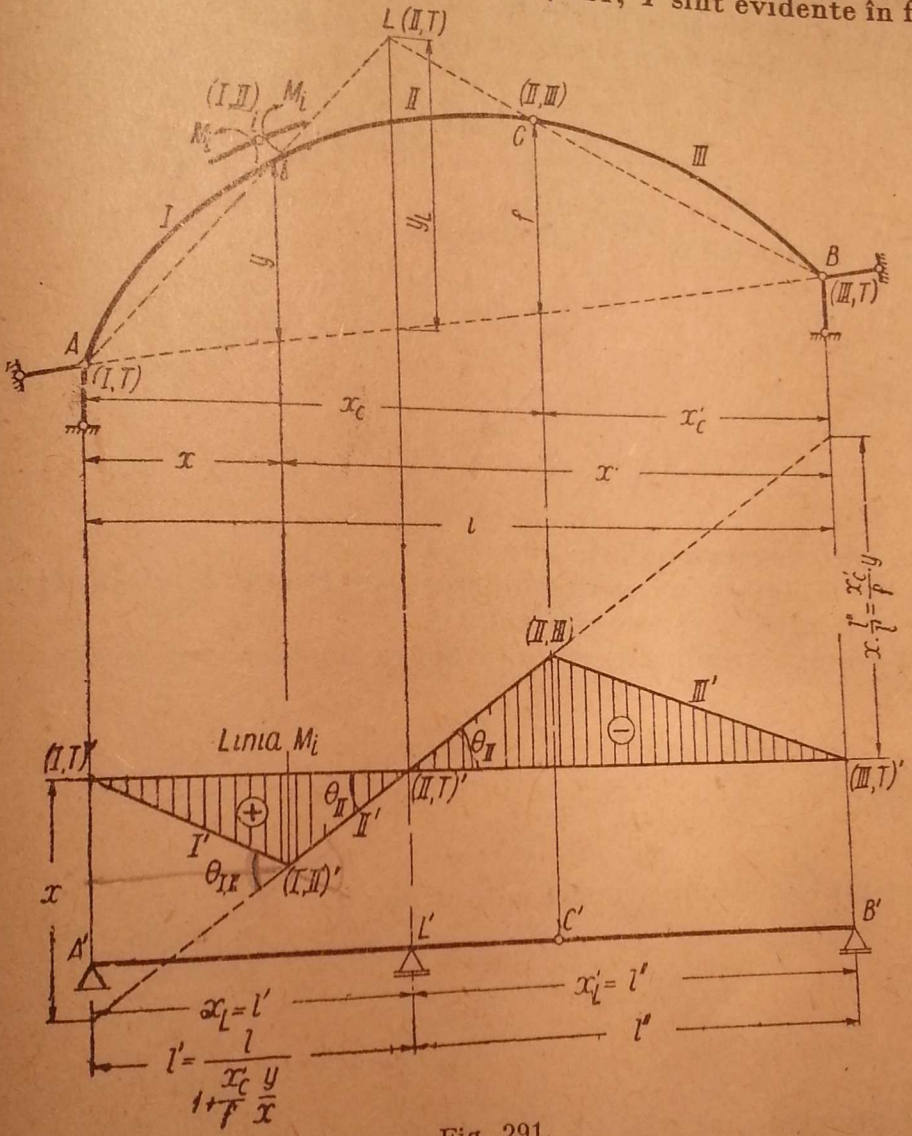


Fig. 291.

Dînd rotația $\theta_{I.II}=1$ în sens invers lui M_i, punctul i coboară, astfel că rezultă și semnele liniei de influență. Scara este complet determinată de valoarea $\theta_{I.II}=1$, de unde rezultă ordonata lui II' pe reazemul A egală cu $\theta_{I.II}\cdot x=x$, și de poziția centrului $(II,\ T)$ — același cu punctul L obținut pe cale analitică — proiectat în $(II,\ T)'$ pe linia de reper.

Linia de influență M_i este identică cu linia M_i pe o grindă de deschidere $A'L'=l'$ cu consola $L'C'$ și grinda independentă $C'B'$.

Ordonata lui II' pe verticala reazemului B este: $\theta_{II}\,l''$, unde θ_{II} se deduce din ordonata x a lui II' pe verticala reazemului A

$$\theta_{II}=\frac{x}{l'},$$

și deci ordonata lui II' pe verticala lui B este :

$$\theta_{II} l'' = x \cdot \frac{l''}{l'}.$$

Dacă vrem să determinăm această ordonată din coordonatele punctelor C și i, adică să regăsim expresia obținută pe cale analitică, din seria de triunghiuri asemenea din figură se poate scrie :

$$\frac{x}{l'} = \frac{y}{y_L} \quad \text{și} \quad \frac{l''}{x'_c} = \frac{y_L}{f},$$

pe care, multiplicîndu-le, se obține :

$$\frac{x}{x'_c} \cdot \frac{l''}{l'} = \frac{y}{f}$$

și, deci,

$$x \cdot \frac{l''}{l'} = \frac{x'_c}{f} y,$$

așa cum era cunoscut pe cale analitică.

Se poate determina și deschiderea ajutătoare l' în funcție de coordonatele articulației C și ale punctului i.

Din triunghiurile asemenea din epura deplasărilor avem :

$$\frac{l'}{x} = \frac{l''}{\frac{x'_c}{f} y} = \frac{l' + l''}{x + \frac{x'_c}{f} y} = \frac{l}{x + \frac{x'_c}{f} y},$$

iar din primul și ultimul raport se obține :

$$l' = \frac{l}{1 + \frac{x'_c}{f} \cdot \frac{y}{x}}. \tag{5.51}$$

Cînd punctul i se găsește foarte aproape de reazemul A, direcția Ai nu se poate trasa cu precizie, iar L se depărtează de arc, astfel încît folosirea centrului (II, T) nu mai este recomandabilă. În acest caz, însă, centrul (I, III) devine ușor de trasat prin intersecția dreptelor AB cu Ci (fig. 292), și epura deplasărilor se începe cu III', pe care se proiectează (I, III) în $(I, III)'$; acesta se unește cu $(I, T)'$ și apoi se trage și II' prin $(II, III)'$ și $(I, II)'$.

2. *Linia* T_i (fig. 293). Se suprimă legătura corespunzătoare forței tăietoare, adică se introduce mecanismul celor două pendule paralele cu tangenta în i la arc, care permite numai deplasări după normală. Pendulele se consideră de lungime infinit mică, astfel încît fețele secțiunii din stînga și din dreapta lui i se vor proecta în stînga și în dreapta aceluiași punct de pe linia de reper.

Se formează corpurile *I*, *II* și *III*. Centrele (*I*, *T*), (*II*, *III*) și (*III*, *T*) sînt evidente. Centrul (*I*, *II*) se găsește la intersecția pendulelor, adică la infinit pe direcția tangentei în *i*, astfel că în timpul deplasărilor *I* și *II* rămîn paralele.

Să determinăm centrul (*II*, *T*). Din combinația *II*, *III*, *T*, el se va găsi pe dreapta (*II*, *III*) — (*III*, *T*), adică pe dreapta *BC*. Din combinația *I*, *II*, *T* se va găsi pe paralela din (*I*, *T*) la dreapta pe care se găsește la infinit (*I*, *II*), adică pe paralela din *A* la tangenta în secțiunea *i*. Cele două drepte determină centrul (*II*, *T*) care este chiar punctul *K* determinat la liniile de influență pe cale analitică.

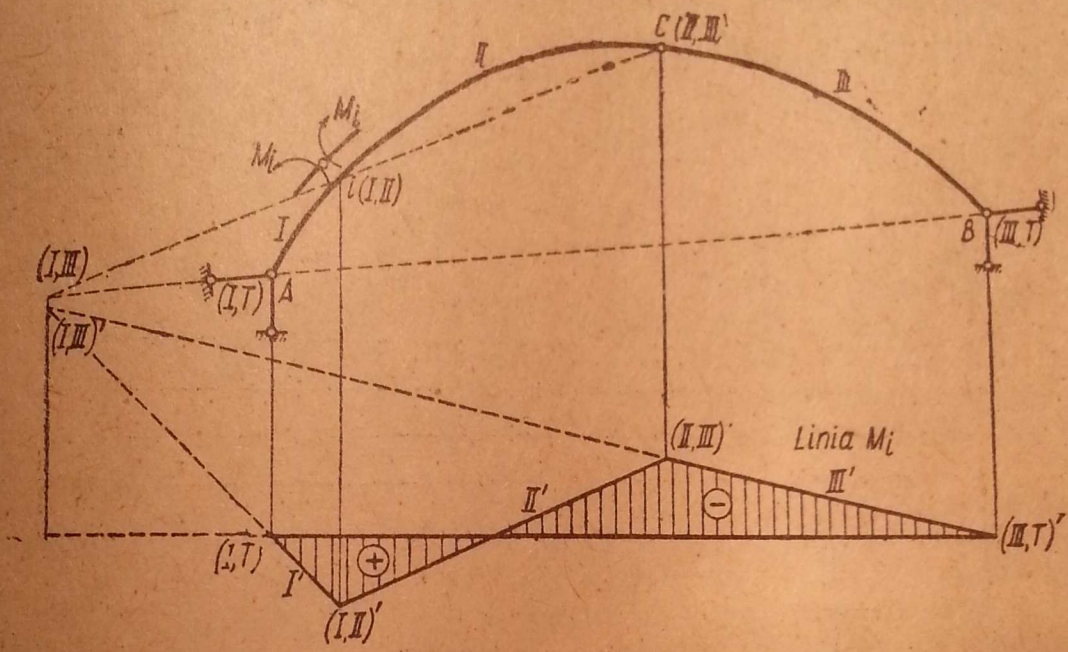


Fig. 292.

Depărtînd cele două fețe din *i* cu cantitatea 1 în sens opus forței tăietoare, partea *I* se ridică, astfel că din $(I,T)'$ se duce dreapta I' în sus, prin $(II, T)'$ se duce II' paralelă la I', și apoi, III' prin $(III, T)'$ și $(II, III)'$.

Pentru scară se observă (fig. 293, *a*) că dacă cele două fețe din *i* s-au depărtat cu cantitatea 1 după normală, atunci proiecția pe verticală a acestei deplasări este cos φ, care se pune în epură între corpurile I' și II' și, astfel, scara este determinată.

Ordonata lui II' pe verticala lui *A* este cos φ, iar pe verticala lui *B* este $x_k' \cdot \theta_{II}$, unde :

$$\theta_{II} = \frac{\cos \varphi}{x_k} \quad \text{și} \quad x_k' \cdot \theta_{II} = \frac{x_k'}{x_k} \cos \varphi.$$

Dacă această valoare trebuie determinată numai în funcție de coordonatele lui *C* și *i*, se observă că

$$y_k = x_k (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha),$$

și apoi, din triunghiurile asemenea :

$$\frac{x_k'}{y_k} = \frac{x_c'}{l}$$

și înlocuind pe y_k cu valoarea de mai sus, se obține :

$$\frac{x'_k}{x_k\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{x'_c}{f}.$$

Ținînd seamă că

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi \cos\alpha},$$

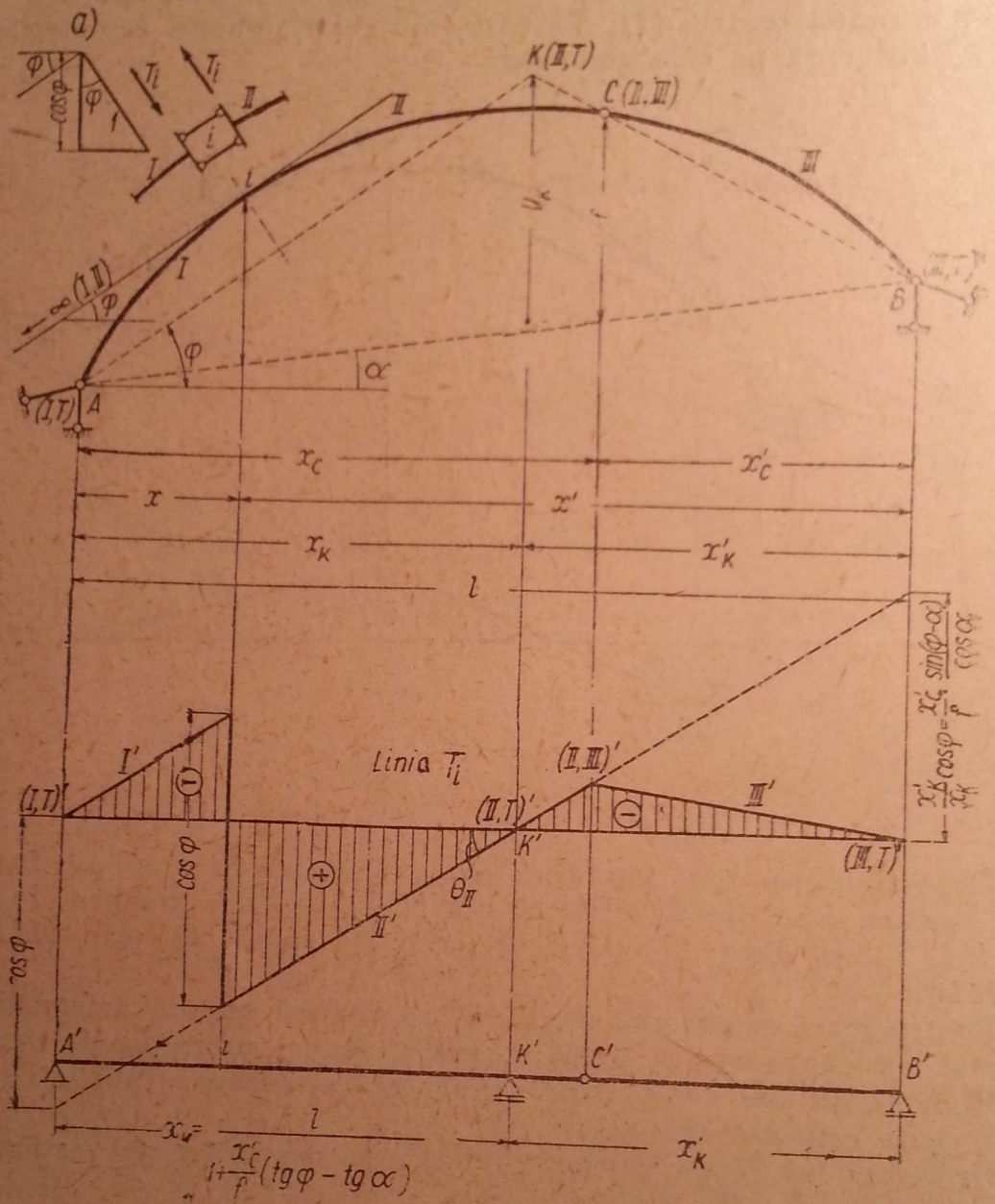


Fig. 293.

rezultă :

$$\frac{x'_k}{x_k}\cos\varphi = \frac{x'_c}{f} \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha},$$

valoare cunoscută de la linia de influență pe cale analitică.

Așa cum am văzut și pe cale analitică, linia T_i este linia T_i multiplicată cu $\cos\varphi$ de pe o grindă dreaptă de deschidere $A' - K'$, cu consola $K' - C'$ și grinda independentă $C' - B'$.

Dacă trebuie determinată și deschiderea x_k a acestei grinzi independente în funcție de coordonatele lui C și i, din triunghiurile asemenea din epura deplasărilor, rezultă :

$$\frac{x_k}{\cos\varphi} = \frac{x_k'}{\frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}} = \frac{x_k + x_k'}{\cos\varphi + \frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}},$$

dar $x_k + x_k' = l$, și din primul și ultimul raport se obține :

$$x_k = \frac{l}{1 + \frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi\cos\alpha}} = \frac{l}{1 + \frac{x_c'}{f}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha)}. \qquad (5.52)$$

Rezultă din expresia (5.52) că pentru $\varphi = \alpha$, adică în secțiunea i unde tangenta este paralelă cu linia nașterilor, $x_k = l$, adică linia de influență a forței tăietoare este aceeași ca la grinda dreaptă de deschidere l în secțiunea i, dar multiplicată cu $\cos\alpha = \cos\varphi$, iar în cazul cînd $\alpha = 0$, aceasta se întîmplă pentru secțiunea cu tangenta orizontală ; în acea secțiune linia T este exact ca la o grindă simplu rezemată de deschidere l.

3. *Linia* N_i (fig. 294). Se suprimă legătura corespunzătoare forței axiale, adică în i se introduce mecanismul celor două pendule infinit mici și infinit apropiate paralele cu normala în i, care permite celor două fețe ale secțiunii din i să aibă numai deplasări după tangentă.

Centrele (I, T), (II, III), (III, T) sînt evidente. Centrul (I, II) se găsește la intersecția celor două pendule din i, adică la infinit pe normala în i la axa arcului, astfel încît în cursul deplasărilor corpurile I și II rămîn paralele.

Centrul (II, T) se găsește odată pe direcția BC din combinația II, III, T, iar altă dată, din combinația I, II, T trebuie să se găsească pe dreapta $(I, T) - (I, II)$, adică pe paralela din (I, T) la dreapta pe care se găsește la infinit (I, II), deci pe paralela din A la normala în i. Cele două drepte determină prin intersecție centrul (II, T), care este punctul J de la construcția lui N_i pe cale analitică.

Prin depărtarea celor două fețe cu cantitatea 1, astfel încît N_i să producă lucru mecanic negativ, corpul I se rotește în sens invers acelor unui ceasornic în jurul lui (I, T), deci prin $(I, T)'$ se duce dreapta I' în sus, iar prin $(II, T)'$, paralela la ea. Se proiectează apoi (II, III) în $(II, III)'$ și, unind cu $(III, T)'$, se obține și dreapta III'. Linia de influență are ordonate negative.

Dacă avem dubiu la început asupra sensului de rotație al corpului I sau II, se face verificarea ulterior. Astfel, se vede că prin depărtarea fețelor din secțiunea i, corpul II se rotește față de III în sens invers acelor unui ceasornic în jurul lui (II, III) ; aceeași situație există și în epura deplasărilor. Dacă se ține III' fix, II' se rotește față de el cu unghiul $\theta_{II,III}$, în jurul lui $(II, III)'$ în sens invers acelor unui ceasornic.

Pentru determinarea scării se observă în fig. 294, *a* că pentru o deplasare a celor două fețe după direcția tangentei cu cantitatea 1, proiecția pe verticală a acelei depărtări, care apare în epura deplasărilor, este $\sin\varphi$. Astfel, scara este determinată. Ordonata lui II' pe reazemul A este $\sin\varphi$, iar pe reazemul B este $\theta_{II}\cdot x_j'$, unde

$$\theta_{II} = \frac{\sin\varphi}{x_j},$$

$$\theta_{II}\cdot x_j' = \frac{x_j'}{x_j}\sin\varphi.$$

Linia de influență N_i poate fi asimilată cu linia lui T_i pe o grindă dreaptă cu consolă și articulație de forma din figură ($A' - j'' - C' - B'$), multiplicată cu sin φ.

Dacă vrem să găsim expresia analitică a ordonatei lui II pe verticala lui B în funcție de coordonatele lui C și i, avem :

$$y_j = x_j (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha) ;$$

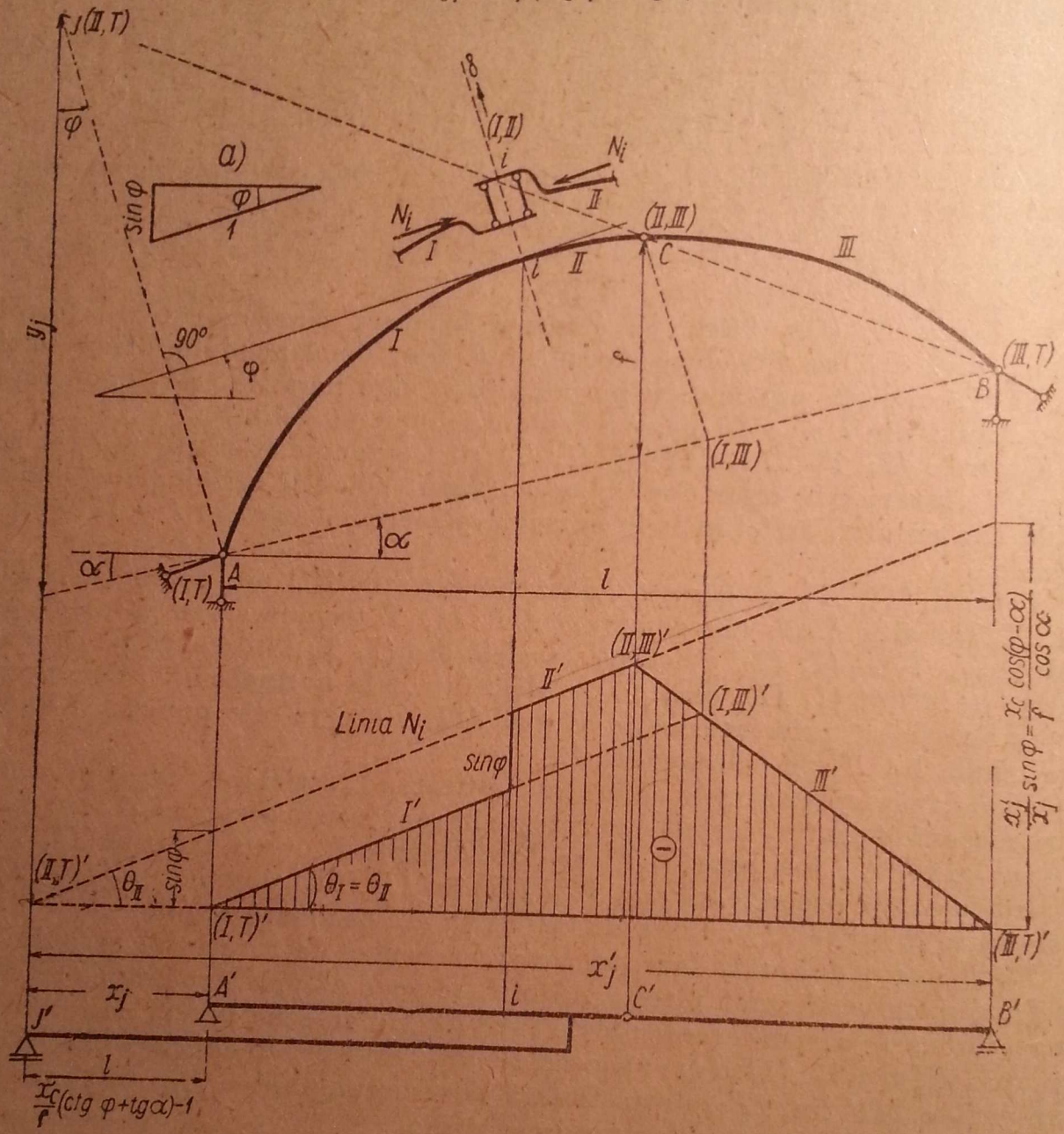


Fig. 294.

apoi, din triunghiurile asemenea se obține :

$$\frac{x'_j}{y_i} = \frac{x'_c}{f}$$

și introducînd valoarea lui y_j de mai sus, rezultă :

$$\frac{x'_j}{x_j (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{x'_c}{}$$

Ținînd seamă că :

$$\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi\cos\alpha},$$

se obține :

$$\frac{x_j'}{x_j}\sin\varphi = \frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha},$$

care este expresia cunoscută de la metoda analitică.

Dacă vrem să găsim și deschiderea x_j a grinzii ajutătoare $A' - j'$, dată în funcție de coordonatele lui C și i, din triunghiurile asemenea din epură găsim :

$$\frac{x_j}{\sin\varphi} = \frac{x_j}{\frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}} = \frac{x_j' - x_j}{\frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha} - \sin\varphi},$$

dar $x_j' - x_j = l$ și, deci,

$$x_j = \frac{l}{\frac{x_c'}{f}\cdot\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha\sin\varphi} - 1} = \frac{l}{\frac{x_c'}{f}(\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha) - 1}. \qquad (5.52)$$

Punctul J (centrul II, T) iese de obicei din cadrul desenului, așa că folosirea lui nu este practică. Centrul (I, III) permite desenarea lesnicioasă a liniei lui N_i. Centrul (I, III) se găsește odată pe dreapta $A - B$ din combinația I, III, T și altă dată pe paralela din C (II, III) la normala din i, din combinația I, II, III. Dreptele I' și III' trebuie să se întîlnească în $(I, III)'$, care este pe verticala lui (I, III). Epura se poate construi astfel : se duce întîi III'. Apoi se proiectează (I, III) în $(I, III)'$ pe III'. Se unește $(I, T)'$ cu $(I, III)'$ și se obține dreapta I', apoi din $(II, III)'$ se duce paralela la I' și se obține astfel și II'.

Distanța dintre cele două paralele I' și II' este $\sin\varphi$ și aceasta determină scara.

Liniile de influență cu ajutorul deplasărilor virtuale au soluții foarte clare, ele au însă inconvenientul față de cele determinate analitic că la fiecare linie de influență în parte trebuie desenat din nou arcul, pentru a-i găsi centrele instantanee.

c) Linii de influență prin diagrama vitezelor (deplasărilor)

Liniile de influență se pot determina și prin diagrama vitezelor așa cum s-a procedat la grinzile cu zăbrele. Se dă mai jos un exemplu.

Linia M_i (fig. 295). Se introduce articulația în i, și sistemului cinematic astfel format i se determină diagrama deplasărilor. Corpul $A - i$ are centrul de rotație în A și corpul $C - B$, în B.

Se dă o deplasare arbitrară lui i, care, rabătut, se va găsi pe dreapta Ai. Se ia această deplasare egală cu Ai și i' se suprapune peste A. Punctul C este legat de punctul fix B, așa că C' se va găsi și pe paralela din i' la BC, dar C este legat și de i, așa că C' se va găsi pe paralela din i' la iC, și unde întîlnește pe BC se va găsi C' (adică din A) la iC. Deci, din A se duce paralela la iC, și unde întîlnește pe BC se va găsi C'

Se iau proiecțiile pe orizontală ale deplasărilor lui i și C, care sînt δ_i și δ_c și se pun în ordonate în dreptul lui i și C. Se observă că δ_i este spre stînga lui i, pe cînd δ_c este spre dreapta lui C, deci ordonatele respective vor avea semne contrarii.

Se determină astfel ordonatele liniei de influență a lui M_i.

Pentru scară, se poate folosi rezultatul anterior, care arată că ordonata pe verticala lui A a dreptei $C''i''$ este x, și, în consecință, ordonatele δ_i și δ_c, ca și toate ordonatele liniei de influență, vor fi măsurate la această scară.

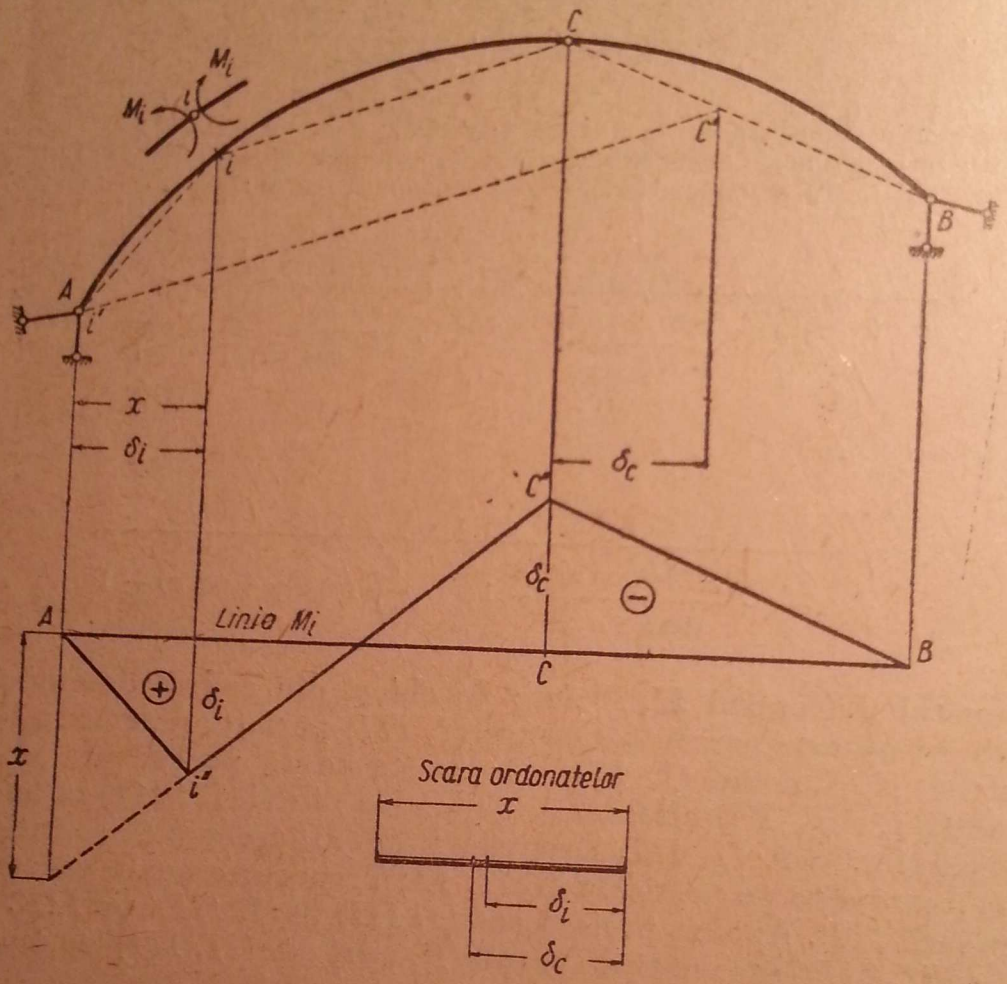


Fig. 295.

Această construcție este convenabilă pentru punctele i apropiate de nașterile A sau B ale arcului.

C. LINII DE INFLUENȚĂ ALE MOMENTELOR LA LIMITELE SÎMBURELUI CENTRAL

Liniile de influență servesc pentru aflarea situației celei mai dezavantajoase din punctul de vedere al eforturilor în secțiunea considerată. Situația aceasta este dată de valoarea eforturilor unitare σ în secțiune. La construcțiile în care solicitarea importantă era încovoierea, situația cea mai defavorabilă pentru σ era dată de situația cea mai defavorabilă pentru momentul încovoietor datorită expresiei :

$$\sigma = \frac{M}{I} y,$$

381

iar la barele supuse numai la forțe axiale, situația lui σ_{max} era dată de N_{max}, datorită expresiei :

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

La arce, însă, unde trebuie să se țină seamă pentru σ, atît de M, cît și de N, prin expresia :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y \tag{5.53}$$

situația devine mai complicată, deoarece nu se știe dacă σ_{max} se obține prin așezarea convoiului în poziția de N_{max}, sau prin așezarea convoiului în poziția de M_{max}, sau într-o poziție intermediară, astfel încît ar trebui făcute încercări în mai multe situații.

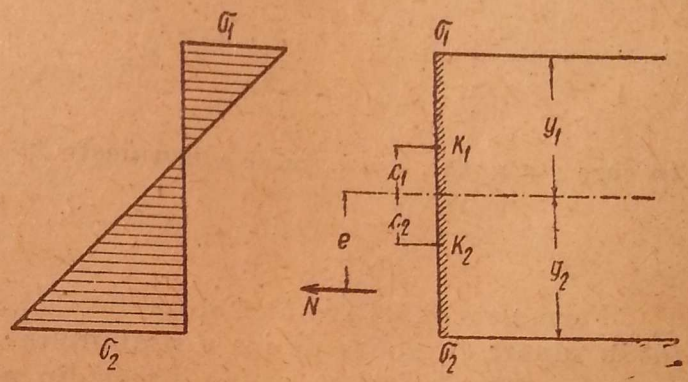


Fig. 296.

La arcele alcătuite din materiale omogene, la care se poate aplica suprapunerea liniară a efectelor și pentru eforturile unitare, adică la care se poate aplica expresia (5.53), pentru determinarea lui σ_{max}, situația se poate simplifica prin introducerea noțiunii de „*momente la limitele sîmburelui central*". Se ajunge la această noțiune în felul următor (fig. 296).

Dacă e este excentricitatea forței normale N, momentul încovoietor în axa arcului este $M = Ne$, și eforturile unitare maxime pe secțiune σ_1 și σ_2 sînt date de expresiile (v. fig. 296) :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} - \frac{N \cdot e}{I} \cdot y_1 = \frac{N \cdot y_1}{I}\left(\frac{I}{Ay_1} - e\right), \\ \sigma_2 &= \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{I} \cdot y_2 = \frac{N \cdot y_2}{I}\left(\frac{I}{Ay_2} + e\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

Dacă punctele k_1 și k_2 sînt limitele sîmburelui central situate la distanțele c_1 și c_2 de axă, cînd N se găsește în k_2, adică $e = c_2$, avem $\sigma_1 = 0$, de unde rezultă :

$$c_2 = \frac{I}{Ay_1},$$

iar dacă N se găsește în k_1, adică $-e = c_1$, avem $\sigma_2 = 0$, de unde rezultă :

$$c_1 = \frac{I}{Ay_2},$$

astfel că relațiile (5.54) se pot scrie :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Ny_1}{I}(c_2 - e),\\ \sigma_2 &= \frac{Ny_2}{I}(c_1 + e).\end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

Dacă se notează :

$$M_{k_1} = N(e + c_1),$$
$$M_{k_2} = N(e - c_2),$$

adică momentele forței normale N în raport cu limitele sîmburelui central k_1 și k_2 rezultă :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{M_{k_2}}{I}\cdot y_1 = -\frac{M_{k_2}}{W_1},\\ \sigma_2 &= +\frac{M_{k_1}}{I}\cdot y_2 = \frac{M_{k_1}}{W_2},\end{aligned}\right\} \tag{5.56}$$

în care s-a notat, așa cum se obișnuiește în Rezistența Materialelor :

$$\frac{I}{y_1} = W_1 \quad \text{și} \quad \frac{I}{y_2} = W_2.$$

Formulele (5.56) arată că σ_1 (pe fața de sus) se obține direct din momentul în raport cu limita de jos a sîmburelui central (M_{k_2}) împărțit prin W_1, iar σ_2 (pe fața de jos) se obține direct din momentul în raport cu limita de sus a sîmburelui central (M_{k_1}) împărțit prin W_2, adică expresii analoge celor de la încovoierea simplă.

Aceasta înseamnă că se obține $\sigma_{1\,max}$, cînd vom avea $M_{k_2\,max}$, și $\sigma_{2\,max}$, cînd vom avea $M_{k_1\,max}$. Deci, în loc să lucrăm cu M și N, vom lucra cu M_{k_1} și M_{k_2}, deoarece maximele lor determină direct eforturile unitare σ_2 și σ_1 maxime.

În acest scop se vor construi liniile de influență ale momentelor la limitele sîmburelui central M_{k1} și M_{k2} și, așezînd convoiul în poziția cea mai dezavantajoasă pentru ele, se obține direct situația cea mai dezavantajoasă pentru σ_2 și σ_1.

Aceste linii de influență se obțin foarte ușor, fie pe cale analitică, fie prin deplasări virtuale.

Pe cale analitică, în expresia

$$M_i = M_i^0 - Hy,$$

în locul coordonatelor x și y ale centrului i al secțiunii, se introduc coordonatele x_{k_1}, y_{k_1}, respectiv x_{k_2}, y_{k_2}, ale punctelor k_1 și k_2 din secțiune, și vom avea :

$$M_{k_1} = M_{k_1}^0 - H\cdot y_{k_1},$$
$$M_{k_2} = M_{k_2}^0 - H\cdot y_{k_2}.$$

Prin deplasări virtuale în loc să se introducă articulația în centrul i al secțiunii, se introduce în k_1 pentru linia lui M_{k_1}, și în k_2 pentru linia lui M_{k_2}.

Fig. 297 reprezintă liniile de influență ale momentelor M_{k1} și M_{k2}. Ele se desenează de obicei împreună, deoarece nu se intersectează. La arcele pleoștite se obișnuiește să se considere secțiuni verticale în locul secțiunilor normale pe axă, și, în acest caz, $x_{k1} = x_{k2} = x_i$ pentru toate punctele secțiunii i; ceea ce diferă este numai y.

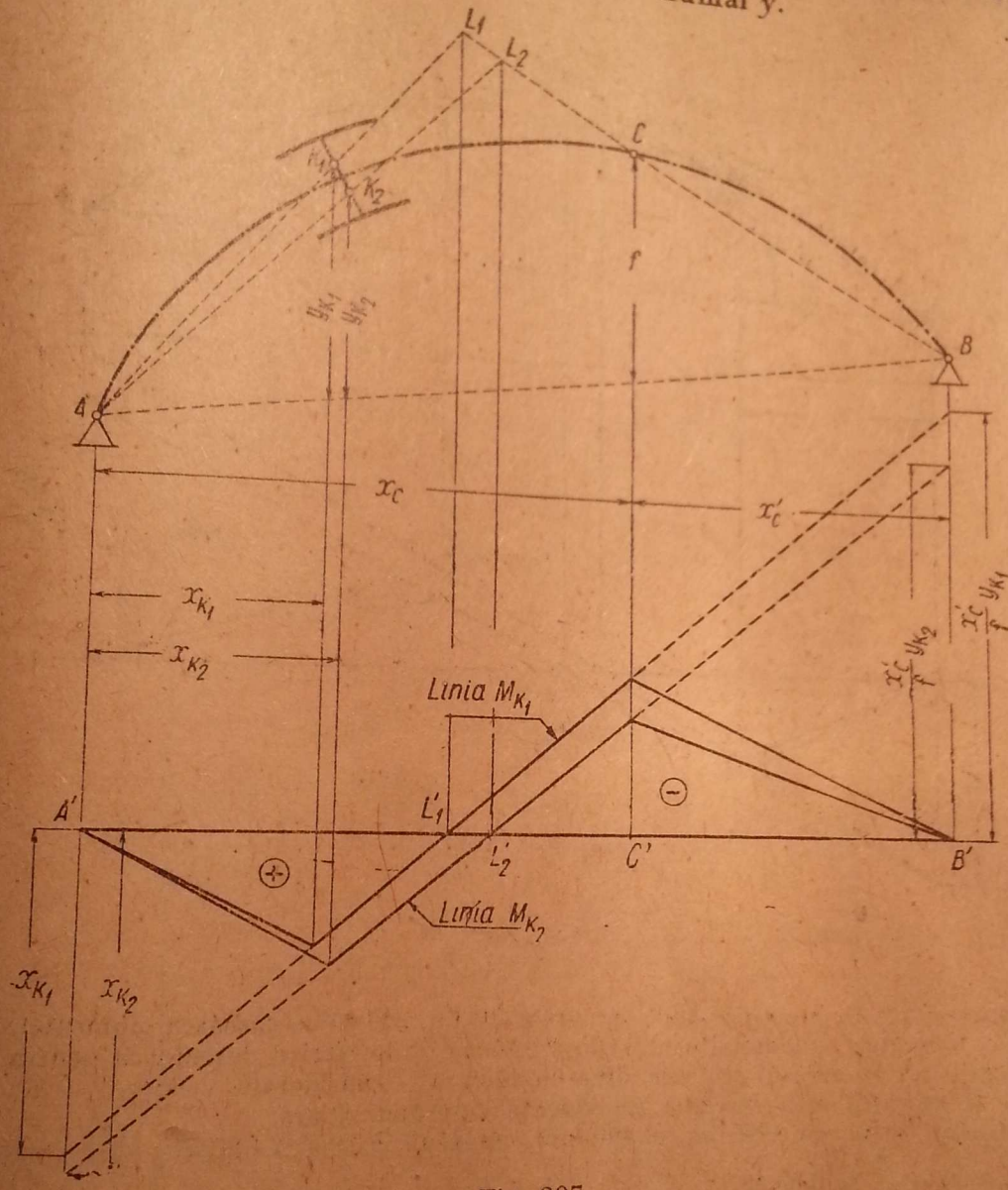


Fig. 297

Liniile de influență M_{k1} și M_{k2} în acest caz arată ca în fig. 298.

Pentru a construi aceste linii de influență trebuie să se cunoască înălțimea și forma secțiunii, spre a determina punctele k_1 și k_2. La secțiuni dreptunghiulare $c_1 = c_2 = \frac{h}{6}$, adică sîmburele central cuprinde treimea mijlocie a secțiunii.

Cînd curba de presiune rămîne în interiorul treimii mijlocii pe toată lungimea arcului, σ nu schimbă semnul fiind mereu negativ (compresiune). Aceasta este condiția cerută bolților care nu pot prelua întinderi (bolți de piatră, de cărămidă, de beton simplu).

În cele de mai sus nu s-a ținut seamă că prin trecerea de la axa secțiunii la limitele sîmburelui central, sarcinile presupuse aplicate pe axă pot trece de pe o parte pe alta în raport cu noile puncte. Aceasta are o influență foarte mică, și în practică nu se ține seamă de ea. Evident, aceasta este cu atît mai valabil, cu cît bolta este mai subțire și mai pleoștită.

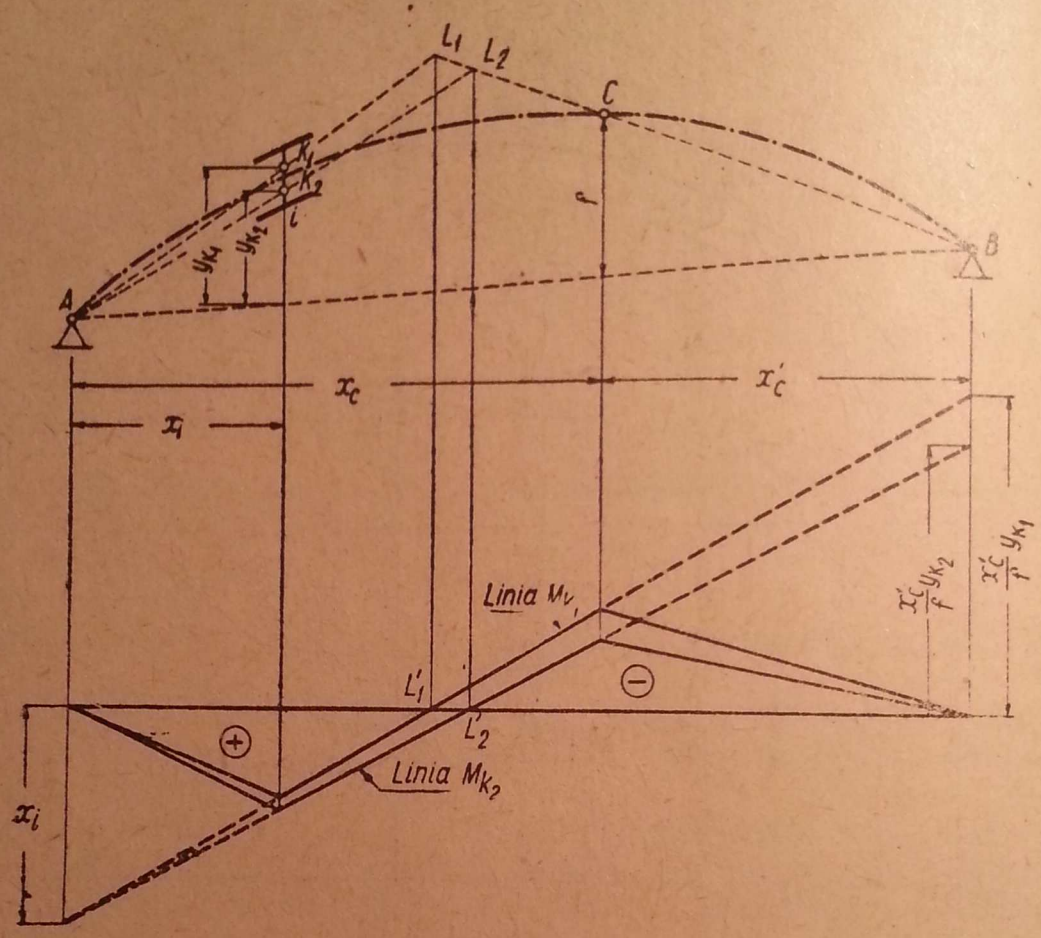


Fig. 298

Aplicația 72. La arcul parabolic cu datele din fig. 299 să se găsească momentele maxime și minime la limitele sîmburelui central în secțiunea de la sfertul deschiderii pentru convoiul din aplicația 10. În această secțiune dreptunghiulară — considerată verticală — $h = 1{,}20$ m. Să se găsească apoi sarcinile echivalente corespunzătoare.

Răspuns. Secțiunea este dreptunghiulară, omogenă, astfel că limitele sîmburelui central sînt : $c_1 = c_2 = \frac{h}{6} = 0{,}20$ m.

Ordonata y_i a axei parabolice la sfertul parabolei este :

$$y_i = \frac{4f}{l^2} xx' = 4f\xi\xi' = \frac{3}{4} f = \frac{3}{4} \cdot 3{,}60 = 2{,}70 \text{ m}$$

și

$$y_{k_1} = 2{,}70 + 0{,}20 = 2{,}90 \text{ m},$$

$$y_{k_2} = 2{,}70 - 0{,}20 = 2{,}50 \text{ m}.$$

Dacă se notează :

$$\eta = \frac{y}{f}; \qquad \xi = \frac{x}{l}; \qquad \xi' = \frac{x'}{l},$$

rezultă :

$$\eta_{1k_1} = \frac{2{,}90}{3{,}60} = 0{,}805,$$

$$\eta_{1k_2} = \frac{2{,}50}{3{,}60} = 0{,}695.$$

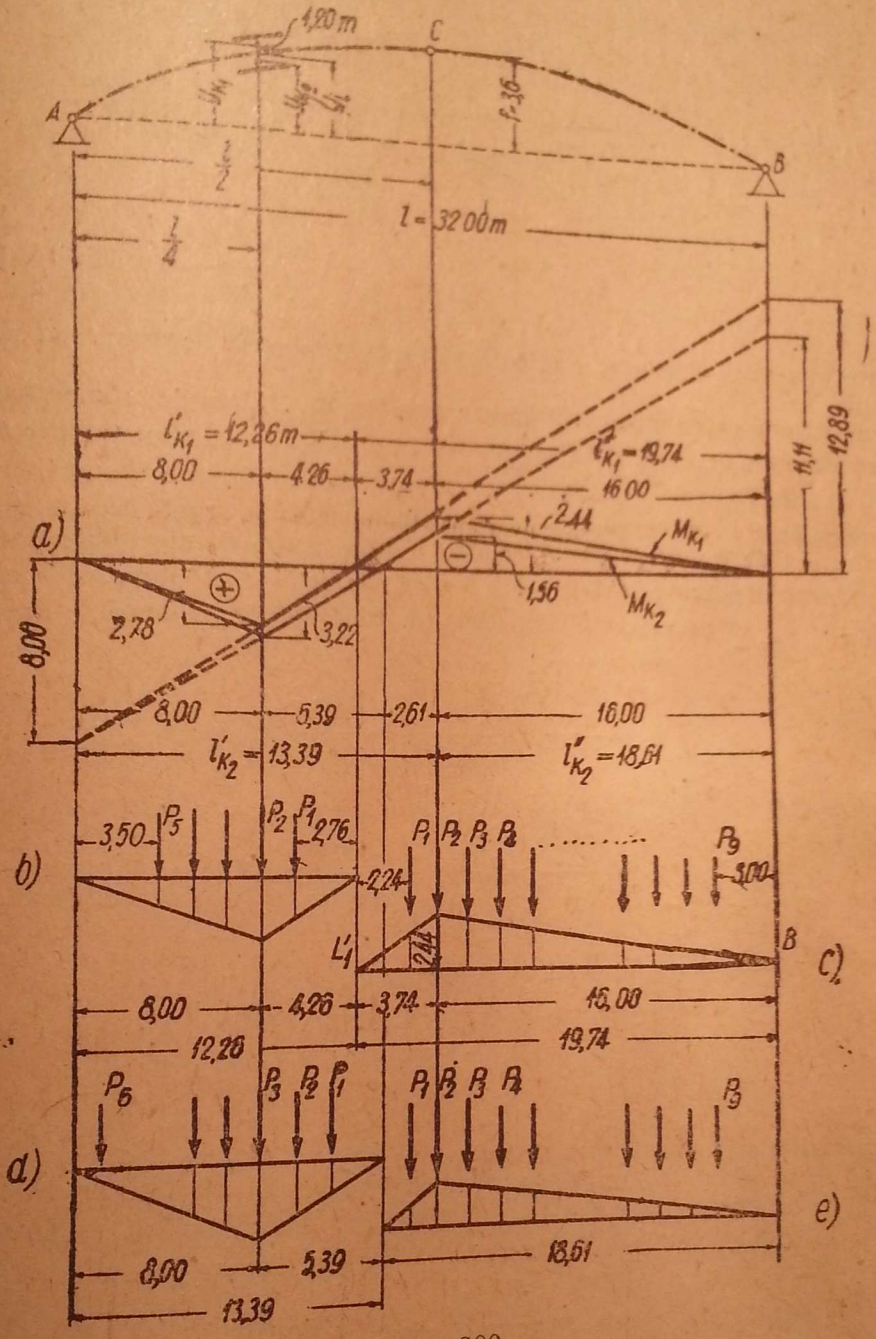


Fig. 299.

Cu aceste notații formula (5.51) devine :

$$l' = l \frac{1}{1 + \xi'_c \cdot \frac{\eta}{\xi}},$$

unde

$$\xi'_c = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \xi = \frac{1}{4}$$

și deci

$$l'_{k_1} = l\frac{1}{1+\xi'_c\frac{\eta_{k_1}}{\xi}} = l\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}805}{\frac{1}{4}}} = l\frac{1}{1+2\cdot 0{,}805} =$$

$$= l\frac{1}{2{,}61} = 0{,}383\,l = 12{,}26 \text{ m},$$

$$l'_{k_2} = l\frac{1}{1+\xi'_c\frac{\eta_{k_2}}{\xi}} = l\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}695}{\frac{1}{4}}} = l\frac{1}{1+2\cdot 0{,}695} =$$

$$= l\frac{1}{2{,}39} = 0{,}418\,l = 13{,}39 \text{ m}.$$

Cu ajutorul acestor elemente se calculează toate ordonatele necesare, așa cum sînt trecute în fig. 299, *a*.

Se va determina acum momentul maxim negativ M_{k_1}. Linia de influență arată că trebuie să se încarce partea din dreapta. Dacă se admite că în poziția de maximum nici o forță a convoiului nu trece în stînga punctului limită L'_1, rezultă o linie de influență triunghiulară (fig. 299, *c*) asemănătoare cu linia de influență a momentului încovoietor pe grinda dreaptă și, deci, se poate aplica criteriul dat de formulele (3.33), pentru a găsi poziția de maximum. Pe „deschiderea" $l''_{k_1} = 19{,}74$ m încap zece forțe. Dacă se așază forța P_3 în vîrful triunghiului, ultima forță se găsește la distanța $b_{10} = 0{,}5$ m de reazemul din dreapta. Relațiile (3.33) devin în acest caz:

$$p_x = \frac{\sum_1^h P_i}{x} = \frac{\sum_1^3 P_i}{x} = \frac{60}{3{,}74} = 16{,}05;$$

$$p = \frac{\sum_1^n P_i}{l} = \frac{\sum_1^{10} P_i}{l''_{k_1}} = \frac{180}{19{,}74} = 9{,}12;$$

$$p'_x = \frac{\sum_1^n P_i}{h'} = \frac{\sum_1^{10} P_i}{3'} = \frac{140}{16{,}0} = 8{,}75.$$

Rezultă

$$p_x > p > p'_x,$$

deci, convoiul trebuie deplasat spre dreapta.

Se pune P_2 în vîrful triunghiului și atunci P_{10} iese de pe arc.

Distanța de la ultima forță P_9 pînă la capătul din dreapta este $b_9 = 3{,}0$ m și rezultă:

$$p_x = \frac{\sum_1^h P_i}{x} = \frac{40}{3{,}74} = 10{,}70;$$

$$p = \frac{\sum_1^n P_i}{l} = \frac{160}{19{,}74} = 8{,}10;$$

$$p'_x = \frac{\sum_1^n P_i}{h'} = \frac{140}{16{,}0} = 8{,}75.$$

Rezultă

$$p_z > p < p'_z$$

deci, convoiul trebuie să stea în această poziție.

Valoarea momentului M_{k_1} se poate calcula cu ordonatele liniei de influență, dar se poate calcula și altfel.

Cu ajutorul tabelei de la aplicația 10 se determină momentul pe grinda de $l''_{k_1} = 19{,}74$ m deschidere, apoi acest moment se multiplică cu raportul dintre înălțimile triunghiurilor liniilor de influență.

Astfel, pe grinda de 19,74 m:

$$V_{L'_1} = \frac{M_B}{l''} = \frac{1\,285 + 160 \cdot 3{,}0}{19{,}74} = \frac{1\,765}{19{,}74} = 89{,}4 \text{ t};$$

$$M_z = 89{,}4 \cdot 3{,}74 - 30 = 334{,}5 - 30 = 304{,}5 \text{ tm}.$$

Înălțimea triunghiului liniei de influență a momentului în secțiunea x a grinzii cu $l'' = 19{,}74$ m este:

$$h_1 = \frac{xx'}{l} = \frac{3{,}74 \cdot 16}{19{,}74},$$

iar înălțimea triunghiului în linia de influență a arcului este:

$$h_2 = -\frac{12{,}89 \cdot 3{,}74}{19{,}74},$$

de unde raportul:

$$\beta = \frac{h_2}{h_1} = -\frac{12{,}89}{16} = -0{,}805,$$

deci:

$$M_{k_1} = \beta M_x = -0{,}805 \cdot 304{,}5 = -245{,}5 \text{ tm}.$$

Se vor efectua acum calculele și cu ajutorul ordonatelor liniei de influență M_{k_1}:

$$M_{k_1} = -P_1 \cdot \frac{2{,}44}{3{,}74} \cdot 2{,}24 - P_2 \cdot 2{,}44 - P_3 \cdot \frac{2{,}44}{16}\, 14{,}5 -$$

$$- P_4 \cdot \frac{2{,}44}{16} \cdot 13 - P_5 \cdot \frac{2{,}44}{16}\, 11{,}5 - P_6 \cdot \frac{2{,}44}{16} \cdot 7{,}5 -$$

$$- P_7 \cdot \frac{2{,}44}{16} \cdot 6{,}0 - P_8 \cdot \frac{2{,}44}{16} \cdot 4{,}5 - P_9 \cdot \frac{2{,}44}{16} \cdot 3{,}0 =$$

$$= -P_1 \frac{2{,}44}{3{,}74} \cdot 2{,}24 - \frac{2{,}44}{16}(P_2 \cdot 16{,}0 + P_3 \cdot 14{,}5 + P_4 \cdot 13{,}0 +$$

$$+ P_5 \cdot 11{,}5 + P_6 \cdot 7{,}5 + P_7 \cdot 6{,}0 + P_8 \cdot 4{,}5 + P_9 \cdot 3{,}0) =$$

$$= -\frac{2{,}44 \cdot 2{,}24}{3{,}74} \cdot 20 - \frac{2{,}44}{16}\Big[20\,(16{,}0 + 14{,}5 + 13{,}0 +$$

$$+ 11{,}5) + 15\,(7{,}5 + 6{,}0 + 4{,}5 + 3{,}0)\Big] = -\frac{20 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}24}{3{,}74} -$$

$$- \frac{2{,}44}{16}(20 \cdot 55 + 15 \cdot 21) = -\frac{20 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}24}{3{,}74} - \frac{2{,}44 \cdot 1\,415}{16} =$$

$$= -29{,}3 - 216 = -245{,}3 \text{ tm}.$$

Rezultatul coincide cu primul, cu aproximația inerentă calculului cu rigla.

Se va calcula acum M_{k_1} maxim pozitiv. Se încarcă partea pozitivă a liniei de influență, care este un triunghi (fig. 299, *b*), și se întoarce convoiul astfel încît sarcinile să se deplaseze de la stînga spre dreapta.

Punînd P_3 în secțiune, pe $l' = 12{,}26$ m încap șase forțe; se obține:

$$p_x = \frac{P_6 + P_5 + P_4 + P_3}{x} = \frac{75}{8{,}0} = 9{,}38;$$

$$p = \frac{P_6 + \cdots + P_1}{l'} = \frac{115}{12{,}26} = 9{,}38;$$

$$p'_x = \frac{P_3 + P_2 + P_1}{x'} = \frac{60}{4{,}26} = 14{,}1.$$

Rezultă

$$p_x = p < p'_x.$$

Deci, convoiul trebuie să rămînă pe loc, sau, eventual, să se deplaseze spre stînga. Punînd P_2 în secțiune, pe „deschiderea" $l' = 12{,}26$ m intră numai cinci forțe:

$$p_x = \frac{P_5 + \cdots + P_2}{x} = \frac{80}{8} = 10;$$

$$p = \frac{P_5 + \cdots + P_1}{l'} = \frac{100}{12{,}26} = 8{,}15;$$

$$p'_x = \frac{P_2 + P_1}{x'} = \frac{40}{4{,}26} = 9{,}4.$$

Rezultă

$$p_x > p < p'_x,$$

deci, convoiul trebuie să rămînă cu P_2 în secțiunea de la sfertul arcului.

Momentul M_{k_1} este de această dată chiar momentul de pe grinda de deschidere $l' = 12{,}26$ m, astfel încît se calculează direct cu tabela de la aplicația 10.

Distanța de la ultima forță P_5 la capătul din stînga este $a_5 = 3{,}5$ m, și deci:

$$V'_{L_1} = \frac{300 + 100 \cdot 3{,}5}{12{,}26} = \frac{650}{12{,}26} = 53 \text{ t};$$

$$M_{k_1} = 53 \cdot 4{,}26 - 30 = 226 - 30 = 196 \text{ tm}.$$

Momentul calculat cu P_3 în secțiune ar fi fost 193 tm, foarte apropiat de momentul maxim. Deci,

$$M_{k_1 \text{ max pozitiv}} = +196 \text{ tm},$$

$$M_{k_1 \text{ max negativ}} = -245 \text{ tm}.$$

În mod absolut analog se obține $M_{k_2 \text{ max}}$ pozitiv și negativ cu ajutorul triunghiurilor din fig. 299, *d* și *e*.

Rezultatele sînt:

$$M_{k_2 \text{ max pozitiv}} = +238 \text{ tm}$$

și este dat de forța P_3 în secțiunea de la sfertul arcului;

$$M_{k_2 \text{ max negativ}} = -151 \text{ tm}$$

și este dat de forța P_2 în articulația C.

Cu aceste rezultate se pot obține eforturile unitare maxime în secțiune. Dacă se ia o lățime de boltă de 4 m:

$$W = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{1}{6} 4 \cdot 1{,}2^2 = 0{,}96 \text{ m}^3.$$

Se găsesc astfel :

Pe extrados

din M_{k_2} *max pozitiv* :

$$\sigma_1 = -\frac{M_{k_2}}{W} = -\frac{238}{0{,}96} = -248 \text{ t/m}^2 = -24{,}8 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)};$$

din M_{k_2} *max negativ* :

$$\sigma_1 = -\frac{M_{k_2}}{W} = +\frac{151}{0{,}96} = +157 \text{ t/m}^2 = +15{,}7 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)}.$$

Pe intrados

din M_{k_1} *max pozitiv* :

$$\sigma_2 = +\frac{M_{k_1}}{W} = +\frac{196}{0{,}96} = +204 \text{ t/m}^2 = +20{,}4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)};$$

din M_{k_1} *max negativ* :

$$\sigma_2 = +\frac{M_{k_1}}{W} = -\frac{245}{0{,}96} = -255 \text{ t/m}^2 = -25{,}5 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)}.$$

Aceste eforturi unitare trebuie adăugate la cele date de încărcarea permanentă.

Sarcinile uniform distribuite echivalente se obțin, ca la aplicația 13, cu expresia

$$\omega = \frac{M_{max}}{\Omega},$$

în care Ω este suprafața liniei de influență pe porțiunea încărcată. În cazul de față, toate suprafețele Ω sînt triunghiuri.

Echivalentul pentru M_{k_2} *max pozitiv* :

$$\omega_{k_2\,(+)} = \frac{238}{\frac{1}{2} \cdot 13{,}39 \cdot 3{,}22} = 11{,}05 \text{ t/m}.$$

Echivalentul pentru M_{k_2} *max negativ* :

$$\omega_{k_2\,(-)} = \frac{151}{\frac{1}{2} \cdot 18{,}61 \cdot 1{,}56} = 10{,}40 \text{ t/m}.$$

Echivalentul pentru M_{k_1} *max pozitiv* :

$$\omega_{k_1\,(+)} = \frac{196}{\frac{1}{2} \cdot 12{,}26 \cdot 2{,}78} = 11{,}5 \text{ t/m}.$$

Echivalentul pentru M_{k_1} *max negativ* :

$$\omega_{k_1\,(-)} = \frac{245}{\frac{1}{2} \cdot 19{,}74 \cdot 2{,}44} = 10{,}16 \text{ t/m}.$$

Sarcina echivalentă este mai mare la lungimi de încărcare mici.

În tratatele de poduri sînt date direct sarcinile echivalente pentru tipurile de convoi oficiale și pentru diferite deschideri și triunghiuri de influență cu vîrfurile la mijloc, sfert, sau reazem. La deschideri intermediare și vîrfuri de triunghiuri intermediare se interpolează, calculîndu-se direct sarcina echivalentă cu care se încarcă apoi linia de influență. Calculul practic este astfel mult ușurat.

§ 33. ARCE CU O ARTICULAȚIE ȘI UN REAZEM SIMPLU

Acestea pot fi considerate ca un caz particular al arcului cu trei articulații în care una dintre părți $(A - C)$ este încărcată, iar cealaltă parte $(B - C)$ se reduce la un simplu pendul, după direcția articulațiilor $B-C$ (fig. 300, *a* și *b*), astfel încît cele stabilite la arcul cu trei articulații sînt valabile și la arcul cu o articulație și un reazem simplu, dacă se ține seamă de această particularitate. Pendulul $C - B$ va fi notat cu o singură literă, B.

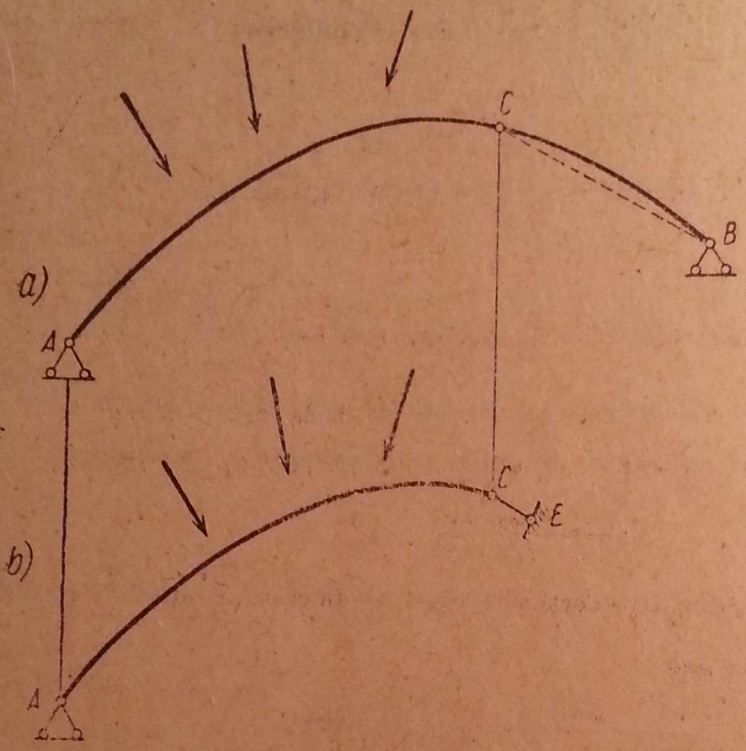


Fig. 300.

A. REACȚIUNI ȘI EFORTURI DIN ÎNCĂRCĂRI FIXE

Sistemul de bază al reacțiunilor se va alege același ca la arcul cu trei articulații V_A', H_A' și V_B', H_B', unde H_A' și H_B' au direcția liniei nașterilor $A-B$, iar V_A' și V_B' sînt verticale (fig. 301, *a*).

Trebuie să se țină însă seamă că aici nu sînt patru necunoscute, ci numai trei, deoarece între V_B' și H_B' există încă o relație determinată de faptul că ele sînt componentele reacțiunii totale R_B, a cărei direcție este cunoscută, ca una dintre datele problemei (de exemplu, prin unghiul β cu verticala).

Deci, reacțiunile arcului $A - B$ cu o articulație și cu un reazem simplu se determină prin cele trei ecuații de echilibru corespunzătoare unui singur corp nedeformabil.

Din ecuația de momente în raport cu B rezultă V_A'; din ecuația de momente în raport cu A rezultă V_B', iar din ecuația de proiecție pe direcția perpendiculară pe R_B se determină H_B' în funcție de V_B' (aceasta nu face parte din sistemul celor trei ecuații de echilibru); din ecuația de proiecție pe orizontală rezultă H_A' în funcție de H_B':

$$V_A' = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l}; \qquad V_B' = \frac{\sum_1^n P_i a_i}{l};$$

$$H_B' = \frac{V_B' \sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)}; \qquad H_A' = H_B' - \frac{1}{\cos \alpha} \sum_1^n P_i \sin \gamma_i. \tag{5.57}$$

Dacă se determină reacțiunea R_B și componentele V_A' și H_A' din ecuațiile de momente în raport cu B și A și din proiecția pe orizontală, se obține :

$$V_A' = \frac{\sum_1^n P_i b_i}{l}; \qquad R_B = \frac{\sum_1^n P_i a_i}{l \dfrac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}};$$

$$H_A' = R_B \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \sum_1^n P_i \sin \gamma_i. \tag{5.58}$$

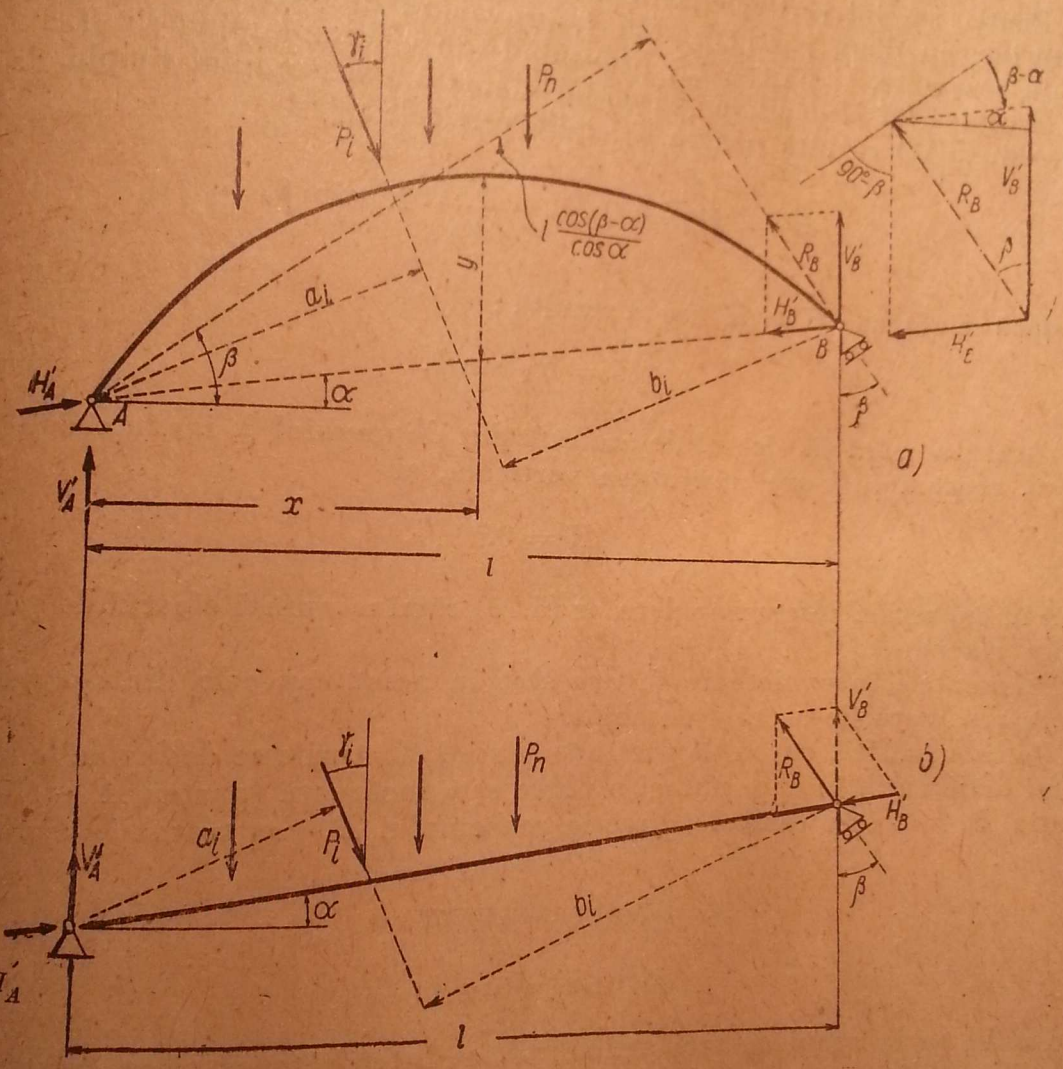


Fig. 301.

Lungimea $l \dfrac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$ este distanța de la articulația din A la reacțiunea R_B.

Relațiile (5.57) și (5.58) arată că reacțiunile unui arc cu o articulație și un reazem simplu sînt aceleași cu cele de la o grindă dreaptă de direcția liniei articulațiilor cu aceeași deschidere l și cu același sistem de rezemare în A și B ca și arcul (fig. 301, *b*).

Deci, reacțiunile nu depind de forma arcului, ci numai de condițiile lui de rezemare.

Odată determinate reacțiunile, expresiile eforturilor sînt cele de la arcul cu trei articulații : (5.7) — în cazul forțelor oarecare, și (5.13) — în cazul încărcărilor verticale, coordonatele x și y avînd aceeași semnificație ca acolo.

Evident, și aici se poate folosi proiecția orizontală a lui H_A' :

$$H_A = H_A' \cos \alpha.$$

Pentru sarcini verticale, la fel ca la arcul cu trei articulații, expresiile eforturilor au două părți : partea *I*, provenind din eforturile unei grinzi simplu rezemate, și partea *II*, provenind din efectul împingerii H.

Mărimea lui H depinde aici de înclinarea β a reazemului simplu, deoarece, din (5.58) rezultă pentru sarcinile verticale :

$$H' = H_A' = H_B' = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R_B \sin \beta,$$

sau dacă se notează $H = H' \cos \alpha$, rezultă :

$$H = R_B \sin \beta. \tag{5.59}$$

Aceasta arată că efectul de arc este dat de unghiul β, iar în cazul cînd $\beta = 0$, reazemul B are reacțiunea verticală, și

$$H = 0,$$

adică în expresiile eforturilor date de (5.13) rămîne numai efectul de grindă simplu rezemată.

Momentele încovoietoare în arc sînt în acest caz cele dintr-o grindă simplu rezemată de aceeași deschidere.

Pe cale grafică, curba de presiune și apoi eforturile se deduc ca la arcul cu trei articulații, în care numai o parte este încărcată (partea $A - C$), iar direcția $B - C$ este dată de direcția reazemului B, caz tratat în fig. 266.

B. LINII DE INFLUENȚĂ

a) Metoda analitică

La fel ca la arcul cu trei articulații, se interpretează și se construiesc expresiile analitice ale reacțiunilor și ale eforturilor așa cum se reprezintă în fig. 302 și 302 A.

Linia V_A' este la fel ca la o grindă simplu rezemată.

Linia R_B. Avem expresia lui R_B din (5.58), adică din ecuația de momente față de A, de unde rezultă :

$$R_B = \frac{1 \cdot a}{l \cdot \dfrac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha)} \cdot \frac{a}{l}.$$

Pe reazemul B ($a = l$) ordonata liniei de influență are valoarea :

$$\frac{\cos \alpha}{\cos (\beta - \alpha)}.$$

Linia $H = H' \cos \alpha$. Din expresia (5.59), care reprezintă rezultatul proiecției pe orizontală, se deduce :

$$H = R_B \sin \beta = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos (\beta - \alpha)} \cdot \frac{a}{l}.$$

Linia V_A. Din figura reprezentînd reacțiunile din A rezultă :

$$V_A = V_A' + H \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{l} + \frac{a}{l} \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{\cos (\beta - \alpha)}.$$

Pentru $a = 0$; $b = l$, avem $V_A = 1$.

Pentru $a = l$; $b = 0$, avem $V_A = \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{\cos (\beta - \alpha)}$.

Linia M_i. Din expresia (5.13) rezultă :

$$M_i = M_i^0 - Hy.$$

La linia de influență M_i^0 se adaugă linia lui H multiplicată cu $-y$

Punctul de ordonată nulă L se determină ca la arcul cu trei articulații, adică, în cazul de față, la intersecția lui $A - i$ cu direcția reazemului din B.

Linia de influență M_i este linia M_i în aceeași secțiune a unei grinzi drepte de deschidere $A'L'$ cu consola $L'B'$.

Dacă reazemul din B are direcție verticală pentru reacțiune, L' se confundă cu B', și linia de influență în arc este la fel cu cea din grinda simplu rezemată de aceeași deschidere.

Linia T_i (fig. 302 A). Din expresia (5.13) avem :

$$T_i = T_i^0 \cos \varphi - H \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha},$$

care este reprezentată în figură.

Punctul K de ordonată nulă se obține la intersecția lui R_B cu paralela din A la tangenta în secțiunea i.

Linia N_i (fig. 302 A). Din expresia (5.13) avem :

$$N_i = - T_i^0 \sin \varphi - H \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

și este construită în figură.

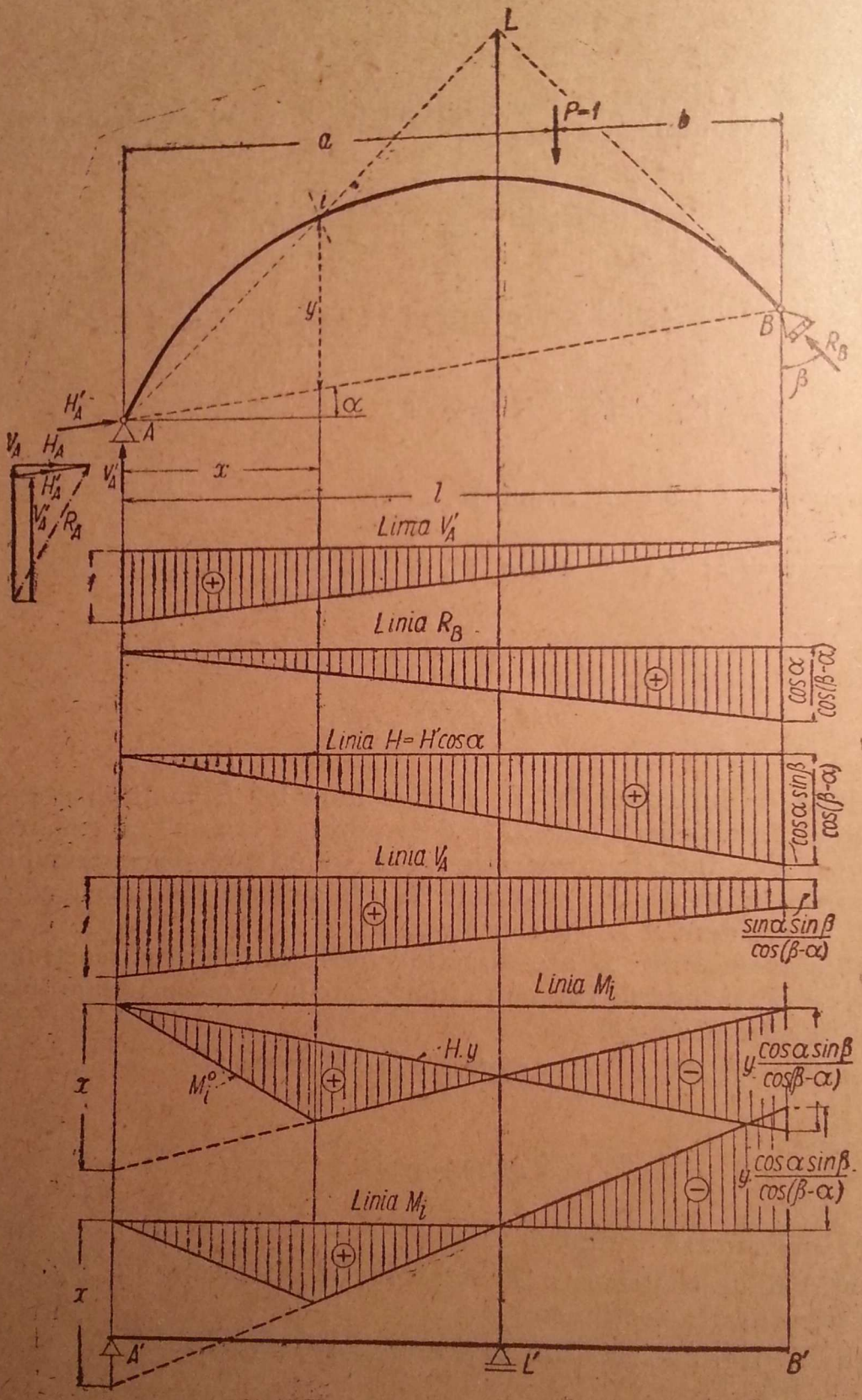

L
P=1
a
b
i
y
B
R_B
β
α
H'_A
A
V_A H_A
H_A
V'_A
R_A
V'_A
x
l
Linia V'_A
Linia R_B
$\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}$
Linia $H=H'\cos\alpha$
$\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$
Linia V_A
$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$
Linia M_i
M_i^o
H.y
$y\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$
x
Linia M_i
$y\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$
x
A'
L'
B'

Fig. 302.

Punctul teoretic J de ordonată nulă se obține la intersecția lui R_B cu perpendiculara din A pe tangenta la arc în secțiunea i.

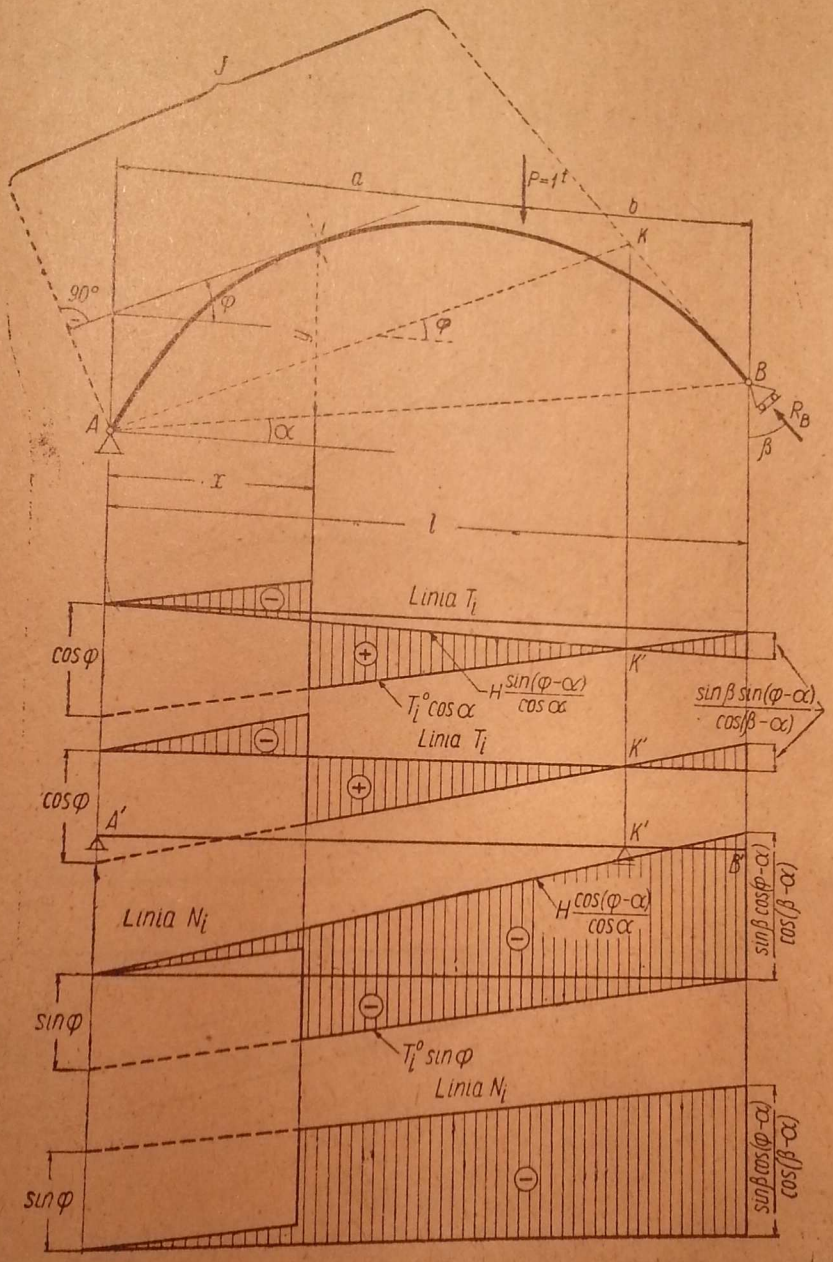


Fig. 302 A.

b) Metoda deplasărilor virtuale

Se aplică metoda generală, așa cum a fost aplicată și la arcul cu trei articulații. Se va exemplifica numai prin două linii de influență.

Linia H' (fig. 303). Se introduc în articulația A pendulele corespunzătoare, adică unul vertical și altul după direcția $A - B$, iar în B — pendulul după direcția reacțiunii R_B.

Se suprimă pendulul corespunzător lui H' în A, și singurul corp I va avea centrul de rotație (I, T) la intersecția pendulului din B cu pendulul vertical din A.

Dînd o deplasare unitară în sens opus lui H', capătul B se lasă în jos, deci linia de influență este pozitivă. Scara rezultă din unghiul

$$\theta_I = \frac{1}{h},$$

în care h este distanța de la $(I,\ T)$ la linia $A - B$, după care am dat deplasarea unitară.

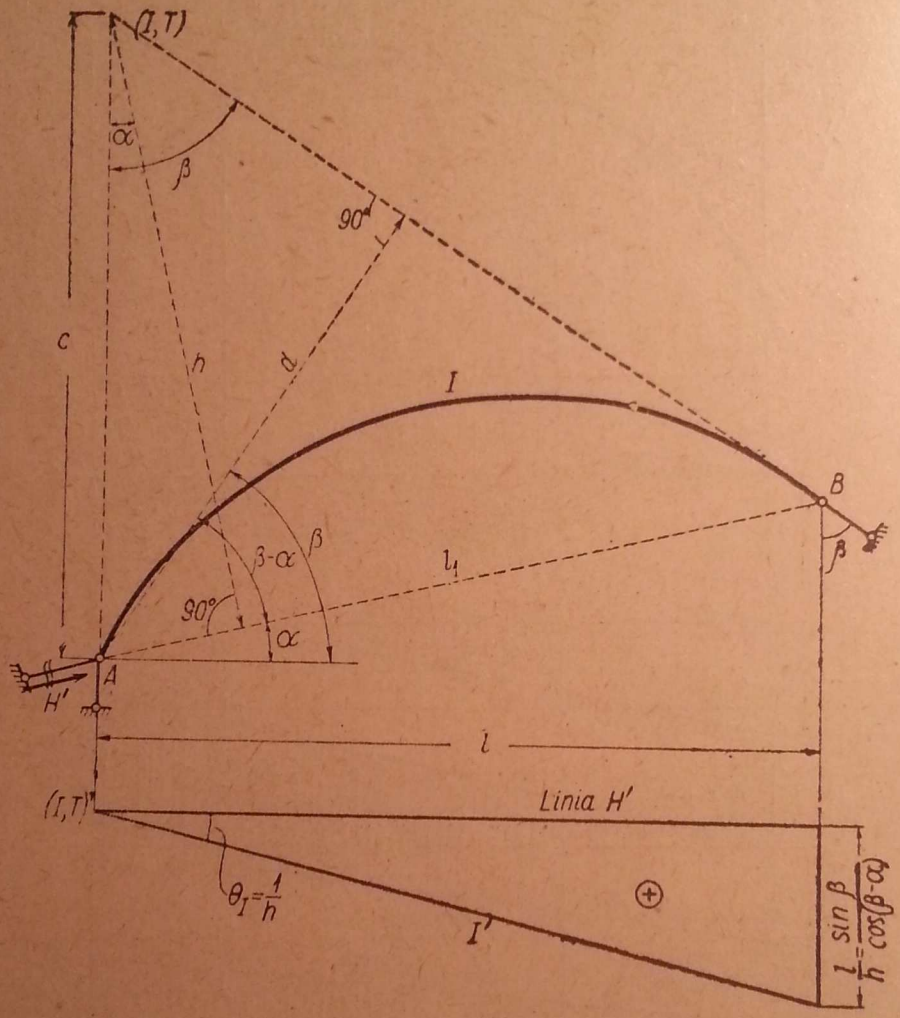


Fig. 303

Ordonata în dreptul reazemului B este :

$$\theta_I \cdot l = \frac{l}{h}.$$

Pentru a regăsi expresia analitică cunoscută, se observă în figură că $h = c \cos \alpha$ și $d = c \sin \beta$, așa că

$$h = d \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

Apoi,

$$d = l_1 \cos (\beta - \alpha) \quad \text{și} \quad l_1 = \frac{l}{\cos \alpha},$$

deci

$$d = l\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} \quad \text{și} \quad h = l\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta},$$

astfel încît

$$\frac{l}{h} = \frac{\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)},$$

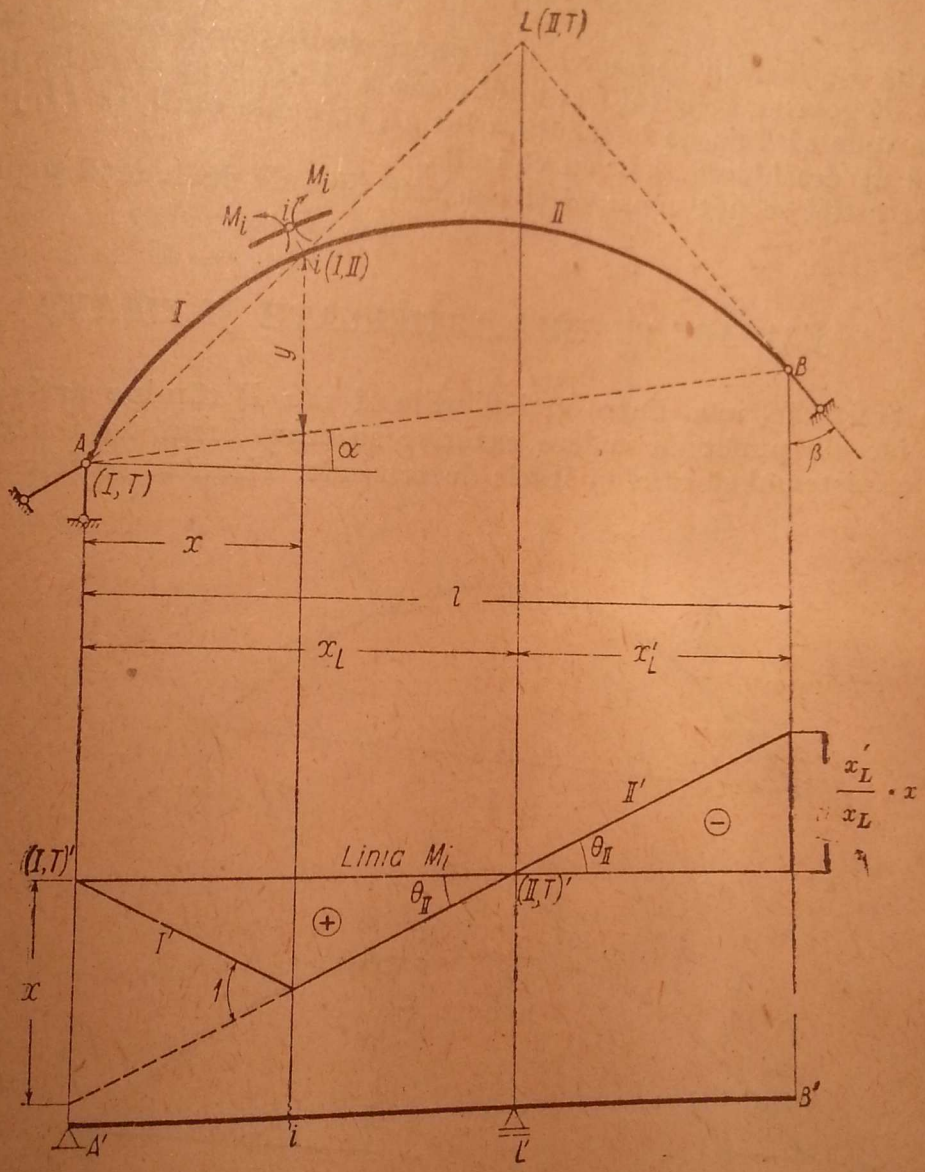


Fig. 304.

expresie care coincide cu cea dedusă pe cale analitică, dacă se ține seamă că $H = H'\cos\alpha$.

Linia M_i (fig. 304). În i se introduce o articulație; apar deci cele două momente M_i. Corpurile formate sînt I și II. Centrele (I, T) și (I, II) sînt evidente. Centrul (II, T) se găsește odată pe direcția $A-i$ din combinația I, II, T, și altă dată, pe direcția pendulului din B, deci la intersecția lor în L.

Dîndu-se rotația $\theta_{I,II} = 1$ în sens invers momentelor M_i, punctul i coboară, și dreptele I' și II' dau linia de influență M_i, cu scara și semnele determinate.

Ordonatele lui II' pe reazeme sînt : pe reazemul A : $\theta_{I,II} \cdot x = 1 \cdot x$, iar pe reazemul B : $\theta_{II} \cdot x'_L$, unde $\theta_{II} = \frac{x}{x_L}$, astfel încît valoarea ordonatei lui II' pe verticala din B devine :

$$\theta_{II} \cdot x'_L = \frac{x'_L}{x_L} \cdot x.$$

Prin considerații geometrice se poate transforma această ordonată în funcție de coordonatele lui i și unghiurile α și β, ca în cazurile precedente.

Se vede că linia de influență a lui M_i coincide cu linia M_i pe o grindă dreaptă de deschidere $A'L'$ cu consolă.

Tot astfel se pot construi și celelalte linii de influență prin deplasări virtuale.

§ 34. ARC CU TREI ARTICULAȚII ȘI TIRANT

În acest caz, una dintre articulațiile A sau B rămîne articulație interioară, iar din punct de vedere exterior se transformă în reazem simplu, pentru ca sistemul să rămînă static determinat. Tirantul se folosește atunci

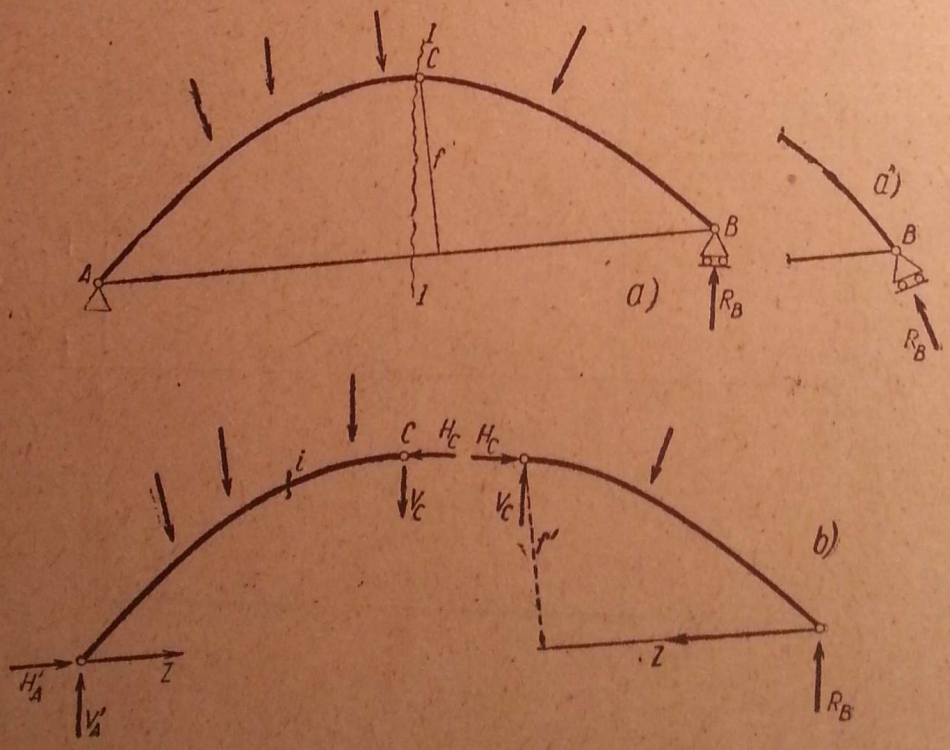


Fig. 305.

cînd nu se pot realiza punctele de sprijin A și B, astfel încît să poată prelua împingerea H. În aceste condiții, împingerea se ia prin întinderea care apare în tirant, iar reazemul simplu se realizează de obicei cu direcția reacțiunii verticală (fig. 305, *a*).

Arcul cu trei articulații și tirant constituie un sistem geometric nedeformabil, astfel încît pentru rezemare exterioară are nevoie numai de trei legături simple (articulația din A și reazemul simplu din B).

Reacțiunile se determină la fel ca la arcul cu o articulație și un reazem simplu, indiferent dacă reazemul simplu este vertical sau înclinat (fig. 305, *a* și 305, *a'*).

Efortul din tirant Z se determină făcînd o secțiune $I - I$ prin articulația C și scriind pentru partea din dreapta (fig. 305, *b*) ecuația de momente în raport cu C, de unde se obține :

$$Z = \frac{M_c^0}{f'},$$

în care M_c^0 este momentul tuturor forțelor date de la dreapta lui C și al reacțiunii din B în raport cu C. În cazul cînd R_B are direcția verticală Z este chiar împingerea H_B de la arcul cu trei articulații.

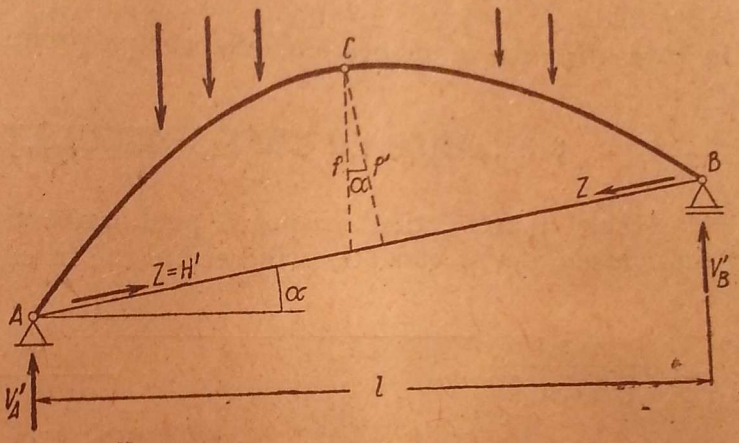


Fig. 306.

Expresiile eforturilor se scriu la fel ca la arcul cu trei articulații, pornind de la stînga, sau de la dreapta, așa cum se vede în fig. 305, *b*. Dacă pornim de la stînga, într-o secțiune i, vor interveni forțele date din stînga secțiunii i, reacțiunea verticală V_A', reacțiunea H_A' și efortul din tirant Z.

În cazul sarcinilor verticale și al reazemului B cu reacțiunea verticală avem $H_A' = 0$; în acest caz, efortul din tirant Z fiind împingerea H' din arcul cu trei articulații corespunzător, se obține (fig. 306) :

$$Z = H' = \frac{M_c^0}{f'},$$

sau

$$Z \cos \alpha = H = \frac{M_c^0}{f},$$

în care M_c^0 este momentul încovoietor în C pe grinda simplu rezemată $A - B$, cu încărcările verticale date.

În consecință, și liniile de influență se construiesc la fel ca la arcul cu trei articulații.

În cazul cînd tirantul nu leagă cele două capete A și B ale arcului, ci două puncte oarecare D și E de pe arc, — ca în fig. 307 unde arcul este continuu în dreptul punctelor D și E — atunci în afara punctelor D și E tirantul nu intervine în expresia eforturilor, efectul lui apărînd numai în intervalul $D - C - E$. Se recunoaște ușor că în acest caz f, respectiv f' pentru determinarea efortului în tirant, la încărcări verticale (și reazemul B cu reacțiune verticală), se măsoară de la articulația C la linia DE și avem la fel :

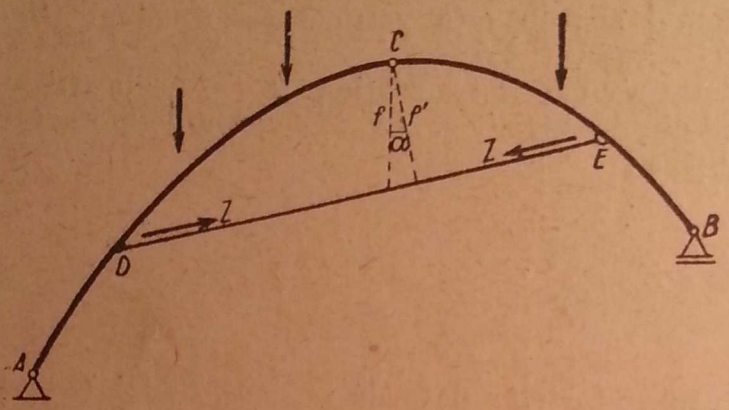


Fig. 307.

$$Z = \frac{M_c^0}{f'},$$

în care M_c^0 este momentul încovoietor pe grinda simplu rezemată $A - B$.

§ 35. ARCE CU TREI ARTICULAȚII ȘI CONSOLE

Arcele cu trei articulații pot fi prelungite și dincolo de nașterile A și B prin console, iar pe console, prin articulații în capătul lor, pot rezema grinzi

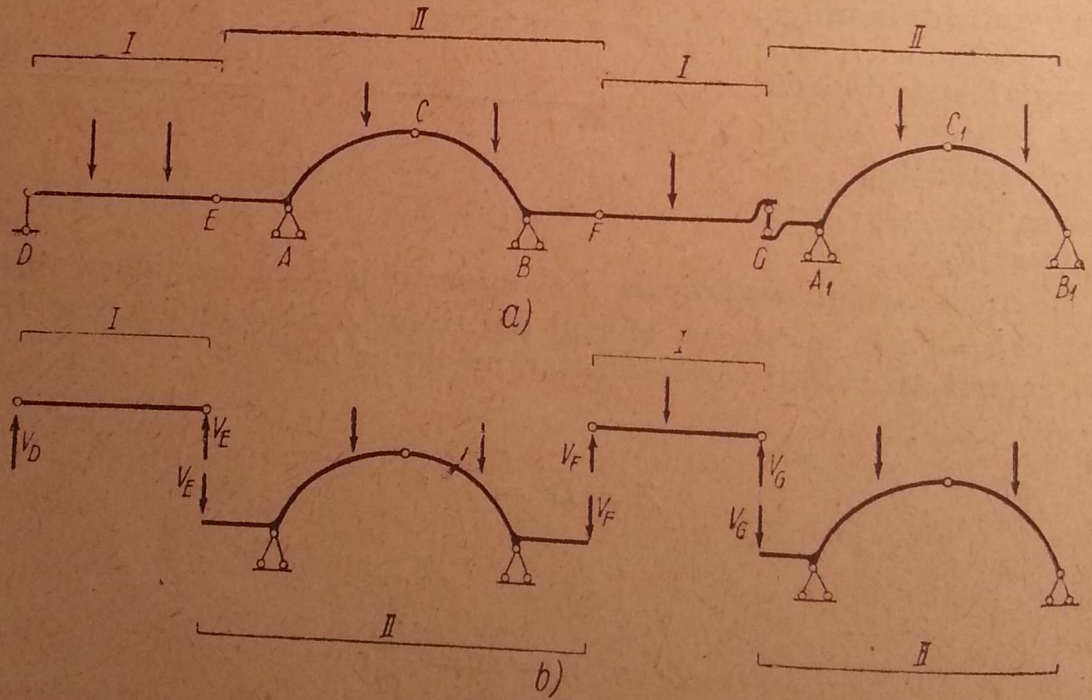


Fig. 308.

independente (fig. 308, *a*), obținîndu-se astfel construcții static determinate analoage grinzilor drepte cu console și articulații.

Caracteristicile lor sînt analoage cu cele dela grinzile drepte de aceeași categorie.

A. ÎNCĂRCĂRI FIXE

La fel ca la grinzile drepte, sistemele de bare sînt de două categorii : grinzi independente (*I*) și arce cu trei articulații (*II*).

Calculul se face separînd cele două categorii (fig. 308, *b*). Se calculează reacțiunile și eforturile întîi la grinzile independente, apoi se trece la calculul arcelor cu trei articulații, ținînd seamă de toate încărcările care le revin : forțele date în deschidere și pe console și reacțiunile grinzilor independente pe capătul consolelor.

Elementele M^0, T^0 care la arcul simplu cu trei articulații se refereau la grinda simplu rezemată de aceeași deschidere cu arcul, în cazul de față, al arcelor cu console, se vor referi la o grindă dreaptă corespunzătoare, adică la o grindă dreaptă cu console.

Se observă : Încărcările din deschiderile arcelor cu trei articulații nu provoacă eforturi pe console și pe grinzile independente. Încărcările de pe grinzile independente provoacă eforturi în console și în grinzile independente care se calculează exact ca la grinzile drepte, adică fără să se țină seamă de reacțiunile arcelor.

Încărcările de pe console și grinzile independente au influență asupra reacțiunilor și eforturilor din arcele cu trei articulații.

B. LINII DE INFLUENȚĂ

a) Metoda analitică

Din considerațiile de la încărcările fixe rezultă că liniile de influență pe grinzile independente și pe console nu sînt influențate de arce, astfel că se construiesc ca la grinzile drepte.

Liniile de influență ale reacțiunilor și ale eforturilor din arc sînt însă influențate de încărcările de pe console și grinzile independente alăturate.

Ele se construiesc ca la arcul cu trei articulații, suprapunînd peste linia de influență a efortului în grinda simplu rezemată — în acest caz, cu console și grinzi independente — linia lui *H*, multiplicate fiecare dintre ele cu coeficienții respectivi.

Aceste linii se întind, evident, pe deschiderea arcului, pe consolele lui și pe grinzile independente alăturate.

b) Metoda deplasărilor virtuale

Se aplică metoda generală, căutîndu-se centrele instantanee și făcîndu-se proiecția deplasărilor pe verticală a liniei de încărcare.

Deplasările virtuale dau o imagine clară asupra specificului fiecărei linii de influență. Astfel, dacă se suprimă o legătură pe o grindă independentă (de tipul I), nu se deplasează decît acea grindă (între capetele ei), și deci linia de influență respectivă se limitează numai la deschiderea grinzii independente.

Dacă se suprimă o legătură pe consolă, se deplasează numai partea de consolă dinspre grinda independentă vecină, împreună cu această grindă independentă, și deci linia de influență se întinde numai pe această porțiune.

Dacă se suprimă o legătură în arcele cu trei articulații, între cele două nașteri ale arcului, atunci se deplasează întregul arc cu consolele lui și grinzile independente vecine.

Mai jos (fig. 309), pentru exemplificare, sînt construite cîteva linii de influență.

Sarcinile sînt transmise indirect, astfel încît trebuie făcute corectările corespunzătoare liniei reale de încărcare.

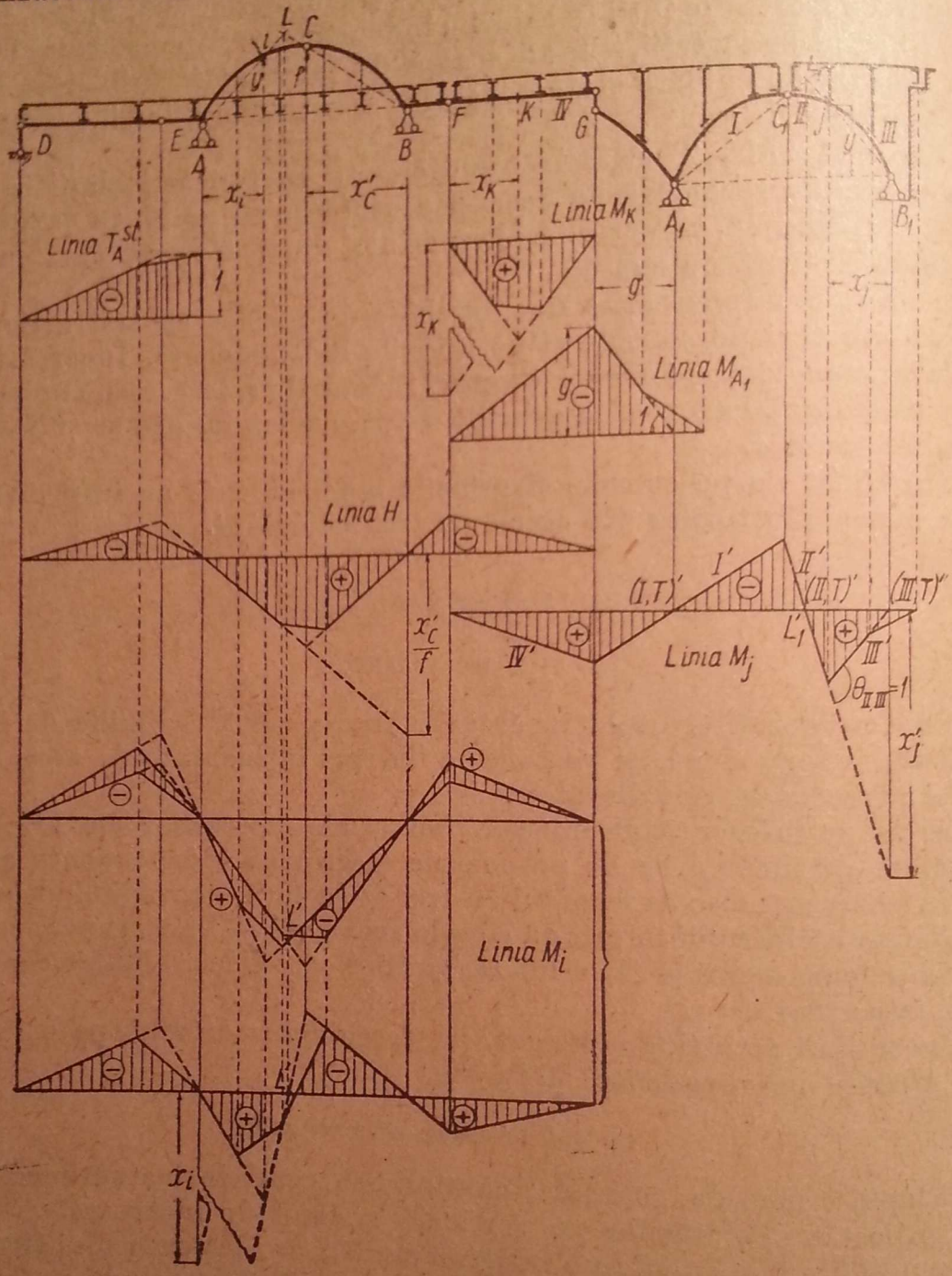


Fig. 309.

Liniile $T_A^{st.}$, M_k, M_{A_1} sînt construite cu deplasări virtuale. Se observă la fiecare influența transmiterii indirecte a sarcinilor.

Linia H pe arcul A — B — C. Să o construim pe cale analitică.

Din expresia :

$$H = \frac{M_c^0}{f}$$

rezultă că trebuie să se construiască linia de influență a momentului încovoietor în C pe grinda dreaptă AB, cu consolele AE și BF și grinzile independente ED și FG, așa cum este indicat în figură. Ea trebuie corectată în dreptul vîrfurilor E și C, datorită transmiterii indirecte a sarcinilor. Scara este dată de ordonata $\frac{x_c}{f}$, pe verticala reazemului B.

Linia M_i pe arcul $A-B-C$. Să o construim tot pe cale analitică. Construim expresia:

$$M_i = M_i^0 - Hy,$$

în care M_i^0 se referă la aceeași grindă ca în cazul liniei H.

Punctul L se determină așa cum am văzut la arcul cu trei articulații.

Se vede ce modificări trebuie aduse prin transmiterea indirectă a sarcinilor, atît liniei M_i^0, cît și liniei H, de unde rezultă forma definitivă a liniei M_i.

Linia M_j pe arcul $A_1-B_1-C_1$. Aceasta se va construi prin deplasări virtuale.

Dacă se introduce articulația în j se obțin centrele exact ca la arcul cu trei articulații. Corpul I este compus din $G-A_1-C_1$, corpul II este compus din C_1-j, corpul III, din $j-B_1$, iar corpul IV este compus din grinda independentă $F-G$.

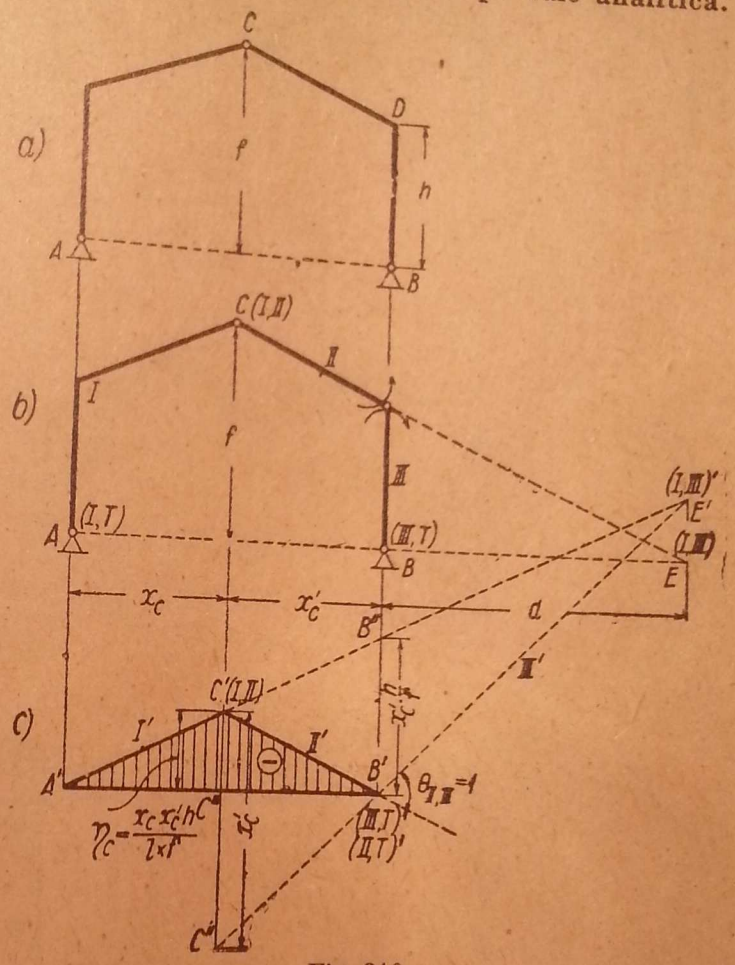


Fig. 310.

Restul construcției $D-E-A-B-F$ stă pe loc, deoarece arcul ABC a rămas cu legăturile complete. Dacă se dă celor două părți II și III o rotație reciprocă $\theta_{II,III}=1$ în sens invers lui M_j, se obține linia, cu semne și scară. Urmărind linia de încărcare a lonjeroanelor se observă că afară de punctul B_1, unde trebuie corectată linia de influență, în rest linia de încărcare se deplasează ca și corpurile principale IV, III, II și I (secțiunea j a fost luată în dreptul unei antretoaze).

La fel se determină liniile de influență pentru orice efort sau reacțiune.

Aplicația 73. Să se determine linia de influență a momentului încovoietor în nodul D la cadrul din fig. 310, *a*.

Răspuns. Sistemul cinematic este arătat în fig. 310, *b*, iar linia de influență — în fig. 310, *c*. Pentru fixarea scării se determină întîi III' și se ia $\theta_{II,III}=1$. Cu această valoare se obține:

$$C'C'' = x'_c$$

și din triunghiurile $C'C''E'$ și $B'B''E'$ rezultă :

$$B'B'' = x'_c \cdot \frac{d}{d + x'_c},$$

Din elementele geometrice se află :

$$\frac{d}{d + x'_c} = \frac{h}{f}.$$

Deci,

$$B'B'' = x'_c \frac{h}{f}.$$

Ordonata în dreptul lui C rezultă :

$$\eta_{1c} = \frac{x_c \cdot x'_c}{l} \cdot \frac{h}{f}.$$

Pe cale analitică se găsește direct aceeași valoare :

$$M_D = -Hh = -\frac{M_c^0}{f} h$$

cu ordonata în dreptul lui C :

$$\eta_{1c} = \frac{x_c \cdot x'_c}{l} \cdot \frac{h}{f}.$$

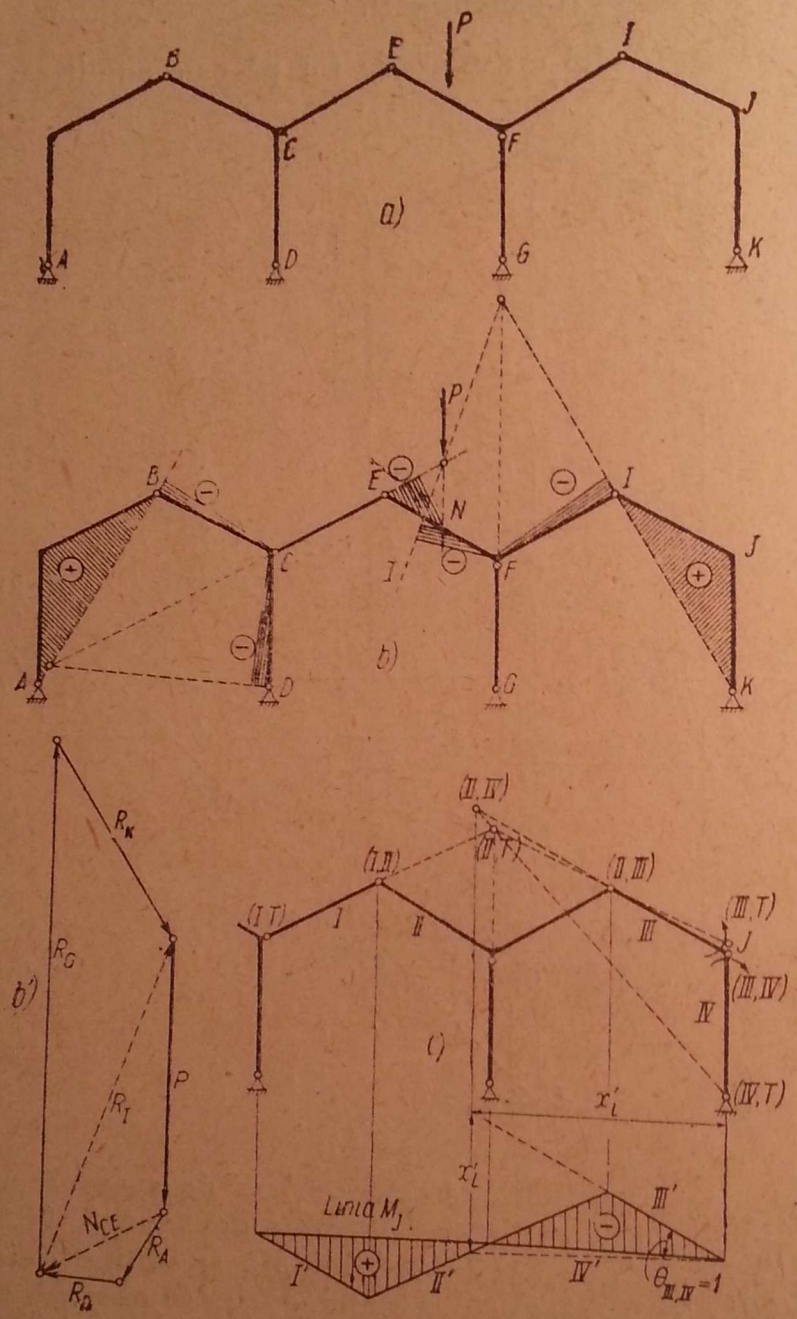


Fig. 311.

Aplicația 74. Pe construcția din fig. 311, *a* cu încărcarea P dată să se determine :

a) reacțiunile și momentele încovoietoare pe cale grafică ;

b) linia de influență M_J.

Răspuns. Diagrama momentelor este haşurată în fig. 311, *b*, însă ordonatele se măsoară la scări diferite. Astfel : pe porțiunea $KJIF$ ordonatele se multiplică cu R_K ; pe porțiunea NE — cu N_{EC} etc. pe porțiunea FN — cu R_I

Valorile R_K, R_I, N_{EC} etc. sînt determinate în fig. 311, *b'*.

Scara liniei de influență M_J se determină luînd $\theta_{IV.III} = 1$ (fig. 311, *c*), în mod asemănător aplicației precedente.

Aplicația 75. Să se determine liniile de influență M_A și H_L în sistemul din fig. 312, *a*.

Indicații. *Linia* M_A. Se introduce o articulație în A și se dă o rotație $\theta_I = 1$.

Linia H_L. Este linia de influență a împingerii în arcul cu trei articulații JKL. Rotația corpului LK este $\theta = \frac{1}{h}$, care determină scara (fig. 312, *c*).

Aplicația 76. La sistemul din fig. 313 să se determine:

a) diagramele eforturilor în cazul cînd $a = \frac{l}{4}$; $l_2 = 3l$; $l_1 = 2l$ și $P = pl$;

b) liniile de influență ale tuturor eforturilor din jurul nodului F.

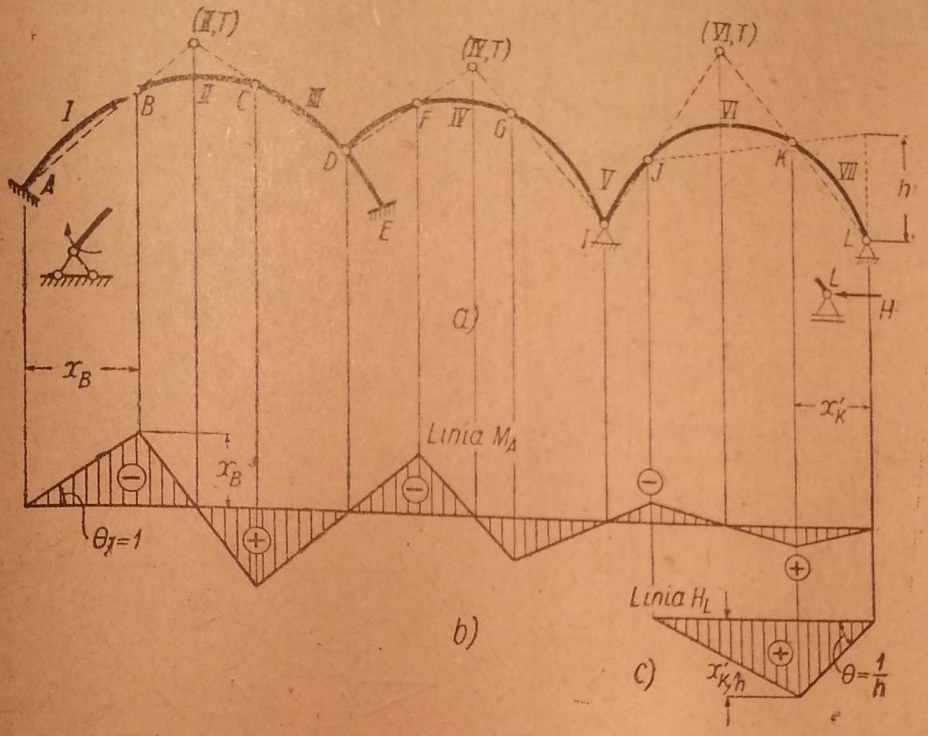


Fig. 312.

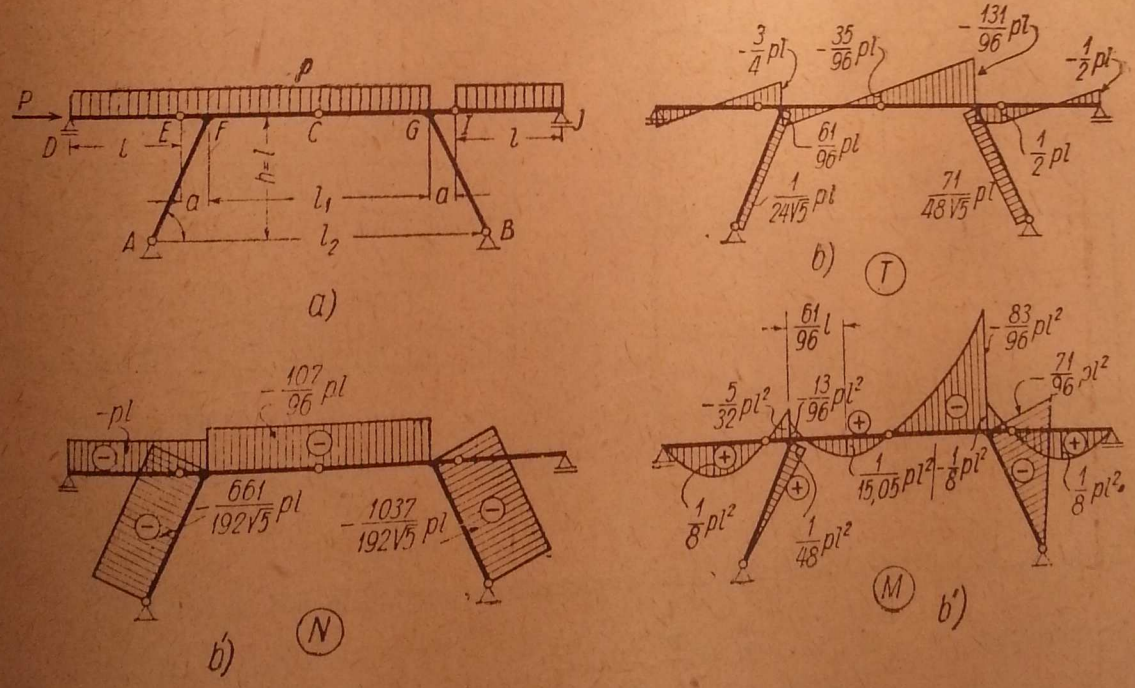


Fig. 313.

Răspuns. Diagramele eforturilor pentru încărcările date sînt reprezentate în fig. 313, *b*, *b'*, *b''*.

Liniile M_1 și T_1. *FE* este o consolă pe care se reazemă grinda independentă *DE*. Liniile de influență sînt reprezentate în fig. 314, *b* și *c*.

Linia M_2. Se introduce o articulație în dreapta lui F, infinit apropiată de nod, și se obține sistemul cinematic din fig. 314, *a*. Centrele absolute de rotație ale corpurilor I și V se găsesc pe verticalele reazemelor. $\theta_{II,III} = 1$ determină scara (fig. 314, *d*).

Linia T_2. Se introduce mecanismul corespunzător forței tăietoare. În acest caz, centrul (III, T) se confundă cu (IV, T), iar III' și II' sînt paralele. Scara liniei de influență este determinată de deplasarea 1 dată pe verticală (fig. 314, *e*).

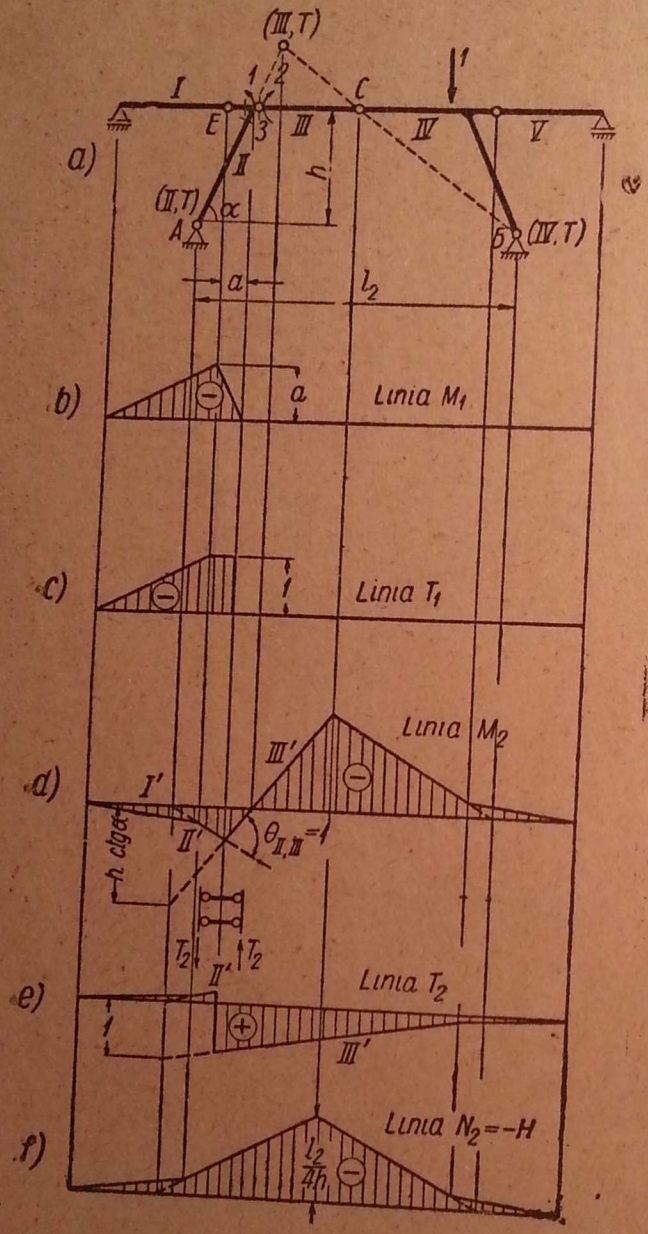


Fig. 314.

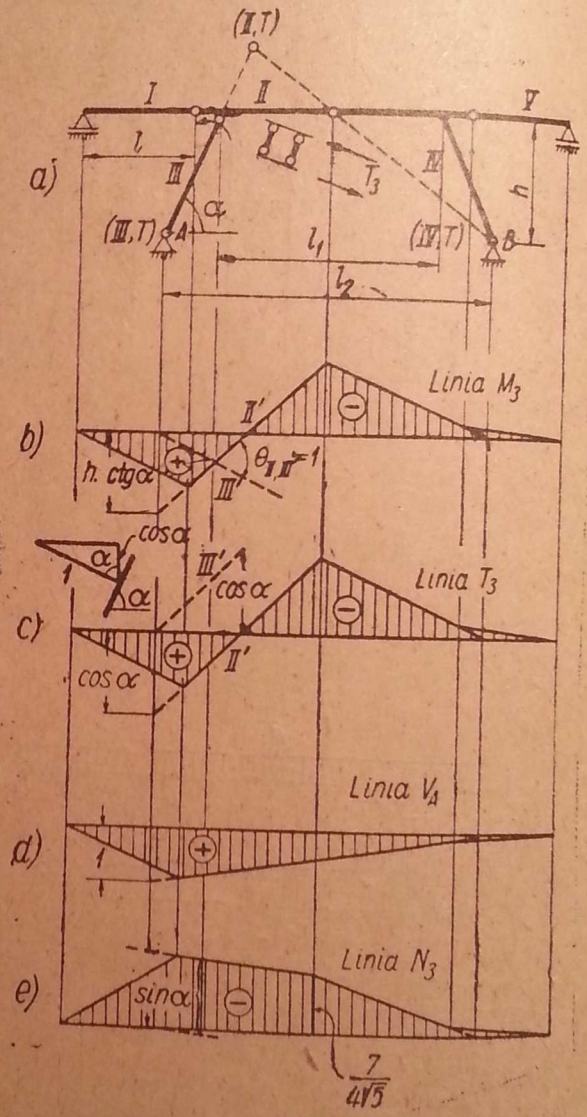


Fig. 315.

Linia N_2. Este linia H a arcului ABC corectată pe porțiunile DE și IJ.

Pe porțiunea $A - C$ $\quad H = \frac{x}{l_2} \cdot \frac{l_2}{2h} = \frac{x}{2h}$.

Pe porțiunea $C - B$ $\quad H = \frac{x'}{2h}$.

Ordonata în dreptul lui C este $\frac{l_2}{4h}$ (fig. 314, *f*).

Linia M_3. Sistemul cinematic este arătat în fig. 315, *a*, iar linia de influență — în fig. 315, *b*. $\theta_{II.III} = 1$ determină scara.

Linia T_3. Dacă se introduce mecanismul forței tăietoare, se observă că centrul (II, T) coincide cu cel de la linia M_3.

Deplasarea 1 după normala la axă se proiectează pe verticală și determină scara liniei de influență (fig. 315, *c*).

Linia N_3. Pe cale analitică avem :

$$N_3 = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha.$$

Rezultă că linia N_3 se obține din suprapunerea diagramelor 314, *f* și 315, *d*, multiplicate cu $\cos\alpha$, respectiv $\sin\alpha$ (fig. 315, *e*).

Aplicația 77. La arcul din fig. 316, *a* să se determine :
a) diagramele eforturilor din încărcările date ;
b) liniile de influență Z, M_d și M_f.

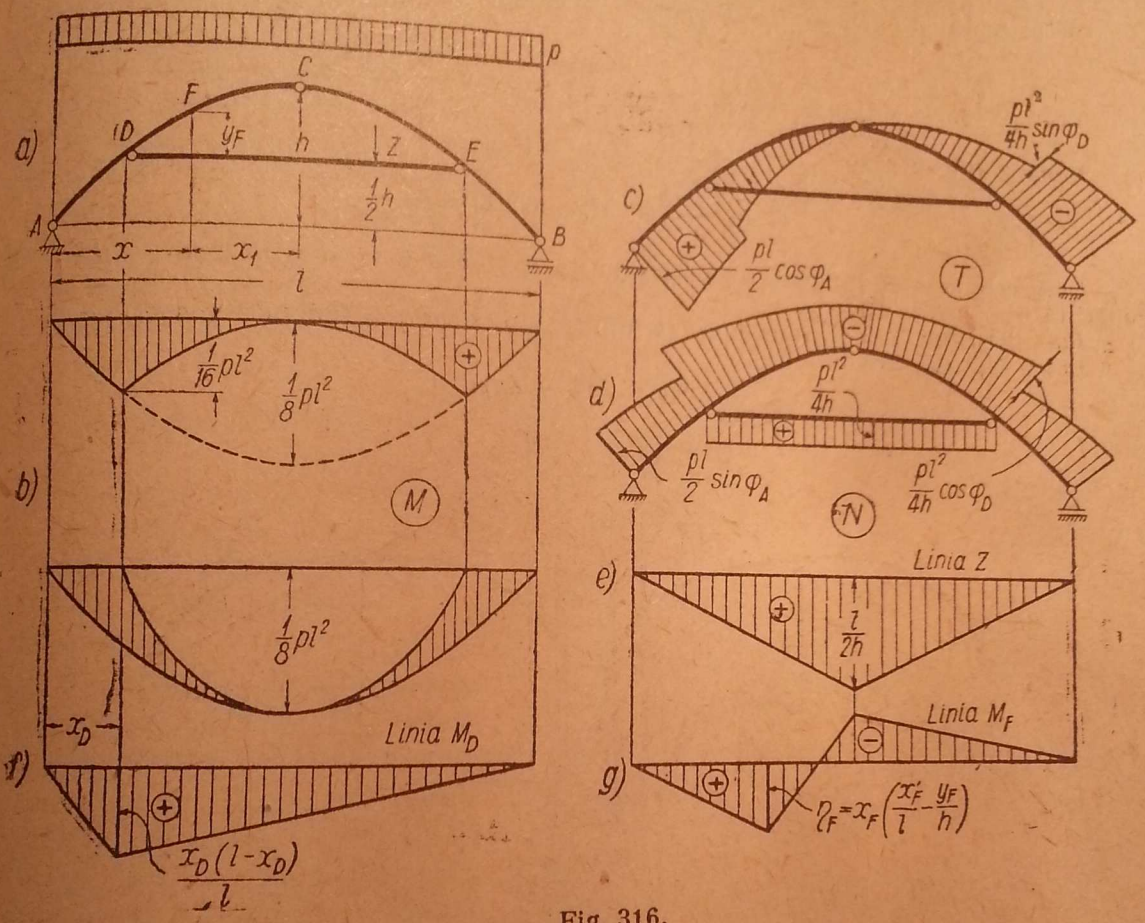


Fig. 316.

Răspuns. Efortul de întinde în tirant este :

$$Z = \frac{pl^2}{4h}.$$

Diagrama M (fig. 316, *b*).
Pe regiunile $A - D$; $E - B$:

$$M = M^0 = \frac{1}{2} px\,(l - x).$$

Pe regiunea DCE :

$$M = \frac{1}{2} px\,(l - x) - \frac{pl^2}{4h}\left[\frac{4h}{l^2}\,x\,(l - x) - \frac{h}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8} pl^2 - \frac{1}{2} px\,(l - x) = \frac{1}{2} px_1^2,$$

unde $$x_1 = \frac{l}{2} - x.$$

Diagrama T (fig. 316, *c*).

Pe regiunea $A - D$: $T = v_A - px$, $\cos\varphi = p\left(\frac{l}{2} - x\right)\cos\varphi$.

Pe regiunea $D - C$: $T = p\left(\frac{l}{2} - x\right)\cos\varphi - \frac{pl^2}{4h}\sin\varphi$.

În C: $T = 0$.

Diagrama N (fig. 316, *d*).

Pe regiunea $A - D$: $N = -p\left(\frac{l}{2} - x\right)\sin\varphi$.

Pe regiunea $D - C$: $N = -p\left(\frac{l}{2} - x\right)\sin\varphi - \frac{pl^2}{4h}\cos\varphi$.

Linia Z (fig. 316, *e*).

$$-Z\cdot\frac{h}{2} + M_c^0 = 0;\ Z = \frac{2M_c^0}{h}.$$

Deci, este linia de influenţă a momentului în secţiunea C pe o grindă simplu rezemată, împărţită prin $h/2$.

Linia M_D (fig. 316, *f*). Este linia de influenţă pe o grindă simplu rezemată.

Linia M_F (fig. 316, *g*).

$$M_F = M_F^0 - Zy_F.$$

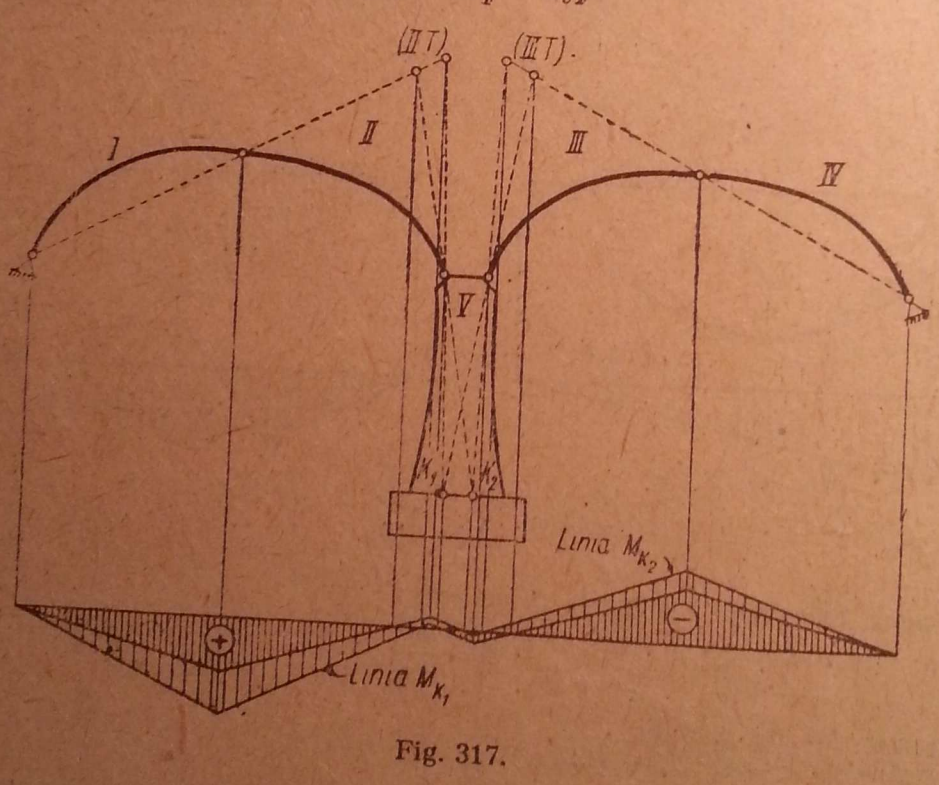


Fig. 317.

Se obţine suprapunînd linia de influenţă a momentului în F de pe o grindă simplu rezemată cu linia Z multiplicată cu $-y_F$:

$$\eta_F = \frac{x_F\cdot x'_F}{l} - \frac{x_F}{h}y_F = x_F\left(\frac{x'_F}{l} - \frac{y_F}{h}\right).$$

Aplicaţia 78. Să se determine liniile de influenţă M_{k_1} şi M_{k_2} la limitele sîmburelui central din secţiunea orizontală a pilei, imediat deasupra fundaţiei (fig. 317).

Răspuns. Construcţia liniilor de influenţă este reprezentată în fig. 317.

§ 36. ARCE CU ZĂBRELE

La arcele cu zăbrele, extradosul și intradosul alcătuiesc tălpile unei grinzi cu zăbrele, legate între ele cu diagonale, sau cu diagonale și montanți. Sistemul de zăbrele între tălpi se face simplu (triunghiular sau dreptunghiular), deoarece distanța dintre tălpi este mică în raport cu deschiderea arcului.

Aici vor fi tratate numai arcele static determinate, în care forma cea mai obișnuită este arcul cu trei articulații.

După formă, arcele cu zăbrele pot fi: cu talpa superioară dreaptă (fig. 318, *a*), cu tălpile paralele (fig. 318, *b*), cu înălțimea variabilă (fig. 318, *c*) etc. Cînd servesc pentru scheletul de rezistență al halelor industriale, se pot face și cu tălpi drepte (fig. 318, *d*) și se numesc cadre cu zăbrele.

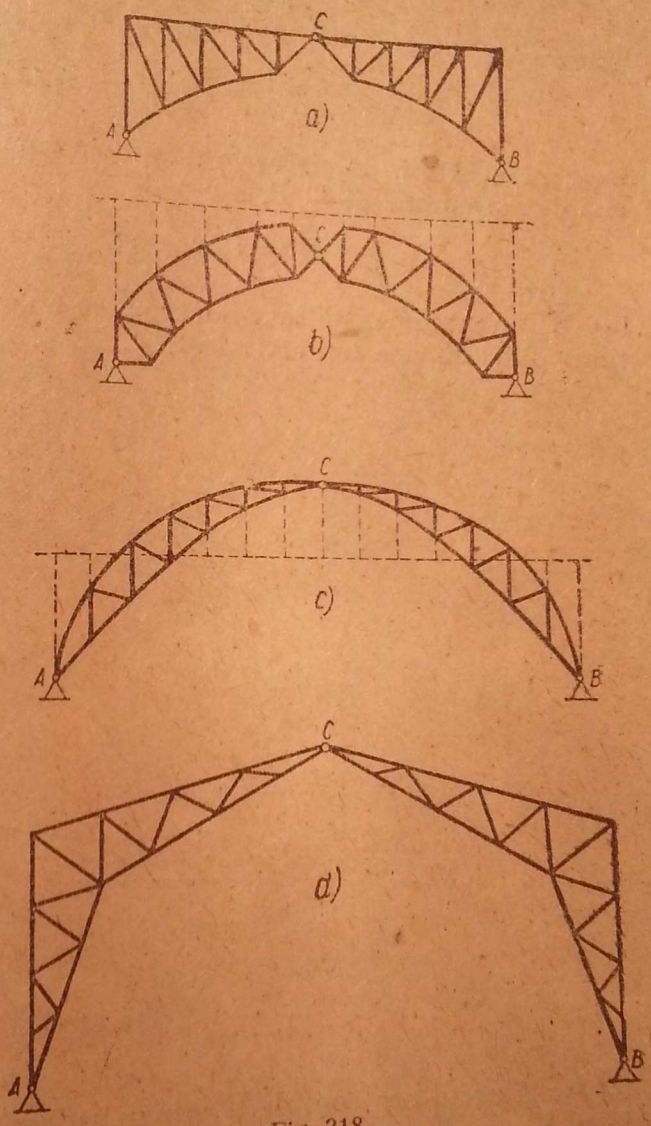


Fig. 318.

A. ÎNCĂRCĂRI FIXE

Calculul acestor construcții se reduce la a combina calculul arcelor cu trei articulații cu calculul grinzilor cu zăbrele.

Întrucît fiecare dintre cele două părți AC și BC alcătuiește cîte o grindă cu zăbrele geometric nedeformabilă, calculul reacțiunilor verticale și al împingerii H se face exact ca la arcul cu trei articulații, la care aceste reacțiuni depind numai de încărcări și de pozițiile celor trei articulații. Aceasta constituie prima etapă a calculului și se poate face pe cale analitică, cu expresiile (5.7) sau (5.13), după natura încărcărilor, sau pe cale grafică, cu procedeele descrise la arcul cu trei articulații.

A doua etapă a calculului o constituie calculul celor două grinzi cu zăbrele AC și CB cu ajutorul reacțiunilor găsite în prima etapă. Întrucît grinzile cu zăbrele au diagonale sistem simplu, se aplică aproape totdeauna metoda separării nodurilor pe cale grafică (epura Maxwell — Cremona), sau metoda secțiunilor pe cale analitică, cum s-a procedat la capitolul grinzilor cu zăbrele.

Pentru a calcula efortul în bara $1 - 3$ a grinzii din fig. 319, se face secțiunea $I - I$ și, luînd momentele în raport cu nodul 4, se obține :

$$S_{1-3} \cdot h_4 + [V'_A x_4 - \Sigma P_i (x_4 - a_i)] - H' \cdot y'_4 = 0$$

sau

$$S_{1-3} = -\frac{M_4^0}{h_4} + \frac{H' \cdot y'_4}{h_4} = -\frac{M_4^0}{h_4} + \frac{H y_4}{h_4} = -\frac{1}{h_4}(M_4^0 - H y_4) = -\frac{M_4}{h_4},$$

unde

$$M_4^0 = V'_A x_4 - \sum P_i (x_4 - a_i)$$

este momentul încovoietor în secțiunea corespunzătoare nodului 4 în grinda simplu rezemată $A - B$,

$$H = H' \cos \alpha ; \quad y'_4 = y_4 \cos \alpha,$$

iar M_4 este momentul încovoietor care apare în punctul 4 al arcului cu secțiune plină cu cele trei articulații A, B, C.

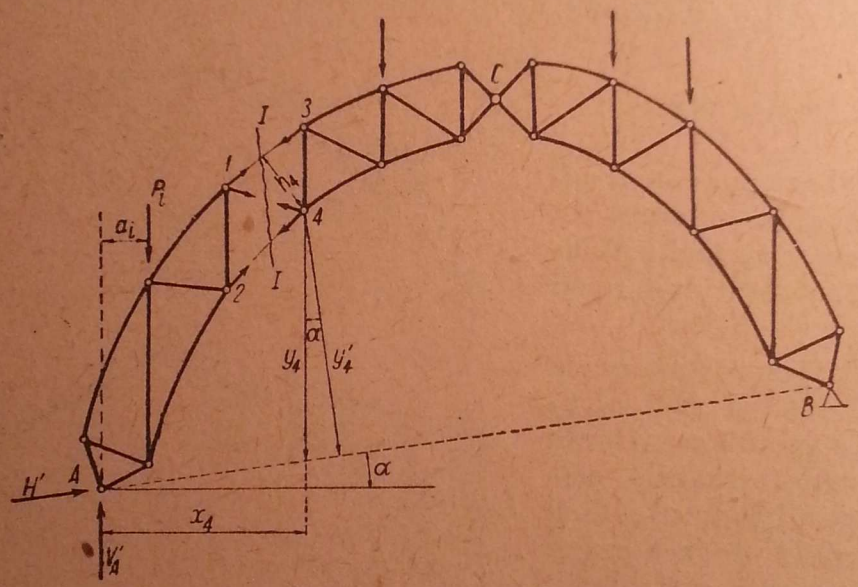


Fig. 319.

Dacă arcul are console și grinzi independente pe console, expresiile lui M^0 și H vor fi calculate în consecință.

B. LINII DE INFLUENȚĂ

Acestea se pot construi pe cale analitică reprezentînd expresiile de la arcul cu trei articulații cu interpretarea care a fost dată la sarcinile fixe pentru arcul cu zăbrele, sau prin deplasări virtuale, aplicînd metoda generală de la grinzile cu zăbrele prin suprimarea unei bare și determinarea centrelor instantanee. Se va da cîte un exemplu de linie de influență atît pe cale analitică, cît și prin deplasări virtuale.

Linia S_{1-3} (fig. 320). Luînd momentele în raport cu nodul 4, pentru forțele din stînga secțiunii $I - I$, rezultă :

$$S_{1-3} = -\frac{1}{h_4}(M_4^0 - Hy_4),$$

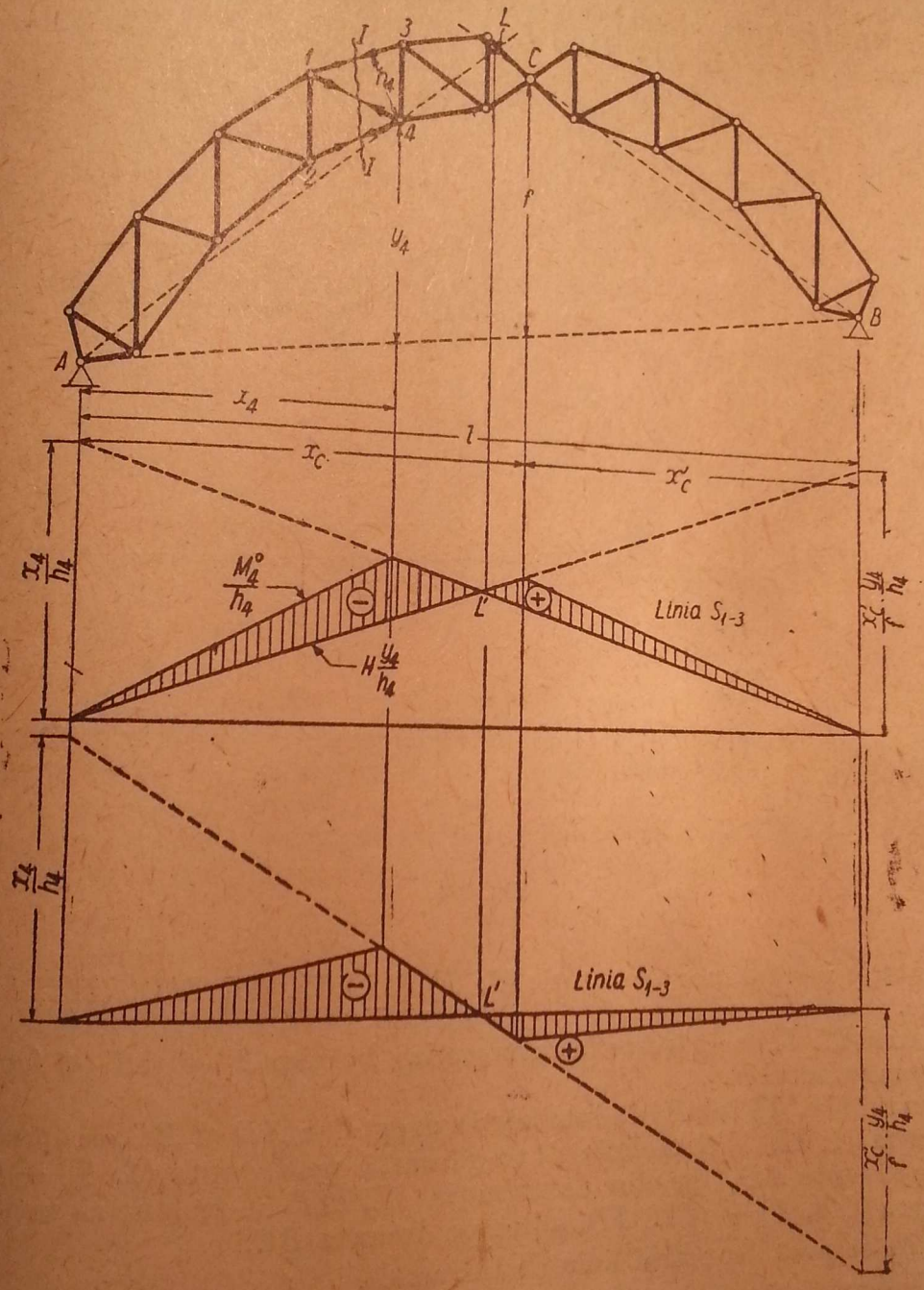


Fig. 320.

deci, se va reprezenta expresia din paranteză ca la arcul cu trei articulații cu secțiune plină și se va împărți cu $-h_4$.

Punctul L de ordonată nulă a liniei de influență se găsește la intersecția dreptelor $B - C$ și $A - 4$.

Linia de influență este reprezentată în fig. 320, unde a fost apoi redesenată de la o linie de reper orizontală.

Linia de influență D_{2-3} *la arcul cu consolă și grindă independentă din fig. 321.* Arcul are o consolă și apoi urmează o grindă independentă.

Se va construi această linie de influență prin deplasări virtuale.

Se suprimă bara $2 - 3$; corpurile care formează sistemul cinematic sînt haşurate : *I, II, III, IV, V, VI.*

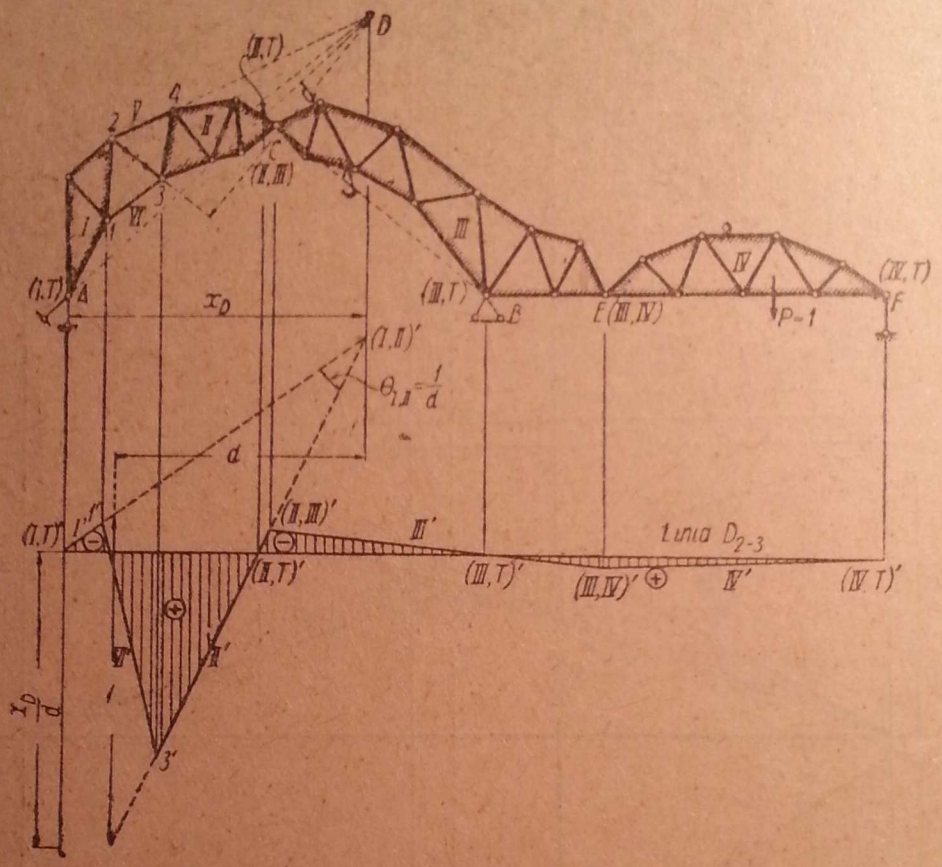


Fig. 321.

Centrele instantanee de rotație (I, T), (III, T), (II, III), (III, IV) sînt evidente.

Centrul (I, II) se găsește la intersecția barelor $2-4$ și $1-3$ (corpurile *V* și *VI*) în punctul *D*.

Centrul (II, T) se află la intersecția dreptelor *AD* și *BC*, deoarece : din combinația *I, II, T* el trebuie să se găsească pe dreapta $(I, T) - (I, II)$, adică pe dreapta *AD*, iar din combinația *II, III, T* trebuie să se găsească pe dreapta $(III, T) - (III, II)$, adică pe dreapta *BC*.

Acum se poate construi linia de influență.

Prin depărtarea nodurilor *2* și *3* cu cantitatea 1, corpul *I* se ridică, deci din $(I, T)'$ se duce o dreaptă I' în sus. Pe ea se proiectează centrul (I, II) în $(I, II)'$. Pe linia de reper se proiectează centrul (II, T) în $(II, T)'$. Prin $(II, T)'$ și $(I, II)'$ se duce dreapta II'. Pe ea se proiectează centrul (II, III) în $(II, III)'$ și apoi prin $(II, III)'$ și $(III, T)'$ se duce dreapta III', pînă unde se proiectează centrul (III, IV) în $(III, IV)'$ și, în fine, și dreapta IV', prin $(III, IV)'$ și $(IV, T)'$.

Pentru definitivarea liniei de influență trebuie să se cunoască linia de încărcare. Să presupunem că aceasta este talpa inferioară. În acest caz se proiectează nodul *1* pe dreapta *I'* și nodul 3 pe dreapta *II'* și, unind proiecțiile lor, se obține dreapta *VI'*.

Semnele sînt determinate automat (plus — în jos, și minus — deasupra liniei de reper), iar scara rezultă din unghiul

$$\theta_{I,II} = \frac{1}{d},$$

în care d este distanța de la centrul (I, II) la bara $2-3$.

Scara grafică se obține punînd valoarea verticală 1 la distanța orizontală d în deschiderea unghiului $\theta_{I,II}$.

În același mod se pot găsi liniile de influență pentru eforturile din orice bară.

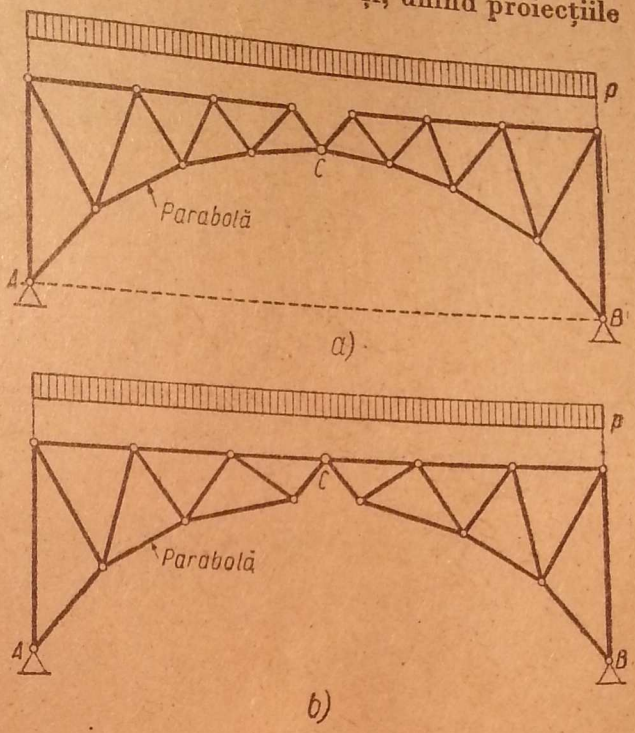


Fig. 322.

O mare importanță pentru valoarea eforturilor din bare o are poziția celor trei articulații A, B, C în raport cu tălpile grinzilor cu zăbrele și se va indica numai un exemplu caracteristic.

În fig. 322, *a* talpa inferioară a arcului cu zăbrele este parabolică și articulațiile A, B și C sînt toate pe această talpă. Dacă încărcarea este uniform distribuită, atunci este evident că numai talpa inferioară are eforturi. Barele tălpii superioare nu lucrează.

Dacă, însă, se mută articulația C de pe talpa inferioară pe talpa superioară (fig. 322, *b*), vor lucra amble tălpi și diagonalele [1]).

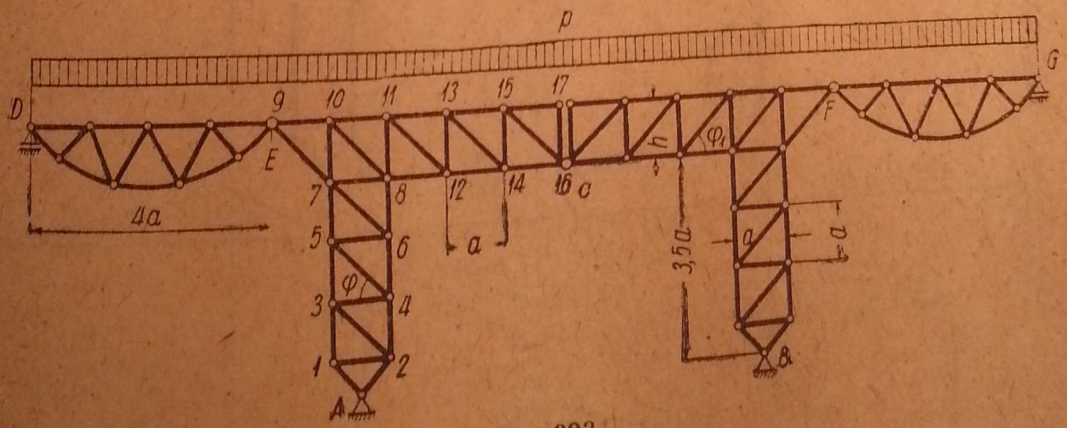


Fig. 323.

Aplicația 79. La construcția din fig. 323 să se determine:
a) eforturile din încărcarea figurată în toate barele sistemului;

[1]) Variația eforturilor în barele arcului cu trei articulații cu zăbrele în funcție de contur este studiată mai amănunțit în *I. P. Prokofiev*, op. cit., pag. 239.

b) liniile de influență în barele *4—5, 4—6, 12—14, 8—10, 13—14, 11—13.*

Răspuns :

$$H_A = H_B = \frac{4}{7} pa;$$

$$V_A = V_B = 7\,pa;$$

$$D_{2-3} = D_{4-5} = D_{6-7} = \frac{H}{\cos\varphi} = \frac{4\sqrt{2}}{7} pa;$$

$$V_{1-3} = -\frac{45}{14} pa;\quad V_{3-5} = -\frac{37}{14} pa;\quad V_{5-7} = -\frac{29}{14} pa;$$

$$V_{2-4} = -\frac{61}{14} pa;\quad V_{4-6} = -\frac{69}{14} pa;\quad V_{6-8} = -5{,}5\,pa.$$

$$S_{9-10} = \frac{5\,pa^2}{2h};\quad D_{9-7} = -\frac{5\,pa}{2\sin\varphi_1};$$

$$V_{7-10} = +pa;\qquad S_{10-11} = \frac{9}{2}\cdot\frac{pa^2}{h};$$

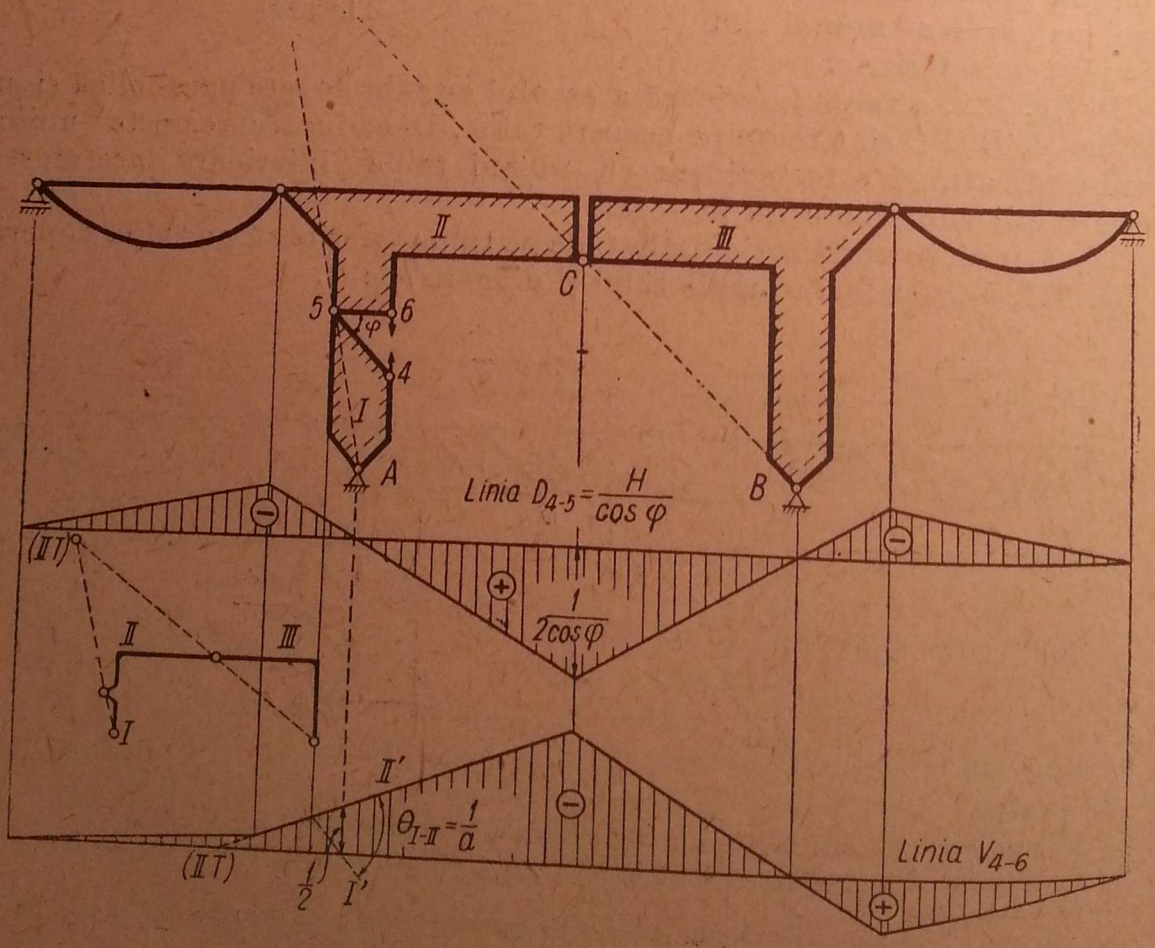


Fig. 324.

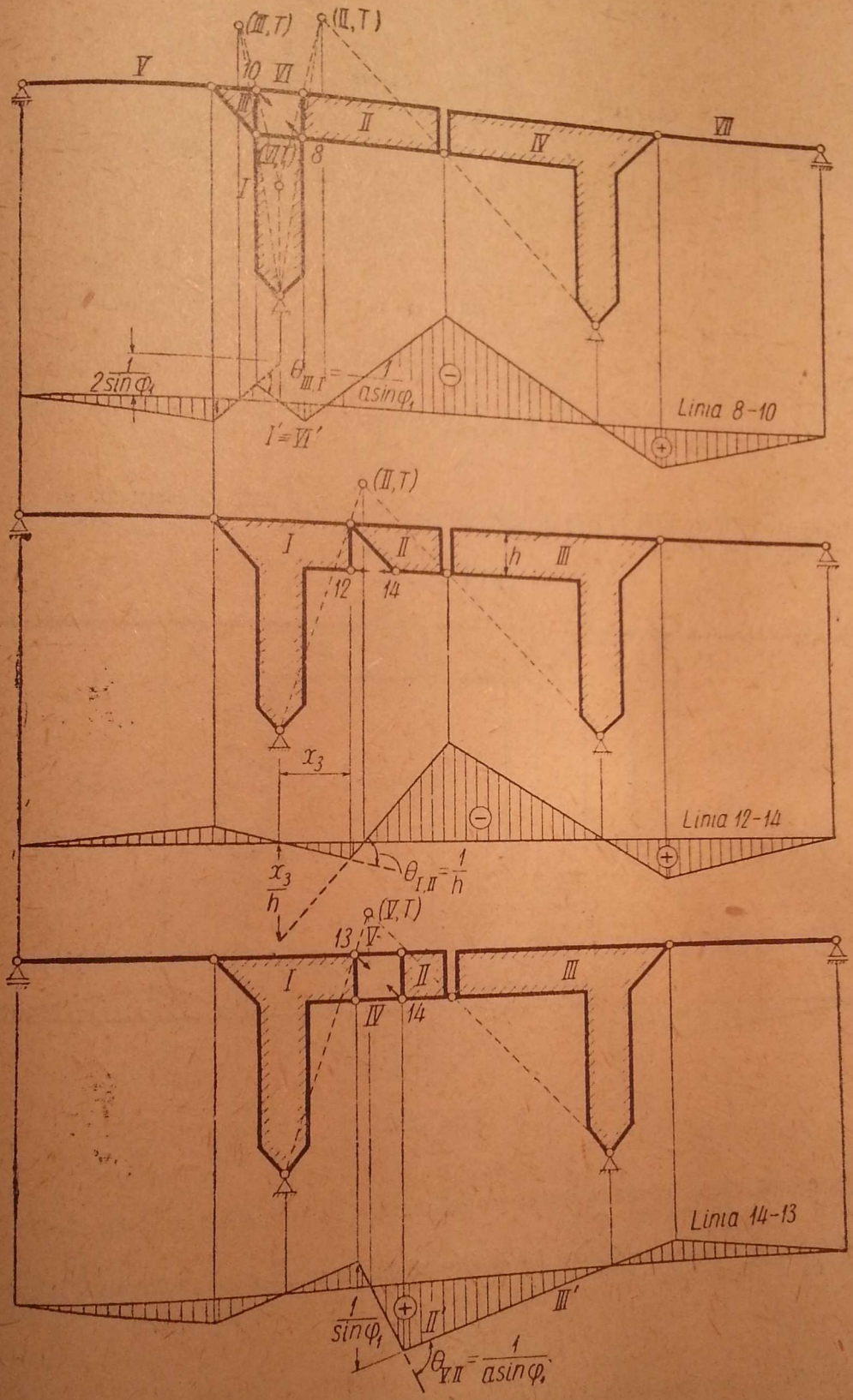

(III,T)
(II,T)
V
10
VI
III
II
IV
VII
(VI,T)
8
I
2 sin φ1
θIII,I = 1/a sin φ1
Linia 8-10
I'=VI'
(II,T)
I
II
h
III
12
14
x3
Linia 12-14
x3/h
θI,II = 1/h
(V,T)
13
V
I
II
III
IV
14
Linia 14-13
1/sin φ1
II'
III'
θV,II = 1/a sin φ1

Fig. 325.

$$D_{10-8} = -\frac{2\,pa}{\sin\varphi_1}\,;\quad D_{11-12} = \frac{5\,pa}{2\,\sin\varphi_1}\,;$$

$$D_{13-14} = \frac{3}{2}\,\frac{pa}{\sin\varphi_1}\,;\quad D_{15-16} = \frac{1}{2}\,\frac{pa}{\sin\varphi_1}\,;$$

$$I_{7-8} = -\frac{5}{2}\,\frac{pa^2}{h} - \frac{4}{7}\,pa\,;\quad I_{8-12} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{pa^2}{h} - \frac{4\,pa}{7}\,;$$

$$I_{12-14} = -\frac{2\,pa^2}{h} - \frac{4}{7}\,pa\,;\quad I_{14-16} = -\frac{4}{7}\,pa - \frac{1}{2}\,\frac{pa^2}{h}\,.$$

$$S_{11-13} = \frac{2\,pa^2}{h}\,;\quad S_{13-15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{pa^2}{h}\,;\quad S_{15-17} = 0\,;$$

Liniile de influență sînt reprezentate în fig. 324, 325 și 326. Construcția lor este explicată în fiecare figură în parte.

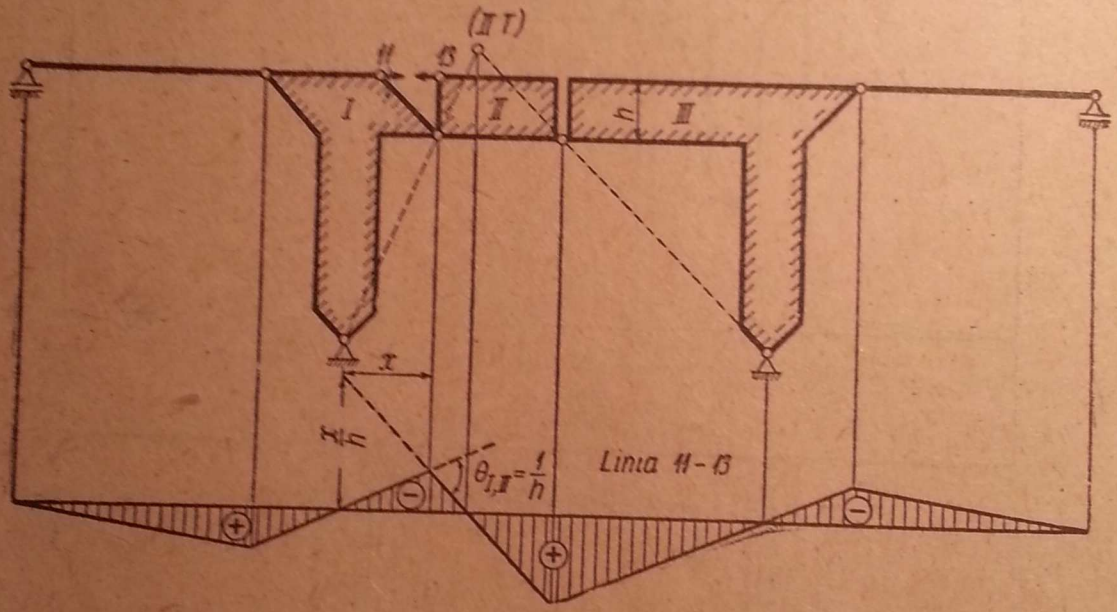


Fig. 326.

Aplicația 80. Să se determine liniile de influență ale eforturilor în barele *2—3*; *3—6*; *7—8*; *7—9*; *8—9* și *8—10* din fig. 327.

Linia D_{2-3}. Făcînd secțiunea *I—I*, efortul în bara *2—3* se determină luînd momentele în raport cu *A*. Rezultă:

$$D_{2-3} = 0.$$

Linia D_{3-6}. Se taie bara *3—6* și se obține sistemul cinematic din fig. 328, *a*. Linia de influență este reprezentată în fig. 328, *a'*, a cărei scară este determinată de

$$\theta_{I,II} = \frac{1}{\lambda\,\sin\varphi_1}\,.$$

Linia V_{7-8}. Sistemul cinematic este arătat în fig. 328, *b*, iar linia de influență, în fig. 328, *b'*. Scara se determină luînd

$$\theta_{I,IV} = \frac{1}{\lambda}.$$

Linia D_{8-9}. Se folosesc rezultatele de la linia V_{7-8}, centrele (*I*, *II*) și (*II*, *T*) rămînînd aceleași, iar corpul *IV* fiind bara *8—10*. Luînd

$$\theta_{IV,II} = \frac{1}{\lambda \sin \varphi},$$

se determină scara (fig. 328, *c*).

Linia I_{7-9}. Sistemul cinematic este arătat în fig. 328, *d*, iar linia de influență, în fig. 328, *d'*. Scara se determină cu :

$$\theta_{I,II} = \frac{1}{h'_8}.$$

Pe cale analitică :

$$I_{7-9} = \frac{M_8}{h'_8}.$$

Linia S_{8-10} (fig. 328, *e* și *e'*).

$$S_{8-10} = -\frac{M_9}{h_9}; \; M_9 = M_9^0 - Hy_9; \; S_{8-10} = \frac{-M_9^0}{h_9} + \frac{Hy_9}{h_9}.$$

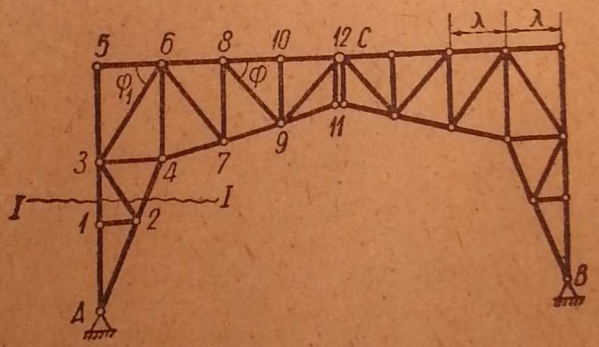


Fig. 327.

Ordonata în dreptul nodului 9 este :

$$-\frac{x_9 x'_9}{lh_9} + \frac{x_9 y_9}{2fh_9} = \frac{x_9}{h_9}\left(-\frac{x'_9}{l} + \frac{y_9}{2f}\right).$$

In fig. 328 *e*, linia de influență S_{8-10} este reprezentată astfel încît să fie puse în evidență cele două părți componente ale expresiei sale analitice, iar în fig. 328 *e'* este redesenată de la o linie de reper orizontală.

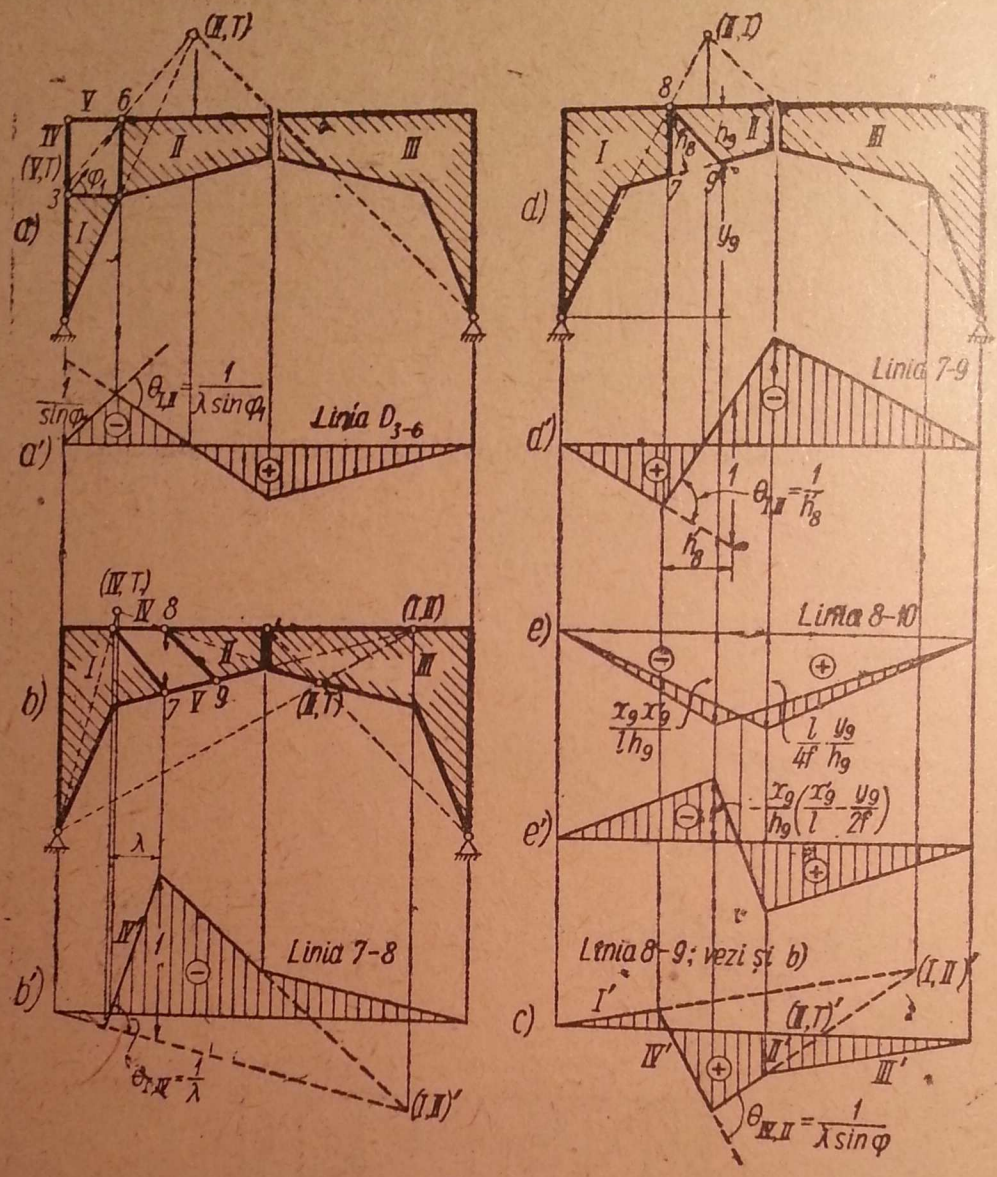


Fig. 328.

§ 37. SISTEME MIXTE (CU GRINDĂ DE RIGIDIZARE)

Acestea sînt alcătuite din două feluri de bare : o grindă dreaptă, cu secțiune plină sau cu zăbrele, care poate lua momente încovoietoare, și un arc din bare articulate, sau un tirant poligonal care poate lua numai eforturi axiale.

În mod obișnuit, asemenea construcții sînt static determinate exterior și odată static nedeterminate interior.

În fig. 329, *a* este dat cel mai simplu exemplu. O grindă dreaptă $A - B$ cu un tirant $A - C' - B$ și un montant $C - C'$.

Grinda $A - B$ poate prelua eforturi axiale și de încovoiere, pe cînd barele $A - C'$, $C' - B$ și $C - C'$ pot prelua numai eforturi axiale. Sistemul este static determinat exterior (articulație în A și reazem simplu în B).

În interior este odată static nedeterminat, deoarece, dacă se taie una dintre barele care suportă numai eforturi axiale (de exemplu, $A - C'$) sistemul se reduce la o grindă simplu rezemată $A - B$.

Pentru a-i păstra caracteristicile eforturilor, îl vom face static determinat prin introducerea unei articulații în grinda de rigidizare, cum se arată în fig. 329, *b*, unde s-a introdus o articulație în C.

În acest fel sistemul este static determinat, dar a rămas un sistem mixt, avînd grinda dreaptă $A-C-B$ care suportă încovoieri, și barele $A - C'$, $C - C'$ și $C' - B$ care suportă numai forțe axiale.

Sistemele acestea cu articulație în grinda de rigidizare se reduc, din punctul de vedere al calculului, la un arc cu trei articulații.

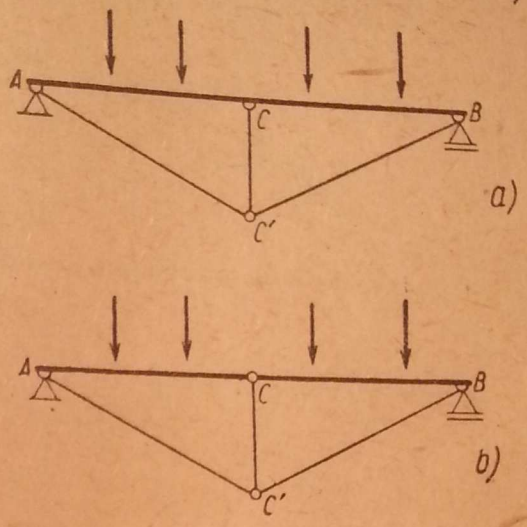


Fig. 329.

Dacă nu s-ar introduce această articulație, sistemul s-ar reduce — pentru calcule — la un arc cu două articulații, odată static nedeterminat.

Mai jos se vor studia cîteva cazuri caracteristice.

A. ARCE DIN BARE ARTICULATE CU GRINDA DE RIGIDIZARE LA PARTEA INFERIOARĂ

a) Grinda de rigidizare cu secțiune plină

Practic, grinda de rigidizare n-are articulații, și sistemul este odată static nedeterminat interior (fig. 330, *a*), deoarece, dacă s-ar tăia o bară a arcului, sistemul s-ar reduce la grinda simplu rezemată $A - B$.

Înainte de a introduce articulația în mijlocul grinzii de rigidizare $A - B$ pe care se aplică sarcinile, se pot trage cîteva concluzii.

Din izolarea nodurilor *1*, *2*, . . . rezultă (fig. 330, *b*) :

$$S_2 \cos \alpha_2 = S_3 \cos \alpha_3 = \ldots = -H,$$

în care H este proiecția orizontală a tuturor eforturilor din barele articulate ale arcului.

Tot din izolarea nodurilor rezultă (fig. 330, *b*) :

$$Z_2 = S_3 \sin \alpha_3 - S_2 \sin \alpha_2 = +H (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3).$$

Deci, dacă se cunoaște H, eforturile în toate barele articulate ale arcului și ale tiranților verticali vor fi cunoscute așa cum se arată grafic în fig. 330, *c*.

Pentru a afla eforturile în grinda de rigidizare $A-B$, se face o secțiune verticală $I - I$ prin punctul i al grinzii, care taie bara S_3 în i'.

Dacă în punctul i', se descompune S_3 în componenta orizontală H și verticală $V = H \operatorname{tg} \alpha_3$ (fig. 330, *d*), și se exprimă condițiile de echilibru

al părții din stînga prin ecuația de momente în raport cu i și ecuația de proiecție pe verticală, se obține :

$$-M_i + [V_A \cdot x_i - \sum P_h (x_i - a_h)] - H \cdot y_i = 0;$$

$$-T_i + [V_A - \sum P_h] - V = 0.$$

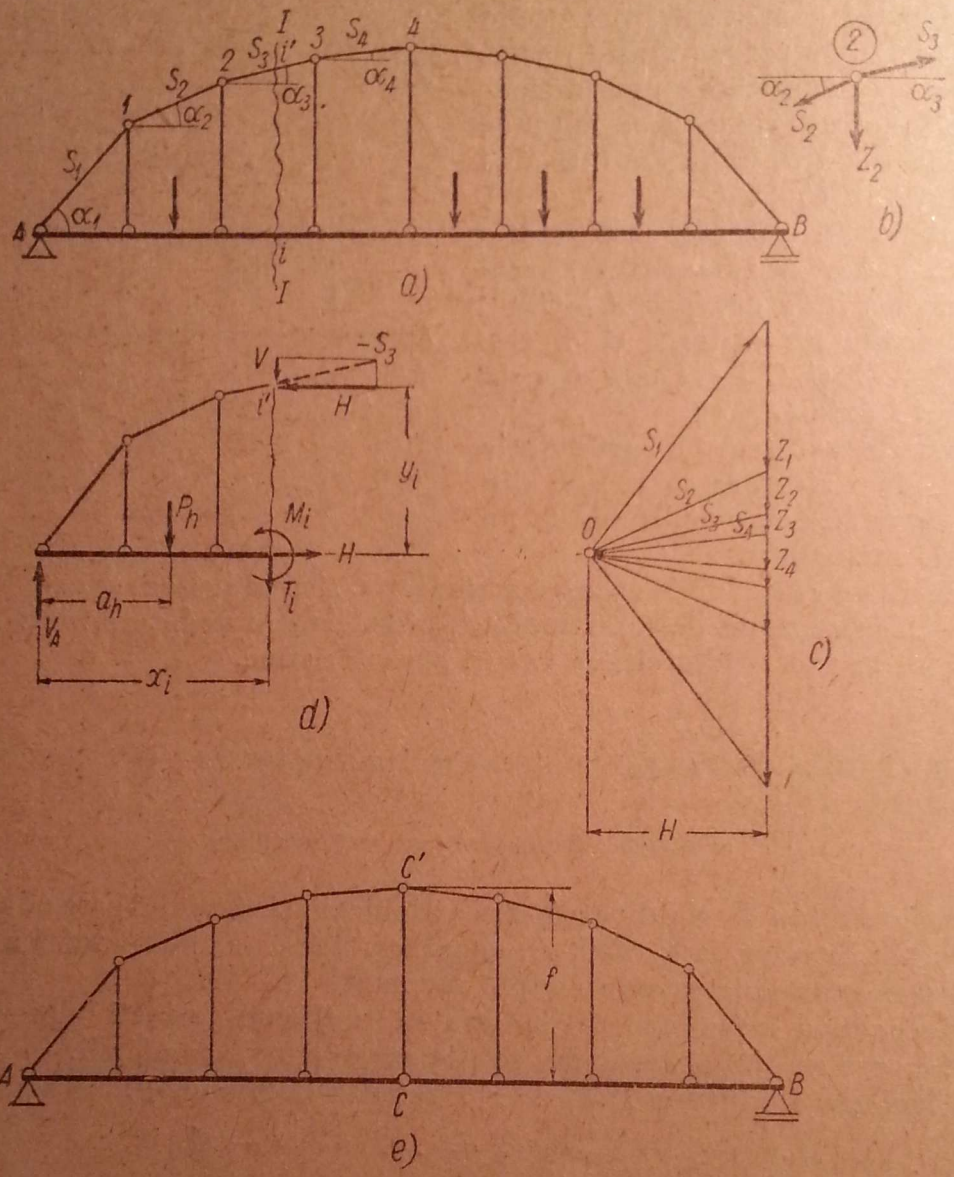


Fig. 330.

În ecuația de momente V nu intervine, deoarece trece prin i. Dar

$$V_A x_i - \sum P_h (x_i - a_h) = M_i^0,$$

$$V_A - \sum P_h = T_i^0,$$

în care M_i^0 și T_i^0 reprezintă momentul încovoietor și forța tăietoare într-o grindă simplu rezemată $A - B$.

Dacă se ține seamă că $V = H \operatorname{tg} \alpha_3$, se obține :

$$M_i = M_i^0 - Hy_i,$$

$$T_i = T_i^0 \cdot H \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{1}{\cos \alpha_3} (T_i^0 \cos \alpha_3 - H \sin \alpha_3),$$

expresii cunoscute de la arce.

Deci, dacă H este cunoscut, se pot determina și eforturile în orice secțiune a grinzii de rigidizare.

În construcțiile reale H este o necunoscută static nedeterminată și se obține din condiția de deformație.

Pentru a-l determina pe H în acest capitol al sistemelor static determinate, se introduce o articulație în punctul C, mijlocul grinzii de rigidizare (fig. 330, *e*).

Punînd condiția ca momentul încovoietor în articulația C să fie zero, se obține H :

$$M_c = M_c^0 - Hf = 0,$$

de unde rezultă

$$H = \frac{M_c^0}{f}.$$

Cu aceasta sistemul este rezolvat, deoarece toate expresiile eforturilor și ale reacțiunilor sînt cele de la arcul cu trei articulații.

Pentru exemplificare se vor trasa liniile de influență ale lui H, M_i și T_i.

Linia H. Din expresia

$$H = \frac{M_c^0}{f}$$

rezultă construcția din fig. 331.

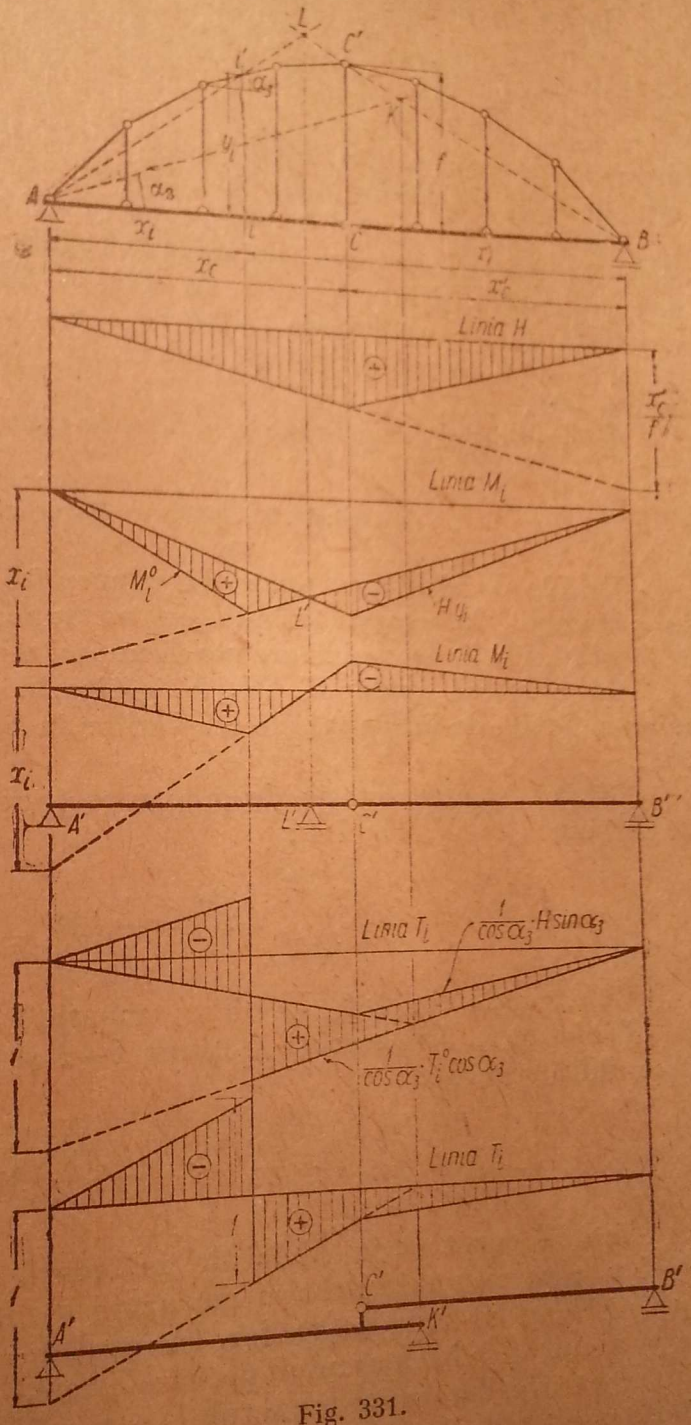


Fig. 331.

Liniile eforturilor axiale în barele arcului (S_2, S_3, . . .) și în tiranții verticali se deduc din linia lui H multiplicată cu coeficienții respectivi.

Linia M_i. Din expresia :

$$M_i = M_i^0 - Hy_i$$

rezultă construcția din fig. 331.

Punctul de ordonată nulă L se determină prin intersecția lui $A - i'$ cu BC'.

Linia T_i. Expresia

$$T_i = T_i^0 - H \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{1}{\cos \alpha_3} (T_i^0 \cos \alpha_3 - H \sin \alpha_3)$$

arată că paranteza este tocmai expresia forței tăietoare în secțiunea i' a arcului cu trei articulații, în care $\varphi = \alpha_3$.

Deci, se va construi această linie de influență în modul următor. Din A se duce paralelă la tangentă, adică la bara secționată în i' care face unghiul α_3 cu oriontala, și intersecția ei cu dreapta BC' va determina punctul K de ordonată nulă pentru forța tăietoare. Se construiește linia de influență la fel ca la arcul cu trei articulații și se multiplică cu $1/\cos \alpha_3$, așa cum se vede în fig. 331.

Efortul axial din grinda de rigidizare este egal cu H (întindere).

b) Grindă de rigidizare din grindă cu zăbrele

Grinda de rigidizare poate fi concepută ca o grindă cu zăbrele, care, în ansamblu, înlocuiește grinda cu secțiune plină. Evident, în acest caz, în barele grinzii de rigidizare vor fi numai efoturi axiale.

Cu ajutorul liniilor H, M_i, T_i găsite în cazul precedent se pot determina și liniile de influență ale eforturilor în barele grinzii de rigidizare (fig. 332).

Linia I_{3-5}. Din ecuația de momente în raport cu nodul 4 determinată de secțiunea $I-I$, rezultă :

$$I_{3-5} = \frac{M_4}{h} = \frac{1}{h} (M_4^0 - Hy_4).$$

Construcția liniei I_{3-5} este reprezentată în figură.

Linia S_{2-4}. Din aceeași secțiune $I-I$ și ecuația de momente în raport cu nodul 3 rezultă :

$$S_{2-4} = -\frac{M_3}{h} = -\frac{1}{h} (M_3^0 - Hy_3).$$

Pentru construcția liniei de influență trebuie să se observe că, la arce, y este ordonata arcului măsurată de la linia nașterilor, ori nodul 3 nu se găsește pe linia nașterilor. În cazul de față y_3 este distanța verticală de la nodul 3 la bara arcului pe care o taie.

Pentru a determina punctul L_2 de ordonată nulă, va trebui deci ca y_3 să fie așezat de la linia nașterilor în sus ; astfel se determină punctul $3'$. Punctul L_2 se va găsi la intersecția lui BC' cu $A - 3'$.

Linia de influență se construiește cu ajutorul punctului L_2', proiecția lui L_2 pe linia de reper. Datorită faptului că $P = 1$ se deplasează pe talpa

2–4, vîrful din dreptul lui 3 al liniei de influență trebuie corectat cu dreapta 2′–4′.

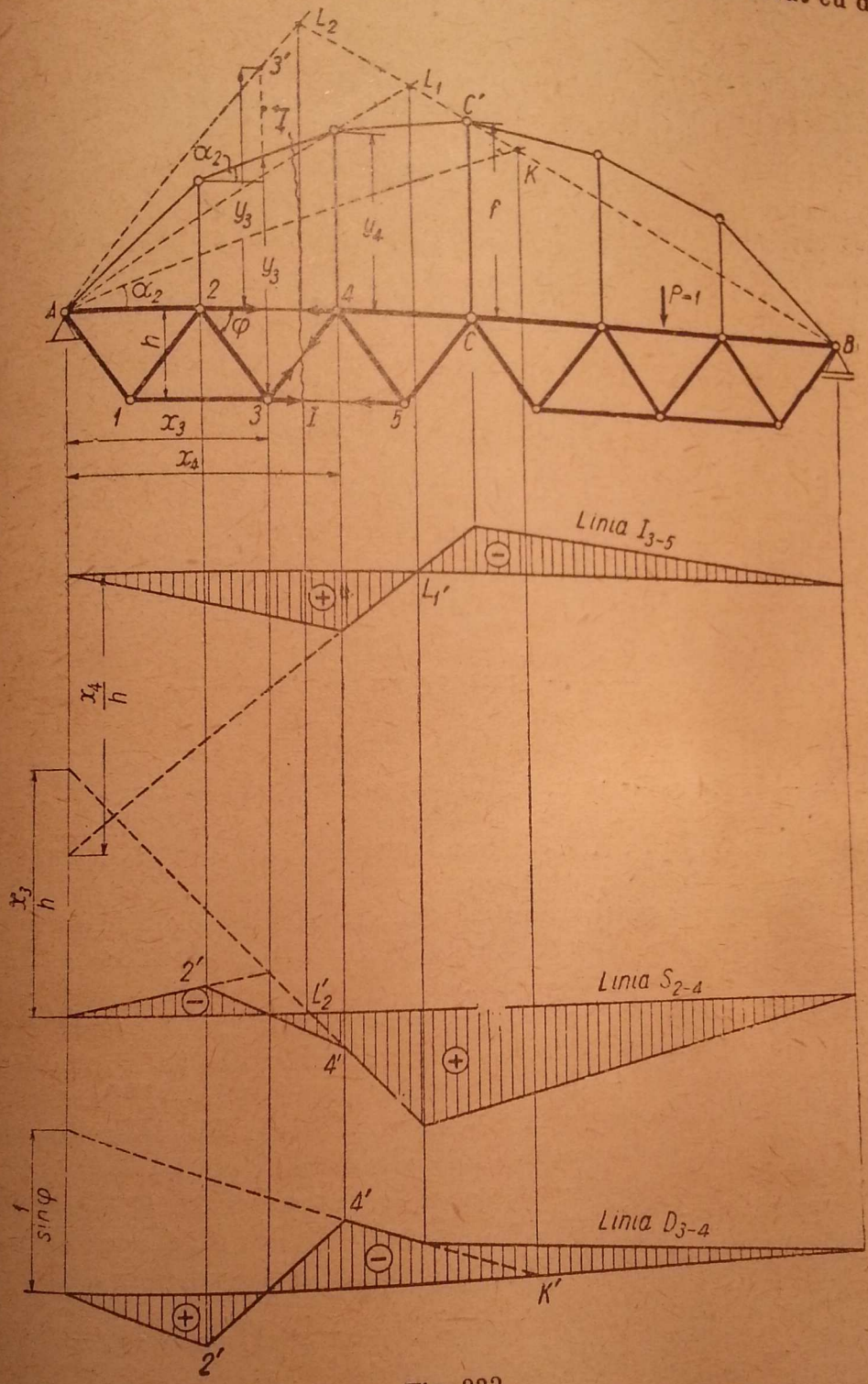


Fig. 332.

Linia D_{3-4}. Din ecuația de proiecție pe verticală, determinată de aceeași secțiune $I - I$, se obține :

$$D_{3-4} = -\frac{T_{2-4}}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi}\left(T^0_{2-4} - H \operatorname{tg}\alpha_2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{\cos\alpha_2}\left(T^0_{2-4}\cos\alpha_2 - H\sin\alpha_2\right).$$

Punctul K se găsește la intersecția dreptei din A, înclinată cu unghiul α_2 față de orizontală, cu dreapta BC'.

Rezultă de aici că, folosind rezultatele de la arcul cu trei articulații, se pot construi liniile de influență pentru toate elementele. Trebuie dată însă o atenție deosebită pentru a se interpreta just analogia față de arcul cu trei articulații.

În exemplul din fig. 332 articulația C se găsește pe dreapta $A - B$. Dacă însă articulația ar fi fost în afara acestei drepte, de exemplu, pe talpa inferioară a grinzii de rigidizare, f ar fi trebuit măsurat pînă acolo, și la construcția respectivă trebuie mutată linia nașterilor, paralel prin C.

B. ARCE DIN BARE ARTICULATE CU GRINDA DE RIGIDIZARE LA PARTEA SUPERIOARĂ

a) Grindă de rigidizare cu secțiune plină

Se realizează de obicei, cu grinda de rigidizare $A'B'$ fără articulație, sistemul fiind odată static nedeterminat (fig. 333, *a*).

Ca și în cazul precedent, rezultă că, dacă H este cunoscut, eforturile în toate barele articulate sînt cunoscute (fig. 333, *b*)

$$S_1 = -\frac{H}{\cos \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{H}{\cos \alpha_2} \quad \text{etc.}$$

și

$$Z_1 = -H(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2); \quad Z_2 = -H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) \text{ etc.}$$

Atît eforturile $S_1, S_2, \ldots$ în barele arcului, cît și eforturile $Z_1, Z_2, \ldots$ în barele verticale, sînt compresiuni.

Dacă se prelungește prima latură S_1 din A pînă cînd întîlnește verticala reazemului A' în A'', direcția efortului S_1 este evident $A'' - A$. La fel, în B direcția efortului este $B - B''$.

Se unește A'' cu B'' și se descompune efortul în A'', care este chiar reacțiunea $R_{A''}$, după direcția $A'' - B''$ și verticală, în componentele H și $V_{A''}$, (s-a presupus $A'' - B''$ orizontală; dacă $A'' - B''$ ar fi înclinată trebuie folosit H' după direcția $A'' - B''$ în loc de H). Reacțiunea grinzii $A' - B'$ în A' este $V_{A'}$, și are aceeași linie de acțiune cu $V_{A''}$.

Dacă se face secțiunea $I - I$ și se descompune în i' efortul în bara secționată după verticală: $V_3 = H \operatorname{tg} \alpha_3$ și orizontală: H, și apoi se ia ecuația de momente în raport cu i și ecuația de proiecție pe verticală (fig. 333, *c*):

$$\begin{aligned} -M_i + [(V_{A'} + V_{A''})\, x_i - \Sigma P_h (x_i - a_h)] - H \cdot y_i = 0; \\ -T_i + [(V_{A'} + V_{A''}) - \Sigma P_h] - V_3 = 0. \end{aligned} \qquad (g)$$

Din proiecția pe orizontală rezultă că în secțiunea i a grinzii de rigidizare nu sînt forțe axiale.

y_i este distanța dintre cele două forțe ale cuplului format de H, adică distanța de la i', unde secțiunea prin i taie bara arcului pînă la linia nașterilor fictive $A'' - B''$.

Dacă se notează

$$V_A = V_{A'} + V_{A''},$$

reacțiunea verticală totală din grindă și arc, se obține :

$$(V_{A'} + V_{A''}) - \Sigma P_h = V_A - \Sigma P_h = T_i^0,$$

$$(V_{A'} + V_{A''})\, x_i - \Sigma P_h (x_i - a_h) = V_A x_i - \Sigma P_h (x_i - a_i) = M_i^0,$$

adică forța tăietoare și momentul încovoietor în secțiunea i a unei grinzi simplu rezemate de deschidere $A'B' = l$.

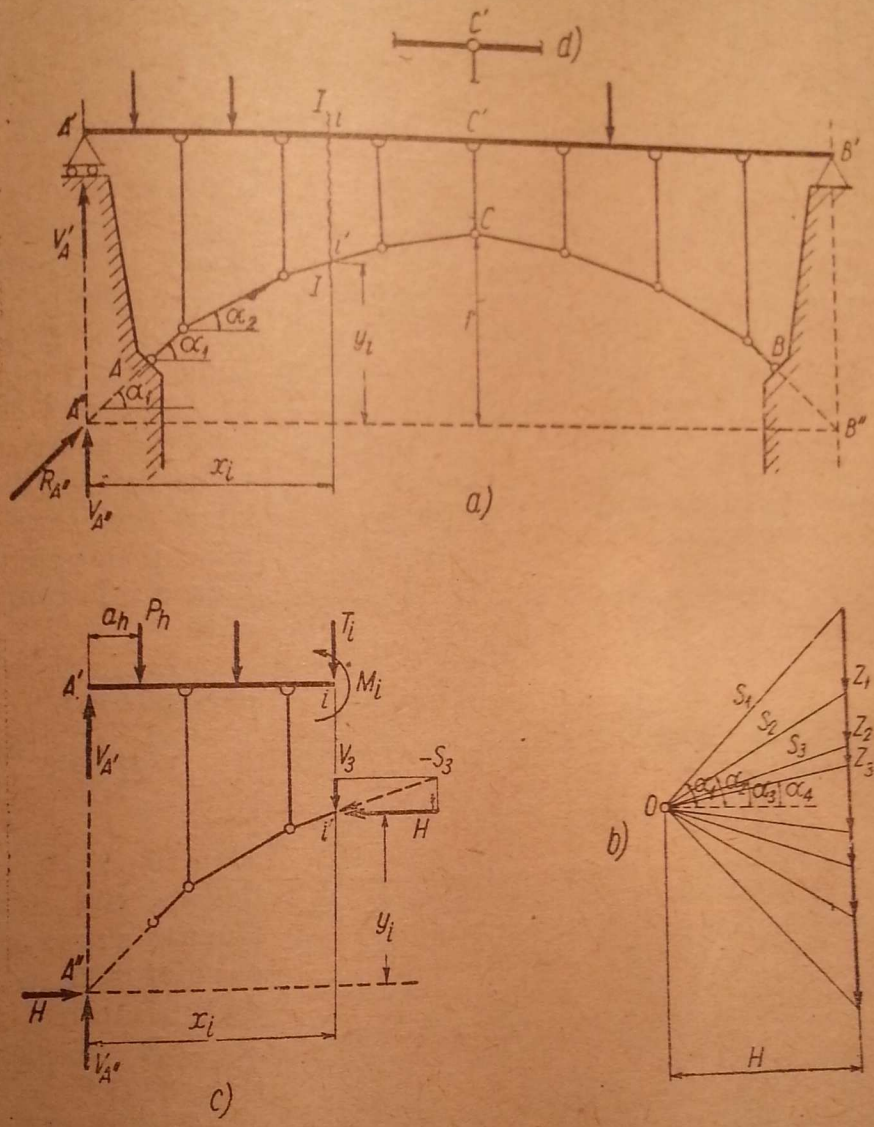


Fig. 333.

Dacă se înlocuiește și $V_3 = H \operatorname{tg} \alpha_3$, formulele (g) de mai sus devin :

$$M_i = M_i^0 - H \cdot y_i,$$

$$T_i = T_i^0 - H \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{1}{\cos \alpha_3} (T_i^0 \cos \alpha_3 - H \sin \alpha_3),$$

adică expresiile de la arcul cu articulații la nașteri. Trebuie însă observat că aici nașterile sînt fictive, determinate de intersecțiile verticalelor reazemelor grinzii de rigidizare cu prima și ultima latură a arcului din bare articulate. Arcul este deci $A'' - C - B''$.

De asemenea, rezultă că înălțimea la care este așezată grinda de rigidizare față de arc nu are nici un rol pentru eforturi.

Pentru a efectua calculele trebuie cunoscută împingerea H.

De aceea, se va introduce în C' o articulație (fig. 333, *d*) și se va scrie:

$$M_{C'} = 0,$$

$$M_{C'} = M^0_{C'} - Hf = 0,$$

de unde rezultă

$$H = \frac{M^0_{C'}}{f},$$

ca la arcul cu trei articulații. Săgeata f se măsoară de la punctul C de pe arc pînă la linia naș-terilor $A'' - B''$, care este linia de reper pentru toate ordonatele y.

Cu acestea se poate trece la calculul eforturilor din sarcini transmise prin grinda de rigidizare și la linii de influență.

Linia H. Din expresia

$$H = \frac{M^0_{C'}}{f}$$

rezultă că linia H se deduce din linia de influență a momentului încovoietor în C' pe grinda simplu rezemată $A' - B'$, împărțită cu f (fig. 334).

Linia H multiplicată cu diferiți coeficienți: $\frac{1}{\cos \alpha_1}$, $\frac{1}{\cos \alpha_2}$ etc., sau $(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$ etc., dă linia de influență a oricărui efort din barele S sau Z articulate la ambele capete. Acestea nu sînt desenate în figură.

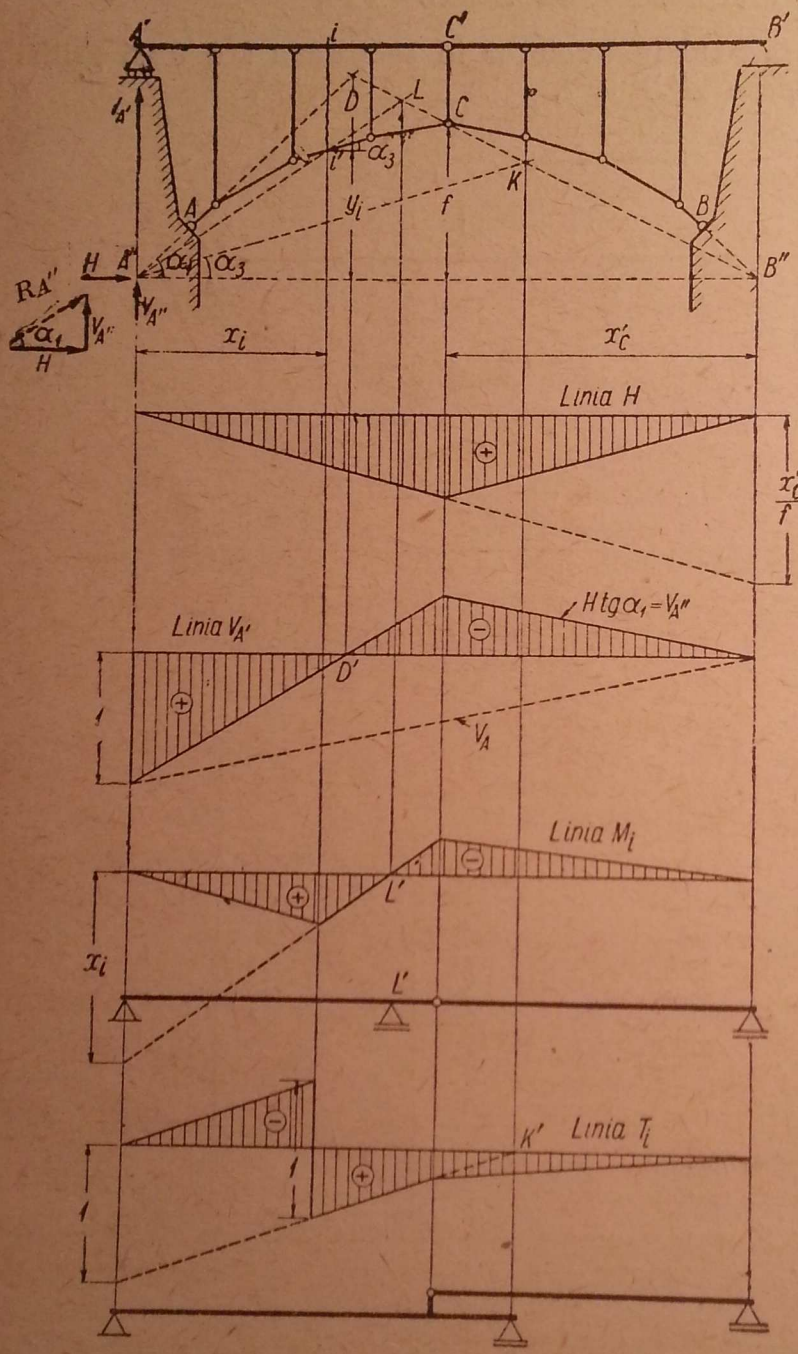


Fig. 334.

Linia $V_{A'}$. Avem:

$$V_{A'} = V_A - V_{A''} = V_A - H \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{(fig. 334)}.$$

Deci, la linia lui V_A, care este un triunghi cu ordonata 1 pe un reazem și 0, pe celălalt, trebuie să se adauge linia lui H multiplicată cu $-\operatorname{tg} \alpha_1$

Punctul limită al liniei de influență este determinat de intersecția D a dreptei $B''C$ cu $A''A$, deoarece, dacă $P=1$ se găsește în D, reacțiunea totală din dreapta este dirijată după $B''C$, iar reacțiunea din stînga este dirijată după dreapta $A''-A$ a primei bare articulate, care deci o poate prelua în întregime, așa că în A' reacțiunea $V_{A'}=0$.

Linia M_i. Se reprezintă expresia :

$$M_i = M_i^0 - Hy_i$$

cu ajutorul punctului limită L' care se găsește pe verticala lui L determinat în mod obișnuit.

Linia T_i. Se reprezintă expresia :

$$T_i = T_i^0 - Htg\alpha_3 = \frac{1}{\cos\alpha_3}(T_i^0 \cos\alpha_3 - H\sin\alpha_3)$$

cu ajutorul punctului limită K ce se găsește la intersecția dreptei $B''C$ cu dreapta care pleacă din A'' și face unghiul α_3 cu orizontala.

Rezultă, deci, că problema s-a redus complet la arcul cu trei articulații.

Și acest sistem poate fi considerat static determinat exterior cînd articulația din C' lipsește, deoarece reacțiunile verticale totale $V_A = V_{A'} + V_{A''}$ și $V_B = V_{B'} + V_{B''}$, se determină ca la o grindă simplu rezemată. Numai componentele lor $V_{A'}$ și $V_{A''}$ depind de H. Astfel că, în cazul cînd articulația C' lipsește, sistemul este odată static nedeterminat interior.

Se observă că, spre deosebire de cazul precedent, aici grinda de rigidizare nu are eforturi axiale. În schimb, sistemul dă împingeri în punctele A și B.

b) **Grindă de rigidizare din grindă cu zăbrele**

Pe baza celor de mai sus se poate trece direct la desenarea liniilor de influență așa cum se arată în fig. 335.

Linia S_{6-8}. Se face secțiunea $I-I$ și se iau momentele în raport cu nodul 7. Avem :

$$S_{6-8} = -\frac{M_7}{h} = -\frac{1}{h}(M_7^0 - Hy_7).$$

Construcția se face cu ajutorul punctului limită L_1.

Linia I_{5-7}. Se face aceeași secțiune $I-I$ și se iau momentele în raport cu nodul 6. Avem :

$$I_{5-7} = \frac{M_6}{h} = \frac{1}{h}(M_6^0 - Hy_6).$$

Construcția se face cu ajutorul punctului limită L_2'.

Linia D_{6-7}. Se face aceeași secțiune $I-I$ și se proiectează pe verticală :

$$D_{6-7} = \frac{T_{6-8}}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}(T_{6-8}^0 - H\,tg\,\alpha_3) =$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\alpha_3}(T_{6-8}^0\cos\alpha_3 - H\sin\alpha_3).$$

Construcția se face cu ajutorul punctului K', proiecția lui K, determinat de intersecția dreptei $B''C$ cu dreapta care face unghiul α_3 cu orizontala și pornește din A''.

Linia V_{5-6}. Se face secțiunea $II-II$ și se proiectează pe verticală :

$$V_{5-6} = -T_{4-6}.$$

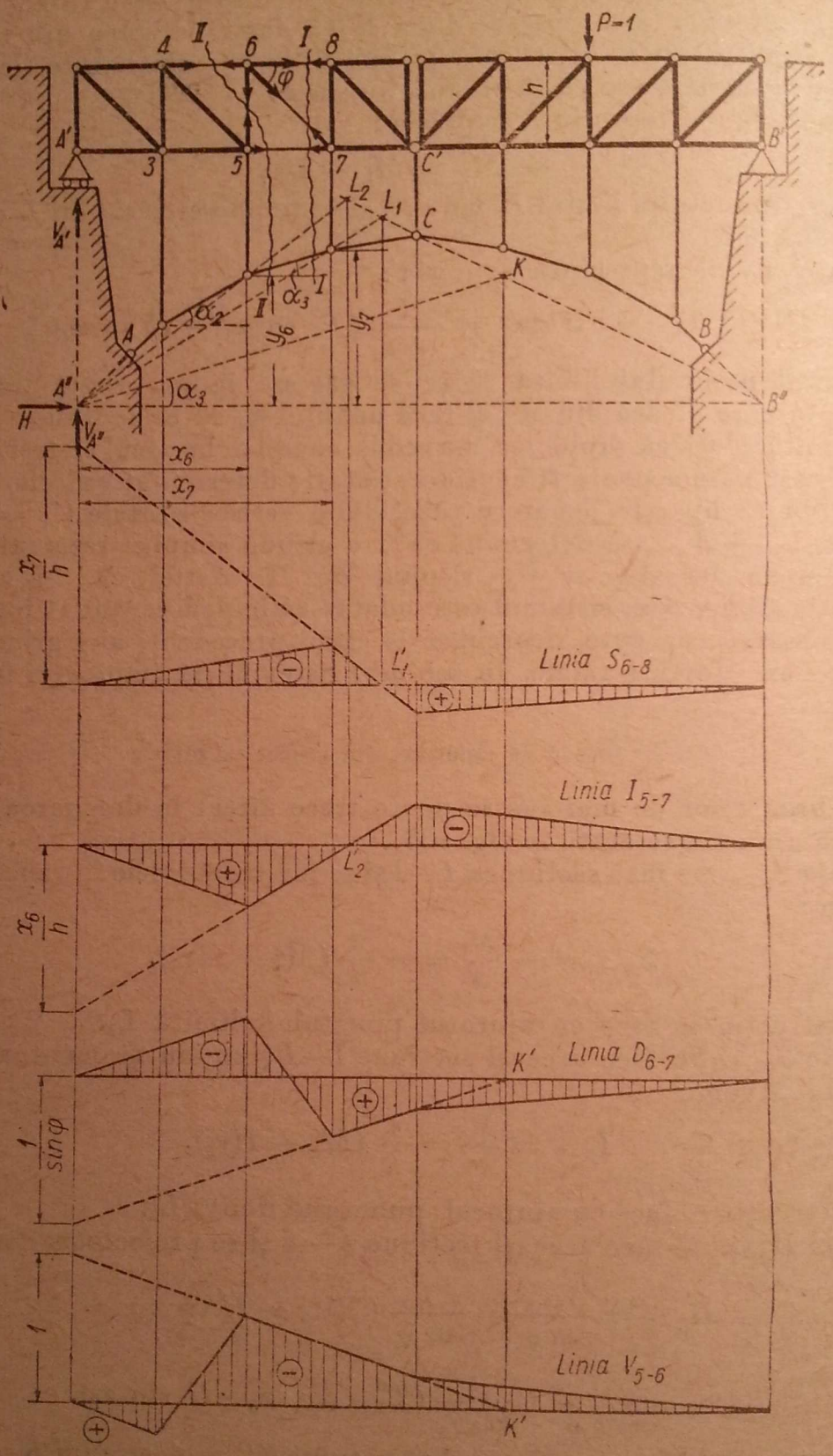

P=1
4
6
8
3
5
7
A'
B'
C'
C
K
A
B
A''
B''
H
$V_{A'}$
$V_{A''}$
L_1
L_2
α_2
α_3
y_6
y_7
x_6
x_7
$\frac{x_7}{h}$
L'_1
Linia S_{6-8}
Linia I_{5-7}
L'_2
$\frac{x_6}{h}$
K'
Linia D_{6-7}
$\frac{1}{\sin\varphi}$
1
Linia V_{5-6}
K'

Fig. 335.

Aici trebuie observat că secțiunea $II - II$ taie bara arcului din panoul $5-7$ alăturat lui $4-6$, astfel că expresia lui T_{4-6} este :

$$T_{4-6} = T^0_{4-6} - H \operatorname{tg} \alpha_3,$$

deși pe verticala panoului $4-6$ se găsește bara cu înclinarea α_2.
Deci,

$$V_{5-6} = -(T^0_{4-6} - H \operatorname{tg}\alpha_3) = -\frac{1}{\cos \alpha_3}(T^0_{4-6} \cos\alpha_3 - H \sin\alpha_3).$$

Construcția se face cu ajutorul aceluiași punct K' de la diagonala $6-7$.

C. SISETEM SUSPENDATE CU GRINDĂ DE RIGIDIZARE

La aceste sisteme arcul din bare articulate este răsturnat astfel, încît este întins și se poate face din cabluri. Grinda de rigidizare este suspendată de cablu prin bare de suspensie articulate la ambele capete (fig. 336).

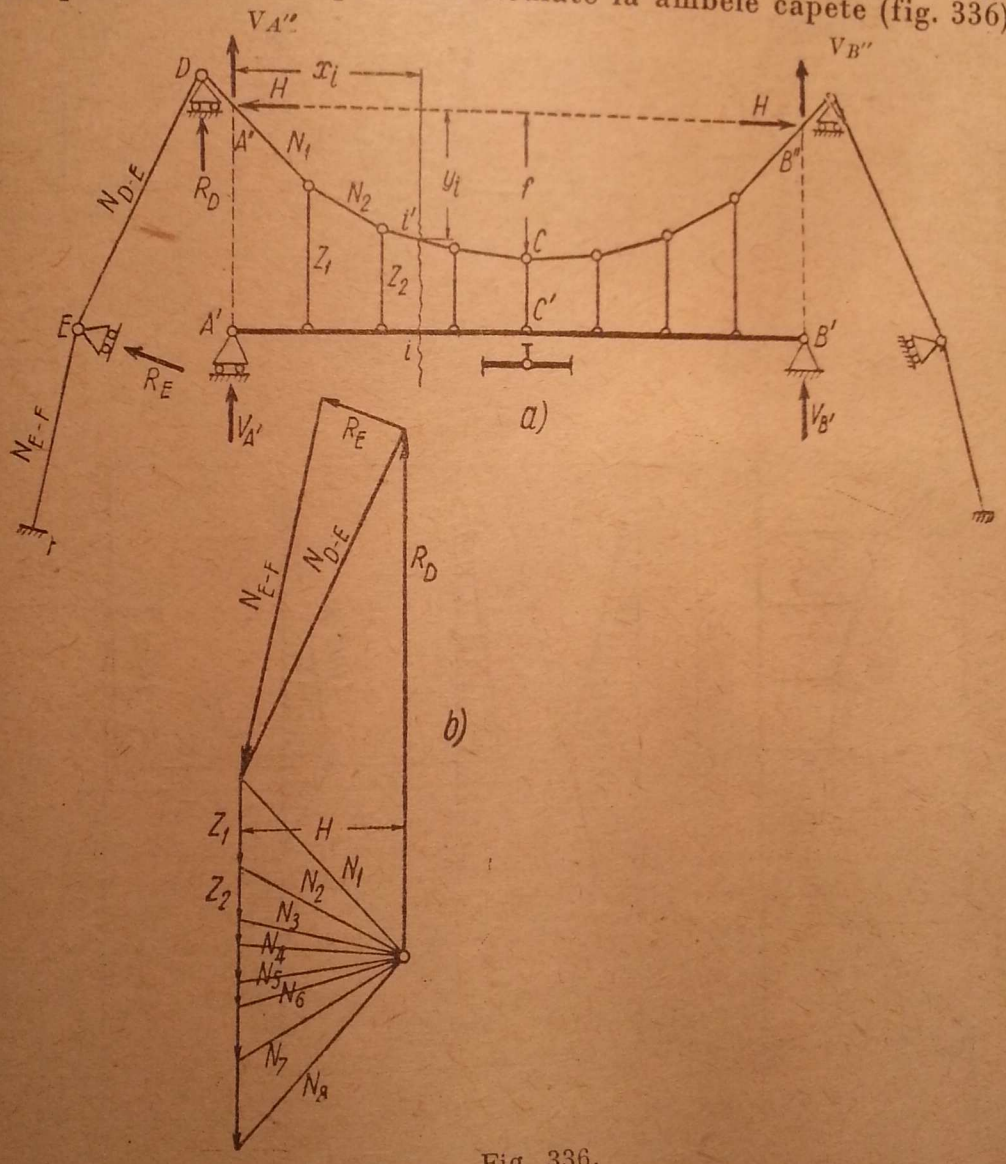


Fig. 336.

Și în acest caz grinda de rigidizare se face fără articulație, dar pentru calcule se va introduce o articulație în punctul C', care va determina pe H (fig. 336, *a*).

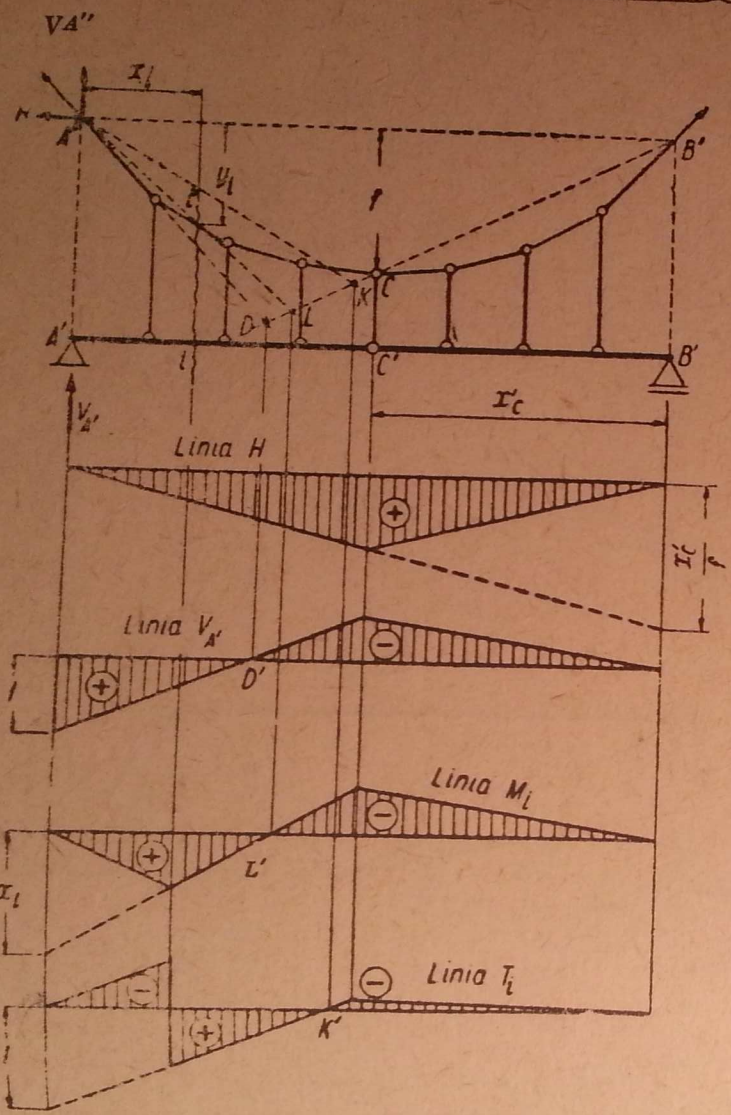


Fig. 337.

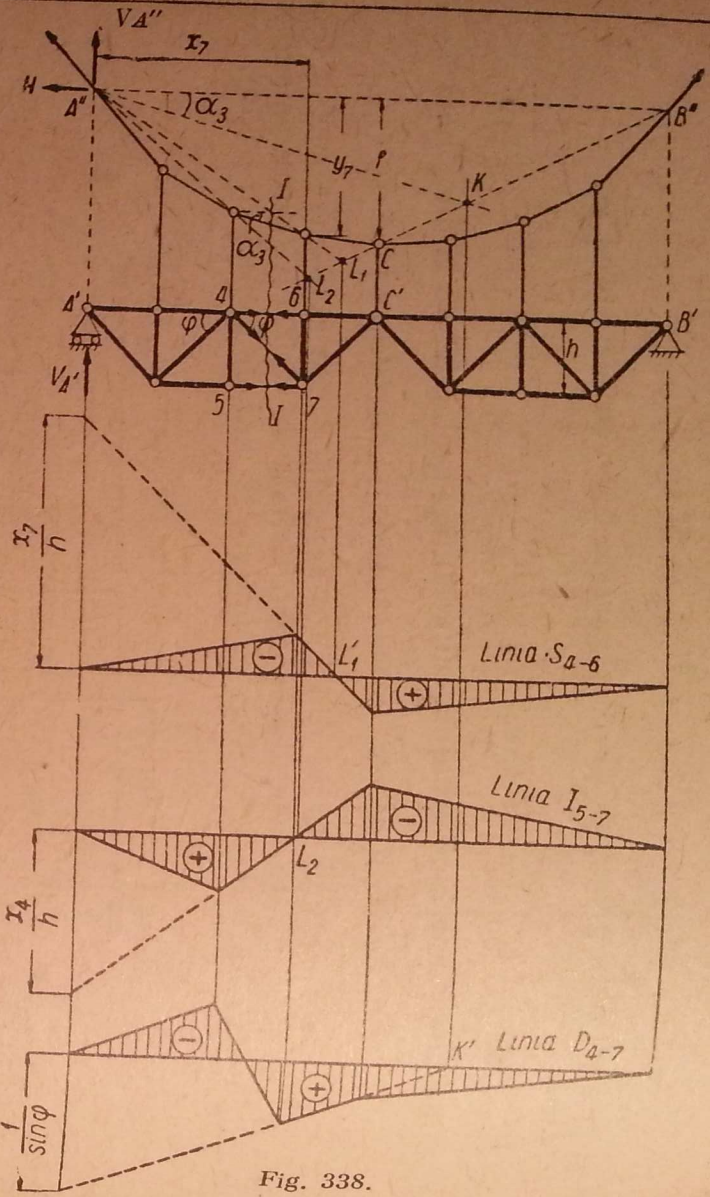


Fig. 338.

Acest sistem se reduce exact la sistemul precedent în care arcul este răsturnat și toate cele ce s-au stabilit acolo sînt valabile și în acest caz.

Astfel, dacă se cunoaște H, se cunosc toate eforturile din barele articulate la ambele capete N_1, N_2, ... etc., Z_1, Z_2, ..., N_{DE}, N_{EF}, R_D, R_E așa cum se vede în fig. 336, *b*.

Arcul teoretic cu trei articulații este arcul $A'' - C - B''$ cu săgeata f și deschiderea $l = A'B'$.

Punctele A'' și B'' se stabilesc la intersecțiile verticalelor de pe reazemele grinzii de rigidizare cu prima și ultima latură a arcului răsturnat.

Coordonatele x_i și y_i ale unui punct i de pe grinda de rigidizare se referă la arcul $A'' - C - B''$ și sînt arătate în figură.

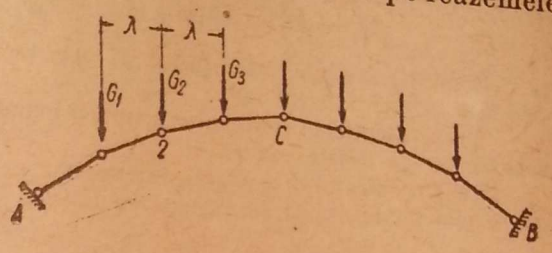


Fig. 339.

Ținîndu-se seamă de asemănarea cu cazul precedent al arcului din bare articulate cu grinda de rigidizare la partea superioară, se trece direct la liniile de influență, în același mod ca și acolo.

În fig. 337 sînt desenate liniile de influență H, $V_{A'}$, M_i și T_i pentru cazul cînd grinda de rigidizare are secțiunea plină, iar în fig. 338 sînt reprezentate liniile de influență ale eforturilor în tălpi și diagonală pentru cazul cînd grinda de rigidizare este o grindă cu zăbrele.

Observații.

1. În toate calculele efectuate pentru sistemele mixte cu grindă de rigidizare, s-a presupus că sarcinile se aplică pe grinda de rigidizare, ceea ce este perfect valabil pentru încărcările utile. Încărcările permanente nu se transmit însă numai prin grinda de rigidizare — și trebuie să se țină seamă de aceasta. De asemenea, pentru a obține soluția economică la deschideri mari, trebuie eliminate pe cît posibil momentele din grinda de rigidizare. Aceasta se obține prin separarea calculului în două. Întîi se evaluează toate sarcinile permanente și se construiește arcul din bare articulate astfel, încît să fie curba funiculară a acestor încărcări, transmise în nodurile lui. Dacă greutatea permanentă a grinzii de rigidizare inclusiv calea este g t/m, greutatea barelor verticale Z este G_z, și greutatea barelor arcului aferente unui nod este G_s, atunci în nodul 2 din fig. 339 rezultă :

$$G_2 = g\lambda + G_{2z} + G_{2s}.$$

Sarcinile se evaluează pentru fiecare nod (G_1, G_2 etc.). Cu sarcinile astfel evaluate se construiește poligonul funicular $A - C - B$, care se repetă de 2—3 ori pînă cînd reevaluările de sarcini nu se mai modifică ; se determină astfel forma arcului $A - C - B$.

Sub aceste sarcini permanente vom avea în barele arcului niște eforturi permanente S_g cu proiecția orizontală H_g. În felul acesta, din încărcările permanente nu avem momente încovoietoare în grinda de rigidizare.

La sistemele suspendate, aceasta se face prin reglarea lungimii barelor verticale de suspensie.

Pentru sarcini mobile care se aplică pe grinda de rigidizare se face calculul arătat în acest paragraf. Din pozițiile cele mai defavorabile ale convoiului de sarcini vor rezulta momentele încovoietoare în secțiunile grinzii de rigidizare și eforturile axiale S_p în barele arcului, cu proiecția orizontală H_p. Deci, grinda de rigidizare lucrează numai la sarcini utile. Eforturile totale în barele arcului sau în cablu vor fi suma eforturilor din încărcările permanente și sarcinile utile.

2. Nedeformabilitatea geometrică a sistemelor mixte este asigurată prin grinda de rigidizare ; fără această grindă sistemul este un mecanism cu libertăți cinematice.

Grinda de rigidizare însă lucrează numai la sarcini utile, iar liniile de influență arată că ordonatele acestora sînt mici în raport cu ordonatele unei grinzi drepte, simple, de aceeași deschidere. Deci, secțiunea grinzii de rigidizare este mult mai mică decît a unei grinzi drepte simple, de aceeași deschidere.

3. Faptul că grinda de rigidizare, care asigură nedeformabilitatea geometrică, are secțiune mică în raport cu deschiderea, face ca deformațiile elastice ale sistemului la deschideri foarte mari să fie importante. Modul cum influențează împingerea H eforturile duce la constatarea că deter-

minarea momentelor încovoietoare în grinda de rigidizare prin exprimarea condițiilor de echilibru static în starea nedeformată a sistemului (ipoteză de bază în statica liniară a sistemelor de bare) dă rezultate insuficient de exacte la deschideri foarte mari.

Astfel, în exemplul din fig. 340, momentul încovoietor în secțiunea i este:

$$M_i = M_i^0 - Hy,$$

unde y se măsoară în starea nedeformată a sistemului.

Diferența $M_i^0 - Hy$ este, în general, mică, astfel că, dacă prin încărcare sistemul s-a deformat și ordonata y a crescut cu cantitatea Δy, rezultă:

$$M_i' = M_i^0 - H(y + \Delta y) = (M_i^0 - Hy) - H \cdot \Delta y = M_i - H \cdot \Delta y.$$

Cînd M_i este mic, influența lui $H \cdot \Delta y$ poate să fie aproape de același ordin de mărime cu M_i la deschideri foarte mari.

Deci, calculul în ipoteza exprimării ecuațiilor de echilibru în stare nedeformată nu este satisfăcător în aceste cazuri.

Pentru calculul mai exact, cu exprimarea ecuațiilor de echilibru static în stare deformată, nu se mai poate aplica suprapunerea liniară a efectelor.

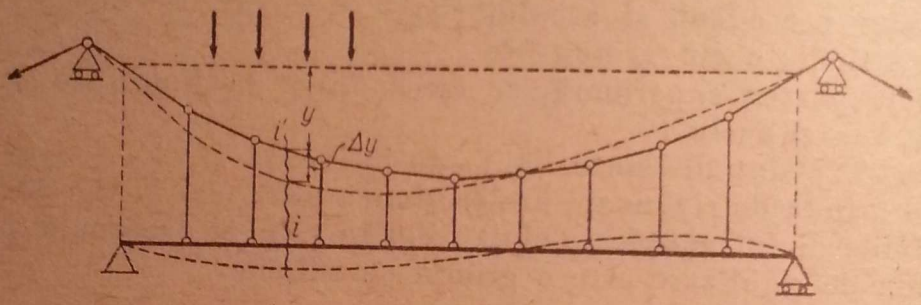


Fig. 340.

Nu ne vom ocupa aici de aceste calcule, numite uneori calculul de ordinul doi al sistemelor cu deformații mari.

Aplicația 81. Să se determine liniile de influență H, I_{1-2}, I_{6-8}, S_{7-9} și D_{6-9} ale sistemului din fig. 341.

Indicații. Săgeata arcului este $f = CC'$ și, deci, linia nașterilor este $A' - B'$ la înălțimea h deasupra reazemelor. Arcul fiind $A'C'B'$, construcția liniilor de influență se face în consecință:

$$H = \frac{M_c^0}{f},$$

$$I_{1-2} = \frac{M_3^0}{h}$$

și nu este influențată de împingerea H;

$$I_{6-8} = \frac{M_9}{h} = \frac{1}{h}(M_9^0 - H \cdot y_9).$$

Se construiește punctul L_1 în consecință.

$$S_{7-9} = -\frac{M_6}{h} = -\frac{1}{h}(M_6^0 - H \cdot y_6).$$

Se ridică y_6 deasupra liniei nașterilor $A' - B'$ și apoi se determină punctul L_2:

$$D_{6-9} = -\frac{T_{7-9}}{\sin \varphi} = -\frac{1}{\sin \varphi}(T_{7-9}^0 - H \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= -\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}(T_{7-9}^0 \cos \alpha - H \sin \alpha).$$

Se construiește punctul K în consecință.

Aplicația 82. Să se găsească expresiile eforturilor M, N, T și apoi să se construiască liniile de influență M_i, T_i într-o secțiune i a arcului cu trei articulații cu tirant poligonal din fig. 342.

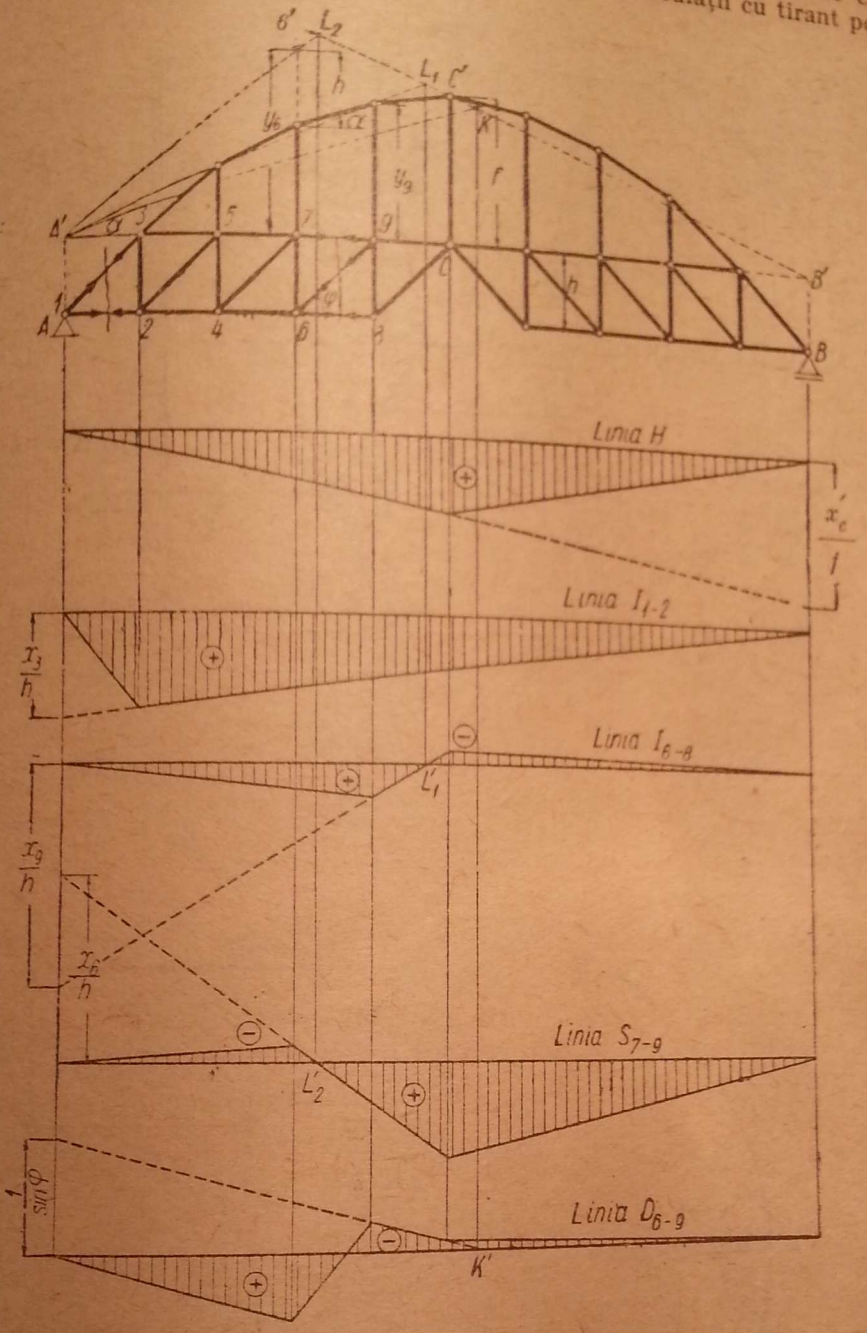


Fig. 341.

Răspuns. Dacă se cunoaște H, se cunosc toate eforturile în barele articulate S_1, S_2,... etc. și Z_1, Z_2,... (fig. 342, *a*)

$$S_2 = \frac{H}{\cos \alpha_2},$$

$$Z_2 = H (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3).$$

Secțiunea prin i (fig. 342, *b*) dă:

$$-M_i + \left[V_A \cdot x - \sum P_h (x - a_h)\right] - Hy_i = 0;$$

$$-T_i + (V_A - \sum P_h) \cos \varphi - S_2 \sin (\varphi - \alpha_2) = 0;$$

$$N_i + (V_A - \sum P_h) \sin \varphi + S_2 \cos (\varphi - \alpha_2) = 0.$$

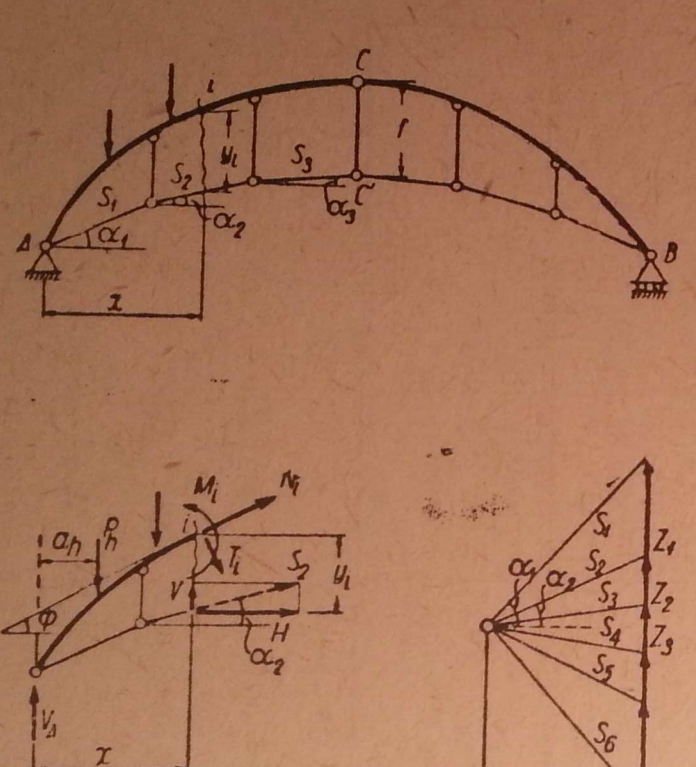


Fig. 342.

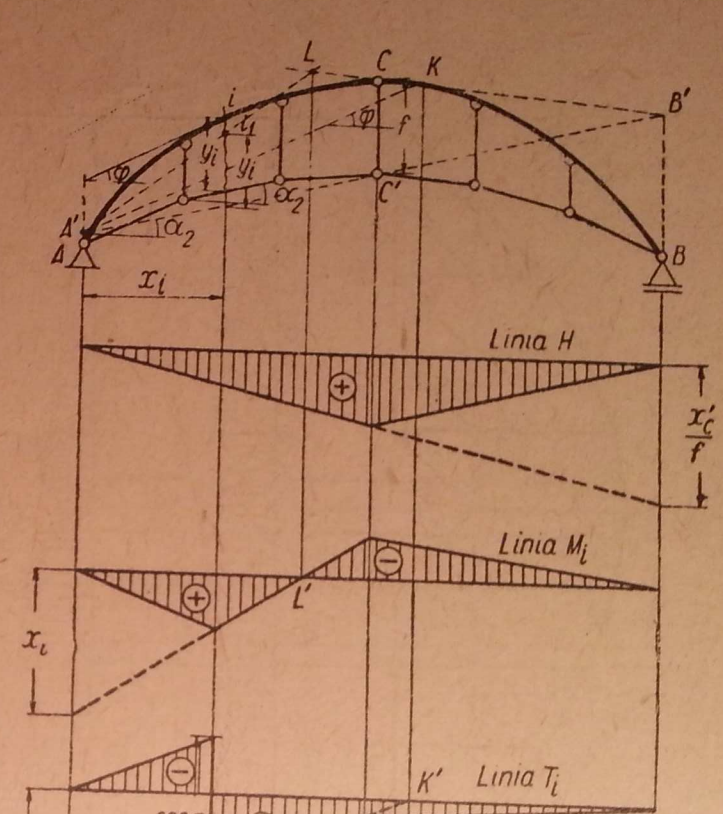


Fig. 343.

Se notează :

$$M_i^0 = V_A - \sum P_h (x - a_h),$$

$$T_i^0 = V_A - \sum P_h$$

și deci :

$$M_i = M_i^0 - H \cdot y_i ;$$

$$T_i = T_i^0 \cos \varphi - \frac{H}{\cos \alpha_2} \sin (\varphi - \alpha_2) ;$$

$$N_i = - T_i^0 \sin \varphi - \frac{H}{\cos \alpha_2} \cos (\varphi - \alpha_2).$$

H se determină din condiția $M_c = 0$:

$$H = \frac{M_c^0}{f}.$$

Deci, aceleași expresii ca la arcul fictiv cu trei articulații de aceeași deschidere l, de aceeași săgeată f, cu aceleași ordonate y care vor trebui măsurate de la linia nașterilor și cu linia naș-terilor înclinată cu α_2 față de orizontală. În secțiunea i arcul fictiv trebuie să aibă aceeași tangentă φ ca arcul real.

În fig. 343 sînt desenate liniile H, M_i, T_i. Pentru a găsi arcul fictiv echivalent se duce prin C' o dreaptă înclinată cu α_2 față de orizontală. Punctele A' și B' sînt nașterile arcului fictiv de deschidere l și săgeată f. În dreptul lui i se raportează y_i de la linia $A'B'$ și se obține i_1. Punctul L se găsește la intersecția dreptelor $A'i_1$ și $B'C$. Astfel, linia M_i se poate construi. Pentru linia T_i se duce din A' paralela la tangenta în i și la intersecția cu $B'C$ se găsește K.

§ 38. SISTEME SUSPENDATE FĂRĂ GRINDĂ DE RIGIDIZARE

În aceste sisteme nedeformabilitatea geometrică este asigurată prin sistemul de bare articulate, așa încît nu mai este nevoie de grindă de rigidizare. Caracteristica acestor sisteme este că toate barele lucrează numai la întindere, astfel încît se pot face din cabluri de oțel superior, putîndu-se realiza deschideri mari pentru poduri, cu cantități reduse de material.

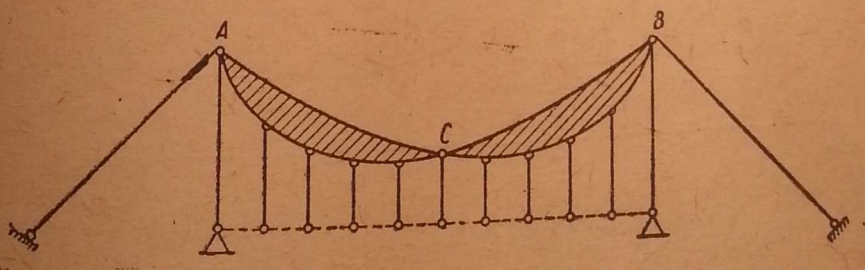


Fig. 344.

Din punctul de vedere al schemei generale, acestea sînt niște arce cu trei articulații $A - B - C$ (fig. 344) răsturnate. Punctele A și B sînt fixate de teren, iar sistemele $A - C$ și $B - C$, nedeformabile din punct de vedere geometric, sînt articulate între ele în C. Deci sînt asemănătoare arcelor cu zăbrele cu trei articulații.

Particularitatea constă în faptul că, sub combinații de sarcini permanente și mobile, eforturile din toate barele rămîn întinderi, așa că nedeformabilitatea geometrică este asigurată cînd barele sînt înlocuite cu cabluri.

Dacă linia de influență a unei asemenea bare schimbă semnul în interiorul deschiderii și se notează suprafața liniei de influență pozitivă cu $\Omega_{(+)}$, iar a celei negative, cu $\Omega_{(-)}$, și se consideră sarcinile uniform repartizate g (greutatea permanentă) și p (încărcarea mobilă), condiția pentru fiecare bară este :

$$g\,[\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)}] - p \cdot \Omega_{(-)} > 0,$$

de unde rezultă condiția :

$$k = \frac{g}{p}\left(\frac{\Omega_{(+)}}{\Omega_{(-)}} - 1\right) > 1.$$

Deci, în studiul unui asemenea sistem trebuie să se cunoască raportul g/p, odată cu sistemul care se alege.

La aceste construcții calea este suspendată de nodurile sistemului și nu contribuie cu nimic în schema statică.

Mai jos se indică două tipuri de astfel de sisteme suspendate pentru poduri.

a) Sistem cu triunghiuri suspendate unul de altul

Acest sistem este reprezentat în fig. 345 ; punctele A și B sînt fixe, iar cele două părți geometric nedeformabile AC și BC sînt articulate între ele în C.

Partea AC este compusă din triunghiul $1-2-3$. De latura $1-3$ a acestuia se suspendă alt triunghi $1-3-4$, apoi, pe latura $1-4$ se suspendă

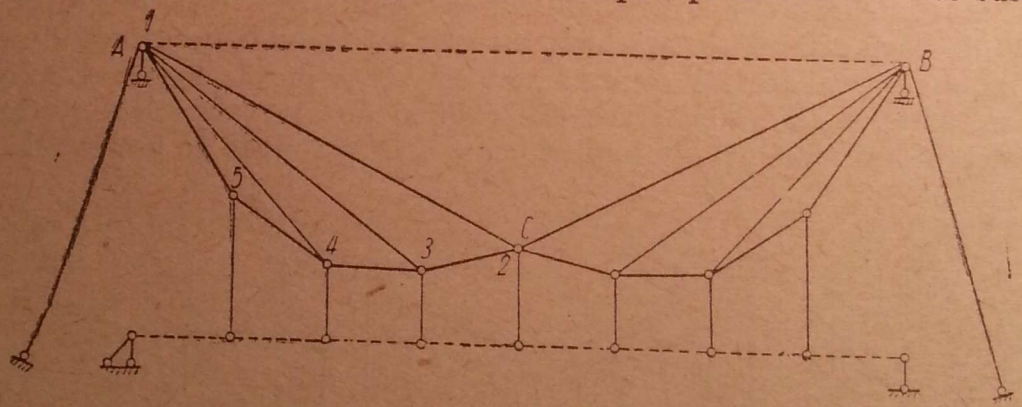


Fig. 345.

triunghiul $1-4-5$, astfel încît punctele 5, 4, 3, 2 formează nodurile tălpii inferioare poligonale $1-5-4-3-2$, în timp ce talpa superioară $1-2$ este dreaptă.

De nodurile tălpii inferioare este suspendată calea (figurată punctat).

Eforturile se pot afla simplu prin separarea nodurilor, pe cale analitică, sau grafică. Se pornește din nodul 5, apoi se trece la nodurile 4, 3 și 2.

Semnul eforturilor se deduce ușor. În triunghiul $1-2-3$ din sarcinile pe intervalul $A-C$, bara $1-2$ este comprimată, iar barele $1-3$ și $3-2$ sînt

întinse. Din triunghiul $1-4-3$, bara $1-3$ de această dată este comprimată, dar acest triunghi are deschidere mai mică decît $1-2-3$ și, deci, compresiunea din $1-3$ va fi mai mică decît întinderea din $1-3$ a triunghiului $1-2-3$, și așa mai departe. Rezultă că tălpile $1-5$, $5-4$, $4-3$, $3-2$ sînt întinse pentru orice sarcini, iar diagonalele $1-3$, $1-4$ sînt și întinse și comprimate, dar au valoarea întinderii mai mare decît a compresiunii. Bara $1-2$ este întinsă de sarcinile de pe porțiunea $C-B$.

Liniile de influență în barele acestui sistem se determină cu elementele cunoscute de la grinzile cu zăbrele.

Linia S_{1-2}. Este foarte ușor de determinat prin deplasări virtuale (fig. 346). Se suprimă bara $1-2$, și corpurile care se formează sînt I, II, III.

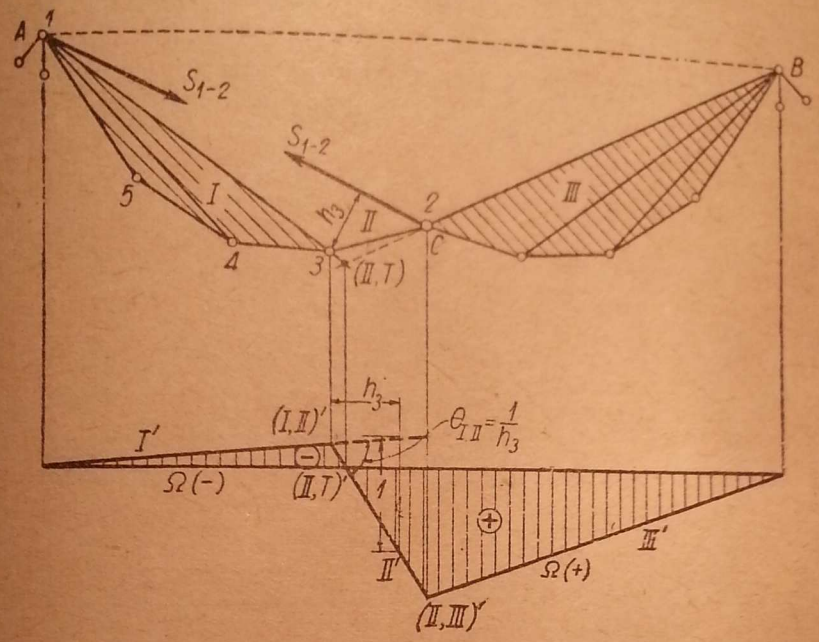


Fig 346.

Centrele de rotație sînt evidente, și centrul $(II,\ T)$ se găsește la intersecția barei $B-C$ cu bara $1-3$.

Depărtînd nodurile 1 și 2, partea $C-B$ coboară; linia de influență este reprezentată în fig. 346.

Scara se determină prin $\theta_{I,II}=\frac{1}{h_3}$, unde h_3 este perpendiculara din nodul 3 pe bara $1-2$.

Linia S_{1-2} are regiune pozitivă și negativă. Pentru ca $\Omega_{(-)}$ să fie cît mai mic în raport cu $\Omega\ (+)$, ca să fie satisfacută relația

$$k=\frac{g}{p}\left(\frac{\Omega_{(+)}}{\Omega_{(-)}}-1\right)>1,$$

trebuie ca intersecția barelor $C-B$ și $1-3$ să fie cît mai aproape de nodul 3.

Linia D_{1-3}. Se construiește, de asemenea, prin deplasări virtuale (fig. 347). Suprimînd bara $1-3$, sistemul format din bara $A-C$ și corpul $C-B$ rămîne pe loc, deci punctul C este fix.

Partea $C - B$ rămînînd fixă, linia de influență va avea valoarea zero pe această porțiune de grindă. Se mai observă că aceasta este valabil pentru toate barele dintre A și C, cu excepția barei AC $(1-2)$ care a fost studiată.

Revenind la bara $1-3$, rezultă că centrul (II, T) se găsește la intersecția barelor $1-4$ și $3-2$. Cînd se depărtează nodurile 1 și 3, nodul 3 se lasă în jos, și linia de influență se prezintă ca în figură. Scara este determinată de unghiul $\theta_{I,II} = \frac{1}{h_4}$. Se vede preponderența lui $\Omega_{(+)}$ față de $\Omega_{(-)}$.

Linia D_{1-4}. Este desenată în aceeași figură; corpurile nu au mai fost reprezentate separat. Partea de la dreapta nodului 3 rămîne fixă.

Liniile de influență ale eforturilor din talpa inferioară. *Linia* I_{3-2}. Este determinată tot prin deplasări virtuale, așa cum se vede în fig. 348. Supri-

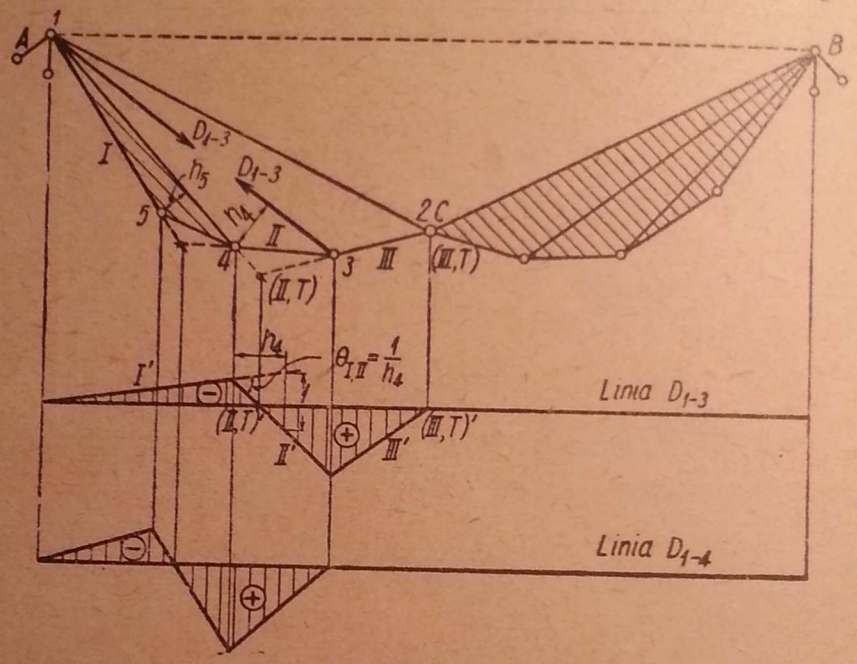


Fig. 347.

mînd bara $3-2$, punctul C rămîne pe loc, iar corpul I se rotește în jurul lui A. Depărtînd nodul 3 de nodul fix 2, corpul I se lasă în jos. Scara este determinată de $\theta_I = \frac{1}{d_1}$.

La fel se obțin liniile I_{4-3} și I_{5-4}.

În concluzie, rezultă că afară de barele AC și BC, care lucrează pentru pozițiile sarcinilor pe toată deschiderea AB, celelalte bare lucrează numai pentru sarcinile de pe jumătatea lor de deschidere, astfel că schema de lucru pentru sarcinile din partea din stînga este ca în fig. 349. Analog, pentru sarcinile de pe partea din dreapta.

b) Sistemul cu mai multe tălpi

Acest sistem a fost propus de profesorul sovietic I. M. Rabinovici, care a elaborat și metodele de calcul corespunzătoare [1]).

[1]) În culegerea 30 a „Institutului de cercetări tehnice NKPS", fasc. 112.

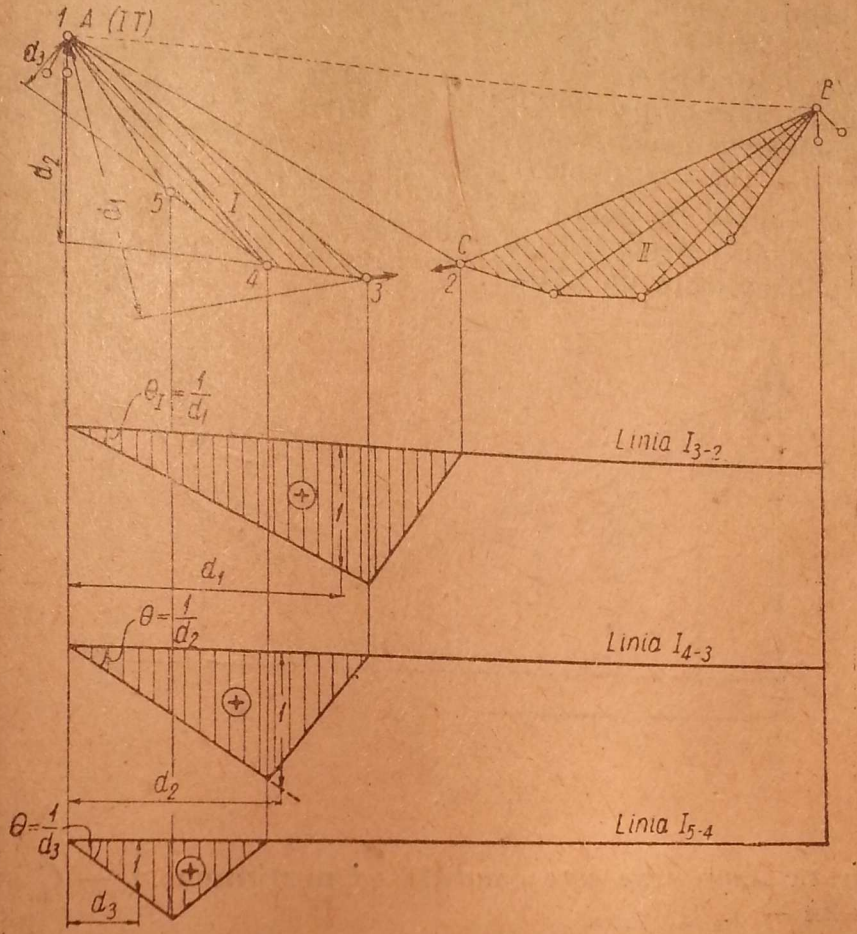


Fig. 348.

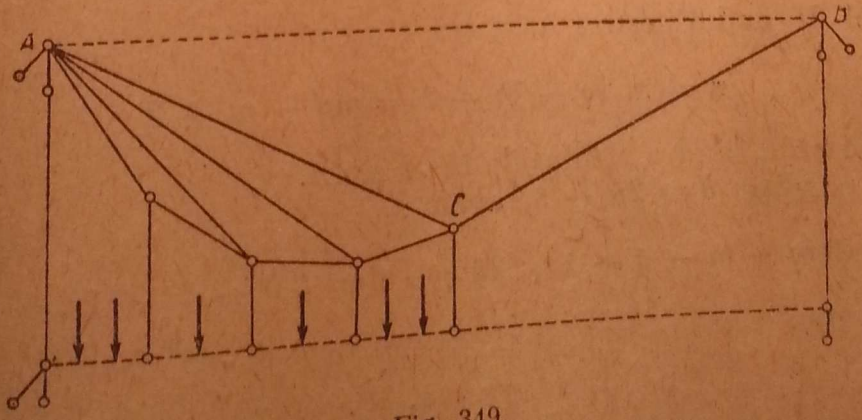


Fig. 349.

În acest sistem (fig. 350) fiecare dintre părțile $A-C$ și $C-B$ sînt alcătuite numai din tălpi și montanți, tălpile fiind toate legate în articulațiile din A și C, respectiv în B și C. Fiecare talpă este un poligon funicular cu laturile întinse pentru anumite sarcini.

Sistemul de bare de pe una dintre jumătăți ($A - C$) trebuie să formeze un sistem geometric nedeformabil, adică între nodurile și barele sale să existe relația $b = 2n - 3$, deoarece el lucrează ca o grindă cu zăbrele articulată în A și simplu rezemată în C prin bara BC.

El lucrează numai pentru sarcinile aplicate pe jumătatea din stînga. Pentru sarcinile aplicate pe partea din dreapta lucrează sistemul desenat punctat.

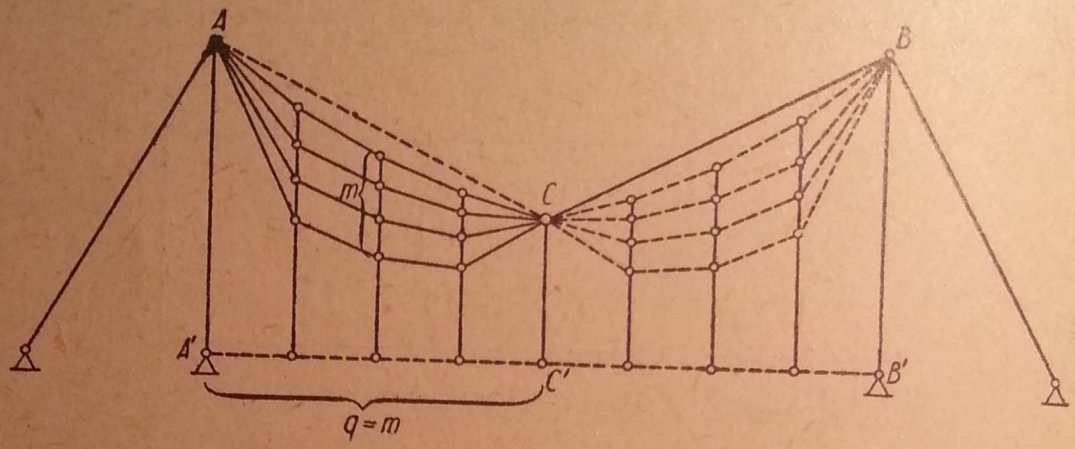


Fig. 350.

Se va arăta acum care este condiția ca porțiunea $A - C$ să satisfacă relația : $b = 2n - 3$.

Să presupunem că sistemul are q panouri și m poligoane funiculare (m tălpi). În m nu intră bara dreaptă $A—C$ care lucrează pentru porțiunea din dreapta și nici calea care este suspendată de sistem.

Numărul de bare este :

$$b = m \cdot q + (m - 1)\ (q - 1) = 2mq - m - q + 1.$$

Numărul de noduri este :

$$n = m\ (q - 1) + 2 = mq - m + 2$$

(cele 2 din formulă fiind articulațiile în A și C).

Punînd condiția $b = 2n - 3$, avem :

$$2mq - m - q + 1 = 2mq - 2m + 4 - 3,$$

de unde rezultă :

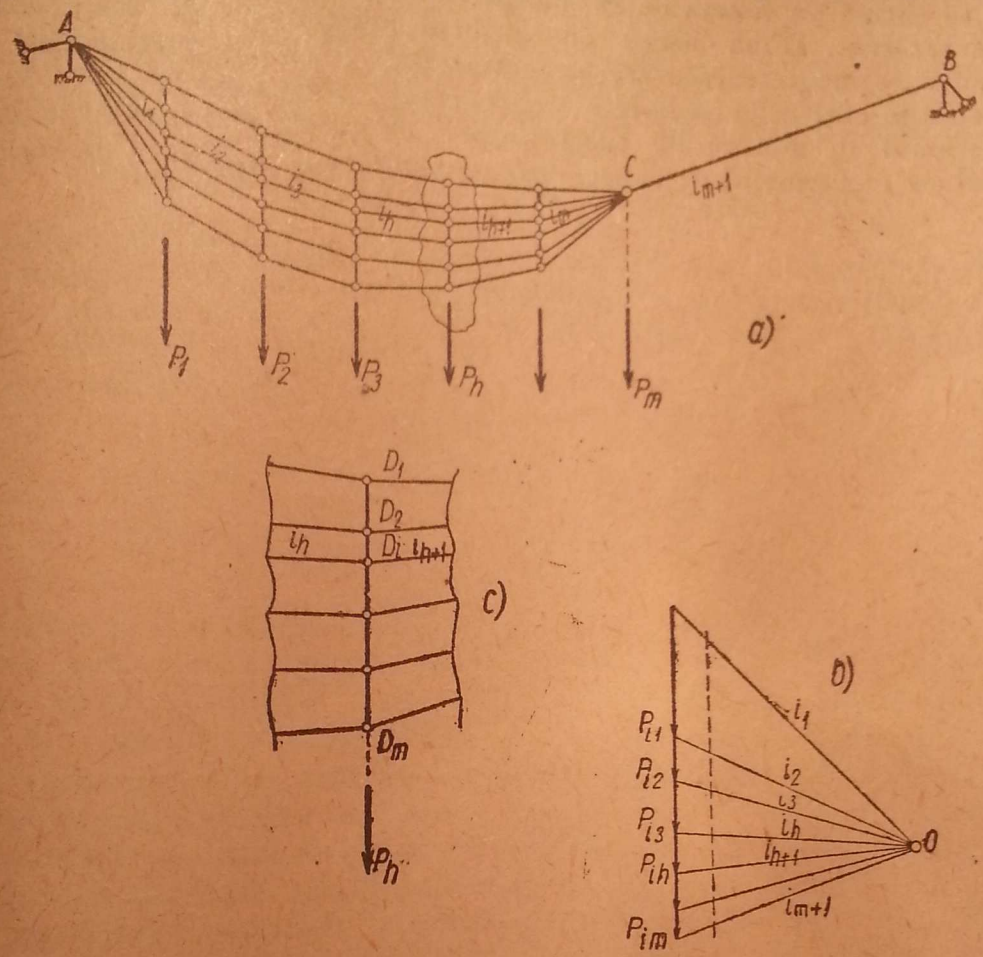
$$q = m.$$

Deci, condiția de nedeformabilitate geometrică a sistemelor suspendate, formate din poligoane funiculare independente, este ca numărul acestor poligoane (tălpi) să fie egal cu numărul laturilor fiecăruia dintre ele (numărul panourilor).

Pentru încărcările din jumătatea din stînga lucrează cele m tălpi cu

montanții respectivi din această jumătate și bara $C - B$ din dreapta (fig. 351, *a*).

Fiecare dintre tălpi este un poligon funicular pentru un sistem de sarcini aplicate în noduri. Se va considera poligonul funicular „*i*" cu laturile i_1, i_2, ... Orice sistem de sarcini verticale P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im} pentru care talpa „*i*" este poligon funicular, se obține, dacă dintr-un pol arbitrar O se duc



Fig, 351.

paralele la laturile $i_1, i_2, \ldots, i_m$ și se intersectează cu o verticală (fig. 351, *b*). Toate aceste sisteme obținute prin intersecția cu verticale la diferite distanțe polare diferă între ele numai printr-un coeficient de proporționalitate z_i, astfel încît, dacă s-au determinat printr-o distanță polară arbitrară sarcinile $P_{i1}, P_{i2}, \ldots$, sarcinile reale vor fi : $z_i P_{i1}, z_i P_{i2}, \ldots$, unde z_i urmează să fie determinat.

Pentru fiecare dintre cele m poligoane funiculare se poate găsi analog sistemul de sarcini verticale corespunzătoare și, evident, m coeficienți $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m$ arbitrari.

Dacă se izolează prin două secțiuni verticale montantul h (fig. 351, *c*) cu laturile de poligon funicular corespunzătoare, atunci în nodul D_i rezultanta laturilor i_h și i_{h+1} este $z_i P_{ih}$. La fel se vor obține rezultantele laturilor de poligon secționate în toate nodurile $D_1, D_2, \ldots, D_m$ prin forțele $z_1 P_{1h}$

$z_2 P_{2h}, \ldots, z_m P_{mh}$. Suma acestor forțe trebuie să fie forța reală care se aplică în acest montant, P_h. Deci, se obține relația :

$$z_1 P_{1h} + z_2 P_{2h} + z_3 P_{3h} + \ldots + z_i P_{ih} + \ldots + z_m P_{mh} = P_h.$$

În această relație necunoscutele sînt coeficienții $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Relații analoge se vor putea scrie în dreptul tuturor celor m montanți. Astfel se obține un sistem de m ecuații cu m necunoscute ($z_1, \ldots, z_m$) care trebuie rezolvat. După aceea cu ajutorul poligonului de forțe construit pentru fiecare poligon funicular și cu coeficienții $z_1, \ldots, z_m$ determinați se pot calcula toate eforturile în bare.

Sistemul cu mai multe tălpi propus de prof. Rabinovici constituie sistemul cel mai general de construcții suspendate fără grindă de rigidizare.

CAPITOLUL VI

GRINZI CU ZĂBRELE (SISTEME ARTICULATE) ÎN SPAȚIU

§ 39. REAZEME ȘI CONDIȚII DE REZEMARE

Forțele și cuplele care acționează asupra unui corp solid, geometric nedeformabil, sînt în echilibru cînd torsorul lor în raport cu un punct arbitrar este nul; aceasta înseamnă că atît vectorul forță rezultant, cît și vectorul moment rezultant în raport cu acel punct sînt nuli (fig. 352):

$$\overline{R} = 0,$$

$$\overline{M} = 0.$$

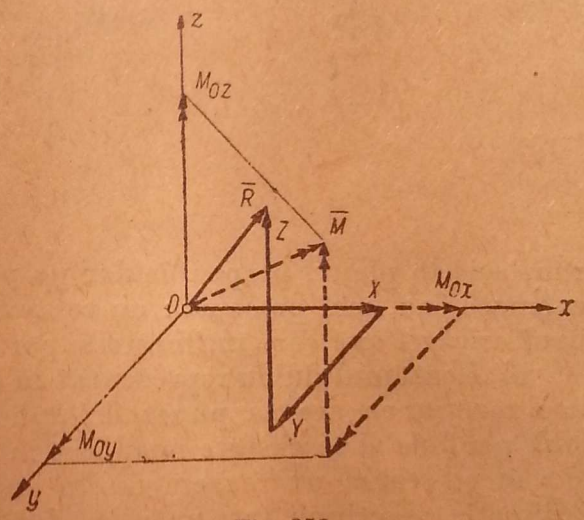


Fig. 352.

Fiecare dintre ecuațiile de mai sus este echivalentă cu cîte trei condiții analitice simple care se deduc din proiecțiile vectorului $\overline{R}$ și a vectorului $\overline{M}$ pe trei axe de coordonate, astfel încît în mod obișnuit condițiile analitice de echilibru în spațiu se exprimă sub forma: suma proiecțiilor tuturor forțelor pe trei axe concurente necoplanare și suma momentelor tuturor forțelor în raport cu aceleași axe să fie nule:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0;$$
$$\sum M_{0x} = 0; \quad \sum M_{0y} = 0; \quad \sum M_{0z} = 0. \tag{6.1}$$

Sînt șase condiții simple de echilibru, deci pentru a fixa un corp în spațiu va fi nevoie de șase legături simple, fiecare legătură avînd o singură necunoscută algebrică.

Suprimînd legăturile corpului și introducînd reacțiunile (forțele de legătură), ecuațiile (6.1) vor servi pentru determinarea celor șase reacțiuni din reazeme.

Ca și la sistemele de forțe în plan, ecuațiile (6.1) se pot transforma, în sensul că se poate înlocui oricînd una, două sau chiar trei ecuații de proiecții prin tot atîtea ecuații de momente în raport cu alte drepte decît *Ox*, *Oy*, *Oz*, avînd grijă ca toate ecuațiile de momente folosite să fie independente între ele, adică nici una să nu se deducă dintr-o combinație liniară a celorlalte.

Sistemele de rezemare în spațiu pot fi variate, dar la grinzile cu zăbrele, în care fiecare bară se consideră articulată la capetele sale, interesează numai rezemările în care reacțiunea respectivă are ca punct de aplicație chiar punctul teoretic de rezemare. Astfel de reazeme în spațiu pot fi :

a) **Reazemul simplu** reprezentat în elevație și în plan ca în fig. 353, *a*. Reacțiunea are punctul de aplicație și direcția cunoscute, acționînd după direcția pendulului. Din punct de vedere static, un reazem simplu comportă o singură necunoscută : mărimea reacțiunii. Un reazem simplu este echivalent cu o legătură simplă.

Din punct de vedere cinematic, reazemul simplu permite rotația corpului în raport cu orice axă care trece prin punctul de rezemare și orice

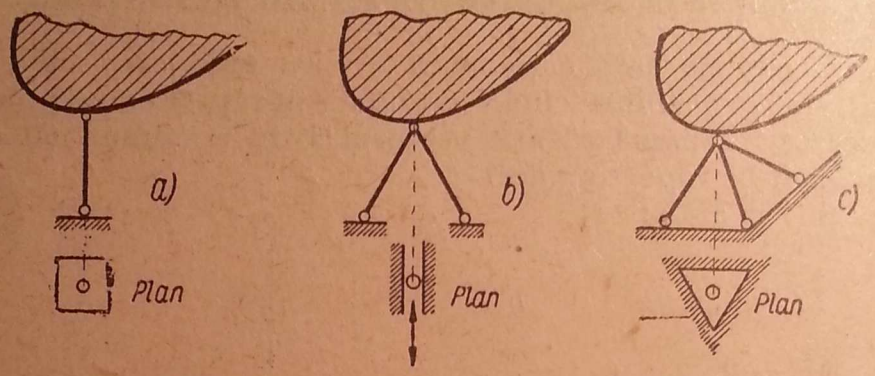


Fig. 353.

translație în planul perpendicular pe pendulul dus prin punctul teoretic de rezemare sau, mai pe scurt : un reazem simplu în spațiu permite rotația în jurul oricărei axe care întîlnește suportul pendulului de rezemare.

b) **Reazemul dublu** reprezentat în elevație și în plan ca în fig. 353, *b*, în care reacțiunea are ca punct de aplicație punctul de intersecție al celor două pendule și se găsește neapărat în planul determinat de ele. Din punct de vedere static, un reazem dublu comportă două necunoscute : mărimea și direcția reacțiunii într-un plan determinat, sau componentele reacțiunii după două direcții arbitrar alese în planul celor două pendule.

Reazemul dublu este deci o articulație plană (în planul celor două pendule) și este echivalent cu două legături simple.

Din punct de vedere cinematic, un reazem dublu permite rotația corpului în raport cu orice axă care trece prin punctul de rezemare, cum și o translație după normala la planul celor două pendule, dusă în punctul teoretic de rezemare sau, ceea ce este același lucru, corpul se poate roti în jurul oricărei axe care întîlnește ambele pendule. Este ușor de recunoscut că această axă poate fi orice axă din spațiu care trece prin intersecția celor două pendule, precum și orice axă care se găsește în planul celor două pendule.

c) **Reazemul triplu** sau articulația completă în spațiu, numită și articulație sferică, reprezentată în plan și în elevație ca în fig. 353, *c*, în care reacțiunea are ca punct de aplicație punctul de intersecție al celor trei pendule care nu se găsesc în același plan. Din punct de vedere static, un reazem triplu comportă trei necunoscute : mărimea reacțiunii și direcția ei în spațiu determinată prin doi parametri. În general, însă, ca necunoscute se aleg proiecțiile reacțiunii pe trei direcții arbitrare care nu se găsesc în

Sistemele de rezemare în spațiu pot fi variate, dar la grinzile cu zăbrele, în care fiecare bară se consideră articulată la capetele sale, interesează numai rezemările în care reacțiunea respectivă are ca punct de aplicație chiar punctul teoretic de rezemare. Astfel de reazeme în spațiu pot fi :

a) **Reazemul simplu** reprezentat în elevație și în plan ca în fig. 353, *a*. Reacțiunea are punctul de aplicație și direcția cunoscute, acționînd după direcția pendulului. Din punct de vedere static, un reazem simplu comportă o singură necunoscută : mărimea reacțiunii. Un reazem simplu este echivalent cu o legătură simplă.

Din punct de vedere cinematic, reazemul simplu permite rotația corpului în raport cu orice axă care trece prin punctul de rezemare și orice

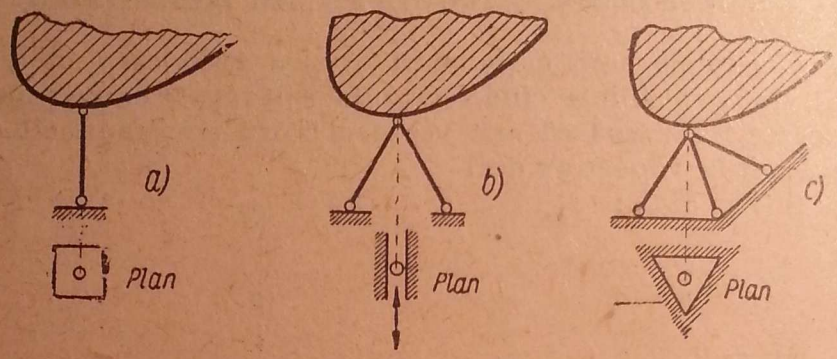


Fig. 353.

translație în planul perpendicular pe pendulul dus prin punctul teoretic de rezemare sau, mai pe scurt : un reazem simplu în spațiu permite rotația în jurul oricărei axe care întîlnește suportul pendulului de rezemare.

b) **Reazemul dublu** reprezentat în elevație și în plan ca în fig. 353, *b*, în care reacțiunea are ca punct de aplicație punctul de intersecție al celor două pendule și se găsește neapărat în planul determinat de ele. Din punct de vedere static, un reazem dublu comportă două necunoscute : mărimea și direcția reacțiunii într-un plan determinat, sau componentele reacțiunii după două direcții arbitrar alese în planul celor două pendule.

Reazemul dublu este deci o articulație plană (în planul celor două pendule) și este echivalent cu două legături simple.

Din punct de vedere cinematic, un reazem dublu permite rotația corpului în raport cu orice axă care trece prin punctul de rezemare, cum și o translație după normala la planul celor două pendule, dusă în punctul teoretic de rezemare sau, ceea ce este același lucru, corpul se poate roti în jurul oricărei axe care întîlnește ambele pendule. Este ușor de recunoscut că această axă poate fi orice axă din spațiu care trece prin intersecția celor două pendule, precum și orice axă care se găsește în planul celor două pendule.

c) **Reazemul triplu** sau articulația completă în spațiu, numită și articulație sferică, reprezentată în plan și în elevație ca în fig. 353, *c*, în care reacțiunea are ca punct de aplicație punctul de intersecție al celor trei pendule care nu se găsesc în același plan. Din punct de vedere static, un reazem triplu comportă trei necunoscute : mărimea reacțiunii și direcția ei în spațiu determinată prin doi parametri. În general, însă, ca necunoscute se aleg proiecțiile reacțiunii pe trei direcții arbitrare care nu se găsesc în

același plan. Deci, un reazem triplu este echivalent cu trei legături simple.

Din punct de vedere cinematic, o articulație sferică în spațiu (reazem triplu) permite rotația corpului în jurul oricărei axe din spațiu care întîlnește toate cele trei pendule, adică în jurul oricărei axe care trece prin punctul teoretic de articulație.

Cu aceste tipuri de rezemări, un corp geometric nedeformabil se fixează față de teren prin șase legături simple. Cel mai simplu sistem pentru cele șase legături se poate asigura printr-un reazem triplu, un reazem dublu și un reazem simplu, ca în fig. 354.

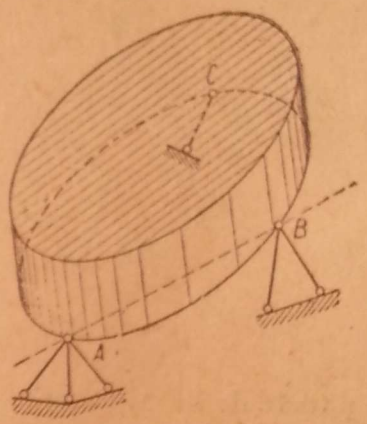


Fig. 354.

Un punct A al corpului se fixează față de teren prin trei bare care nu sînt în același plan, adică printr-un reazem triplu. Numai cu această legătură corpul se poate roti în jurul punctului A, astfel încît orice alt punct al corpului este liber să se deplaseze pe suprafața unei sfere cu centrul în A și avînd ca rază distanța de la A la punctul considerat. Un al doilea punct B al corpului va fi fixat dacă este împiedicat să se deplaseze în planul tangent la sfera cu centrul în A și raza AB. Aceasta se realizează prin două bare în B, astfel dispuse, încît planul lor să nu treacă prin A. În felul acesta, libertatea de mișcare a corpului se limitează la o rotație în jurul dreptei AB, iar un punct oarecare al corpului se poate deplasa numai pe un arc de cerc al cărui plan este normal pe axa AB și al cărui centru se găsește pe această axă. Pentru a fixa complet corpul este necesar ca un al treilea punct C, care nu se găsește pe axa AB, să fie legat de teren printr-o bară al cărei suport nu întîlnește dreapta AB.

Au fost necesare șase bare pentru a fixa poziția corpului obținute printr-un reazem triplu, un reazem dublu și un reazem simplu. Cele șase ecuații de echilibru vor determina reacțiunile din cele șase legături simple : trei reacțiuni în A după trei direcții care să nu fie în același plan, două reacțiuni în B după două direcții din planul celor două pendule și o reacțiune după direcția pendulului din C.

Nu este obligatoriu însă ca cele șase legături simple să fie grupate ca în exemplul din fig. 354 numai în trei puncte ale corpului. Ele pot fi dispuse și altfel ; trebuie reținută însă condiția necesară ca fixarea corpului de teren să se facă prin șase bare.

Această condiție este necesară, dar nu suficientă. Chiar în cazul fig. 354 s-a observat că au fost impuse anumite condiții suplimentare : planul celor două pendule din B să nu treacă prin A, și direcția pendulului din C să nu întîlnească dreapta AB. Asemenea condiții suplimentare au fost întîlnite și la sistemele plane cînd trebuia ca cele trei reazeme simple să nu fie concurente, sau ca direcția reazemului simplu să nu treacă prin articulație. În spațiu, condițiile suplimentare pe care trebuie să le îndeplinească cele șase bare pentru a fixa corect un corp rigid sînt mai greu de recunoscut sub formă geometrică. Cazurile în care cele șase bare nu asigură o imobilizare perfectă a unui corp rigid față de teren se numesc cazuri critice.

Acestea se pot identifica, în general, pe cale statică, cu ajutorul ecuațiilor de momente și de proiecții, sau pe cale cinematică, prin analiza posibilităților de mișcare în baza legăturilor. Se va folosi aici calea statică. Nu trebuie să existe nici o dreaptă în raport cu care momentele tuturor celor șase forțe de legătură să fie nule, deoarece în acest caz, momentul forțelor date în raport cu această dreaptă, care, în general, nu este nul, nu poate fi echilibrat. Din punct de vedere cinematic, aceasta înseamnă că solidul se poate roti în jurul acestei drepte. O altă condiție pentru a evita sistemele critice este următoarea : nu trebuie să existe nici o dreaptă astfel ca proiecțiile pe ea ale tuturor celor șase forțe de legătură să fie nule, deoarece proiecția pe aceeași dreaptă a forțelor date nu poate fi echilibrată. Din punct de vedere cinematic, aceasta înseamnă că solidul poate suporta o translație după această direcție.

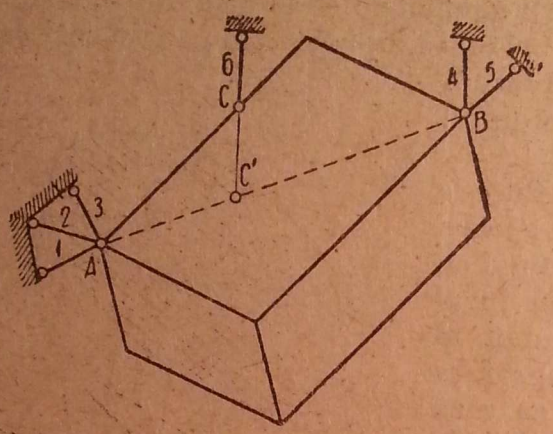


Fig. 355.

De asemenea, nu trebuie ca un număr de bare din cele șase să constituie o formă critică plană, de exemplu nu trebuie ca trei bare să fie concurente și în același plan, sau paralele și în același plan.

Situații mai importante de reținut în care cele șase legături formează cazuri critice sînt :

1. Toate cele șase direcții întîlnesc aceeași dreaptă. În acest caz, momentele tuturor reacțiunilor în raport cu acea dreaptă sînt nule. Corpul se poate

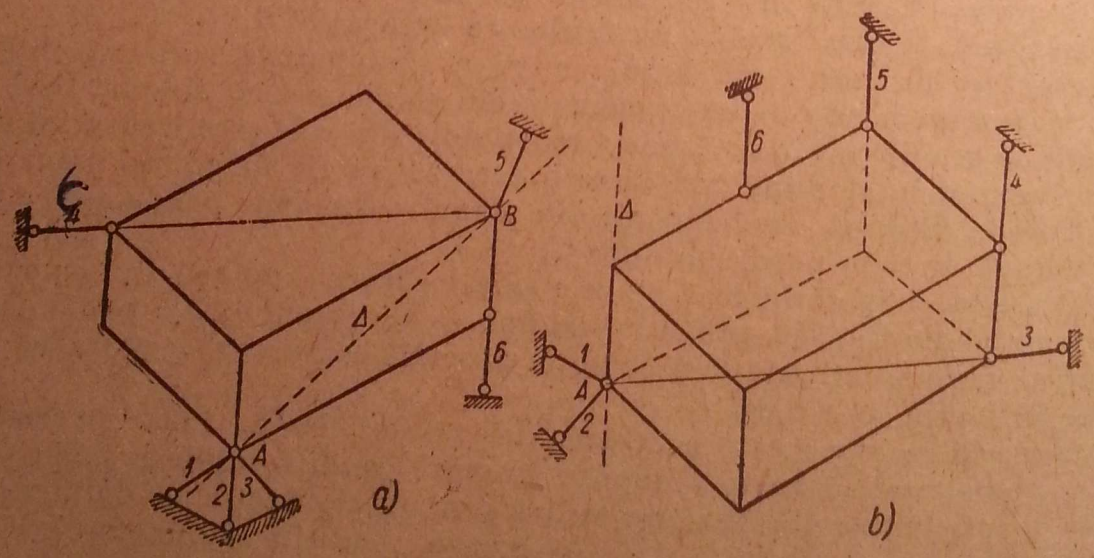


Fig. 356.

roti în jurul acelei drepte. În fig. 355 este reprezentat un corp legat cu trei bare în punctul A, cu două bare în B și cu o bară în punctul C. Direcția barei din C întîlnește dreapta AB în C'. Dacă se iau momentele în raport

cu dreapta AB, momentul forțelor date, în raport cu această dreaptă, nu poate fi echilibrat.

2. Trei direcții (*1*, *2*, *3*) sînt concurente, iar celelalte trei direcții (*4*, *5*, *6*) sînt, de asemenea, concurente sau paralele (fig. 356). În fig. 356, *a*, A este punctul de concurență al direcțiilor *1*, *2*, *3*, iar B este punctul de concurență al celorlalte trei direcții (*4*, *5*, *6*). Dreapta AB întîlnește toate cele șase direcții și deci momentele tuturor forțelor de legătură după cele șase direcții în raport cu dreapta AB sînt nule. Aceasta înseamnă că există posibilitatea de rotație a corpului față de dreapta AB. În fig. 356, *b*, direcțiile

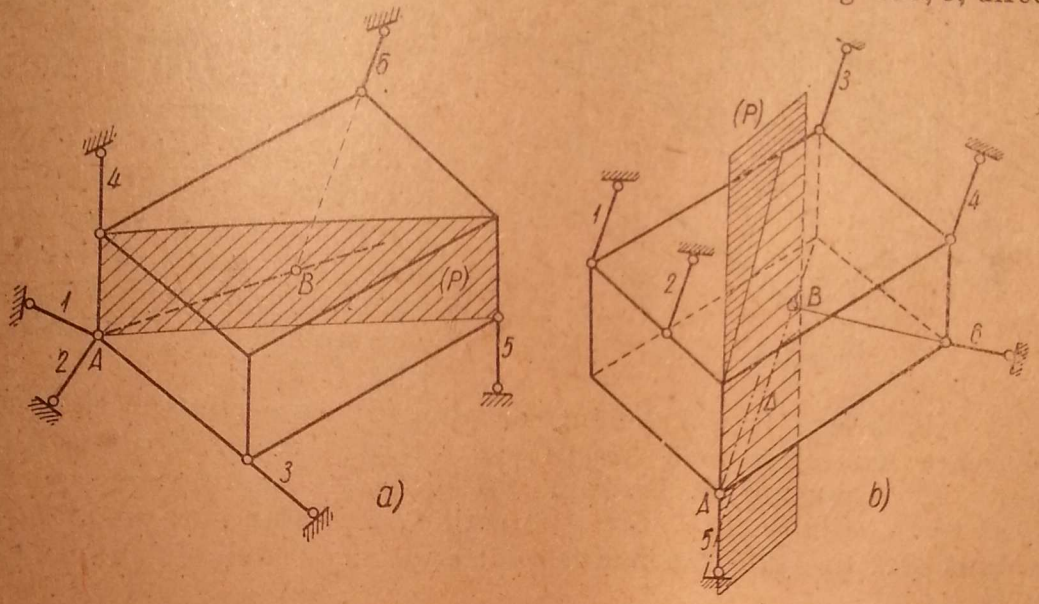


Fig. 357.

1, *2*, *3* sînt concurente în A, iar direcțiile *4*, *5*, *6* sînt paralele între ele. Deci, momentele tuturor celor șase forțe de legătură în raport cu dreapta Δ care trece prin A și este paralelă cu direcția comună a barelor *4*, *5*, *6* sînt nule. Corpul are posibilitatea unei rotații foarte mici față de axa Δ.

3. Patru sau mai multe direcții sînt concurente sau paralele (fig. 357). Astfel, dacă dreptele *1*, *2*, *3*, *4* (fig. 357, *a*) sînt concurente în A, prin acest punct și prin dreapta *5* se poate duce un plan (P) care este înțepat de dreapta *6* în punctul B. Momentele tuturor celor șase forțe de legătură în raport cu dreapta AB sînt nule. Corpul se poate roti în jurul dreptei AB. În fig. 357, *b* dreptele *1*, *2*, *3*, *4* sînt paralele. Printr-un punct A al dreptei *5* se duce paralela la *1*, *2*, *3*, *4*. Această paralelă împreună cu dreapta *5* determină un plan (P) paralel cu dreptele *1*, *2*, *3*, *4*. Planul (P) este înțepat în B de dreapta *6*. Din B se duce dreapta Δ paralelă la dreptele *1*, *2*, *3*, *4*. Dreapta Δ este, evident, cuprinsă în planul (P). Deci, dreapta Δ este paralelă cu *1*, *2*, *3*, *4* și intersectată de *5* și *6*, astfel încît momentele tuturor celor șase reacțiuni în raport cu Δ sînt nule. Corpul se poate roti în jurul dreptei Δ.

4. Patru dintre direcții sînt în același plan (fig. 358). Dacă direcțiile *1*, *2*, *3*, *4* determină planul (P), acesta este înțepat în punctele A și B de direcțiile *5* și *6*. Dreapta AB întîlnește toate cele șase direcții, sau este paralelă cu unele dintre ele, astfel încît ecuația de momente în raport cu AB anulează momentele tuturor reacțiunilor. Corpul se poate roti în jurul acestei drepte.

5. Două direcții sînt într-un plan care conține și punctul de concurență al altor trei direcții (fig. 359, *a*). Direcțiile *1*, *2*, *3* sînt concurente în *A*, iar direcțiile *4* și *5* determină un plan (*P*) care conține pe *A*. Atunci, direcția *6* înțeapă planul (*P*) în punctul *B*. Dreapta *AB* care este cuprinsă în planul (*P*) întîlnește toate cele șase direcții. Acest caz se poate reduce de fapt la cazul *4* din fig. 358, deoarece două dintre reacțiunile punctului *A* se pot alege în planul (*P*).

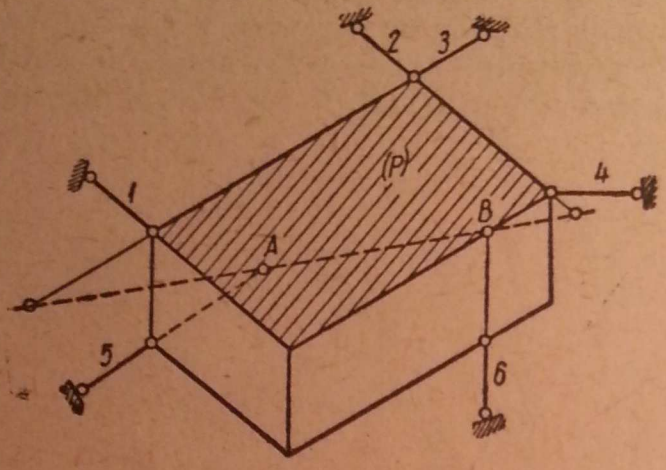


Fig. 358.

Același lucru se întîmplă cînd două direcții *4* și *5* sînt într-un plan (*P*) paralel cu alte trei direcții *1*, *2*, *3* paralele între ele și paralele cu planul (*P*) (fig. 359, *b*). Acest caz se poate reduce la cazul a patru direcții paralele (fig. 357,*b*), deoarece în planul (*P*), în locul reacțiunilor *4* și *5*, se pot alege alte două, care să treacă prin punctul lor de concurență, dintre care una să fie paralelă cu direcțiile *1*, *2*, *3*.

6. Trei direcții *1*, *2*, *3* sînt într-un plan (*P*) care conține și punctul de concurență *A* al altor două direcții *4* și *5* (fig. 360, *a*). Direcția *6* înțeapă planul (*P*) în punctul *B*. Dreapta *AB* întîlnește toate cele șase direcții. Același lucru se întîmplă cînd trei direcții *1*, *2*, *3* sînt într-un plan (*P*), iar alte două direcții *4* și *5* sînt paralele între ele și paralele cu planul (*P*) (fig. 360, *b*).

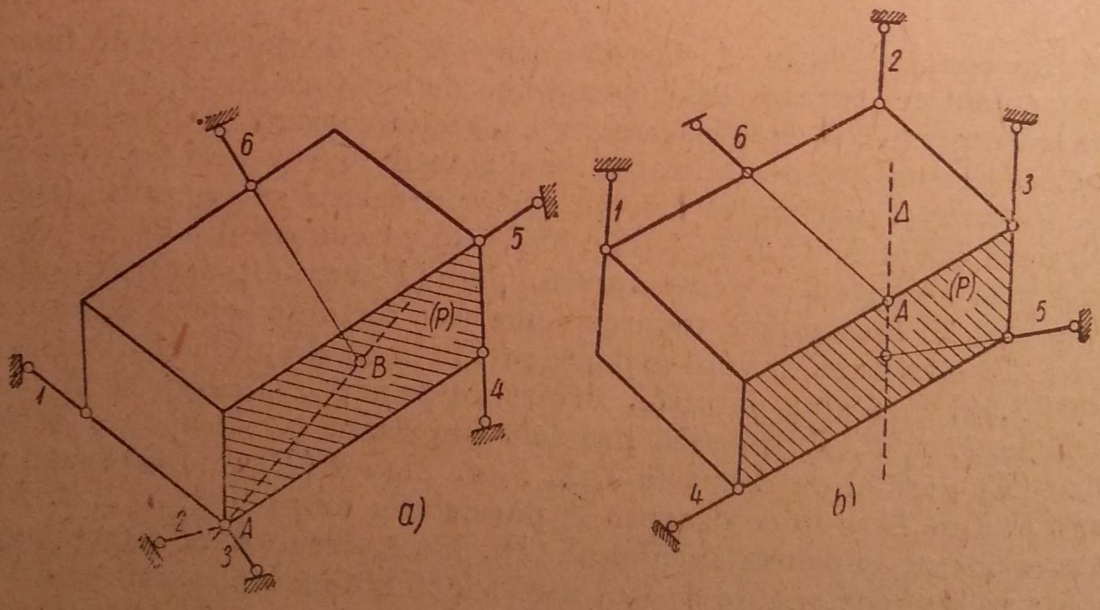


Fig. 359.

7. Cinci direcții se găsesc în două plane a căror dreaptă de intersecție Δ este paralelă cu direcția *6* sau întîlnită de ea. Ecuația de momente în raport cu dreapta Δ anulează momentele tuturor reacțiunilor.

Același lucru se întîmplă în cazul cînd toate cele șase direcții se găsesc în două plane, sau în cazul cînd patru dintre direcții se găsesc în două plane a căror dreaptă de intersecție este paralelă cu celelalte două direcții, sau întîlnită de ele.

8. Toate cele șase direcții se găsesc în plane paralele. Ecuația de proiecție pe normala comună la planele paralele nu poate fi satisfăcută în cazul general cînd forțele date au o componentă după această normală. Corpul poate avea o mișcare de translație după normala comună.

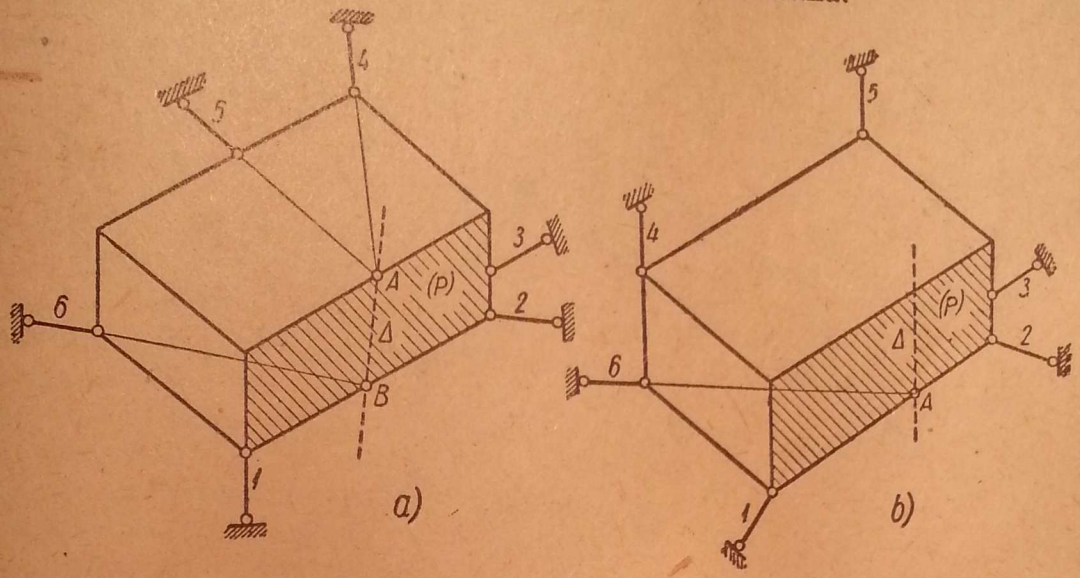


Fig. 360.

De aici rezultă că în spațiu cazurile critice de rezemare sînt mult mai numeroase decît în plan și, de aceea, este necesară o atentă examinare a sistemelor de legături prin bare articulate, pentru a evita cazurile critice.

Dacă nu a fost observat la timp un sistem critic de rezemare, calculele analitice vor conduce la o valoare nulă a determinantului principal din sistemul de ecuații ce ar fi trebuit să determine reacțiunile.

În cazul cînd cele șase bare de legătură sînt dispuse corect, cele șase reacțiuni se pot determina cu sistemul de ecuații (6.1).

În general, este dificil de rezolvat un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute și, de aceea, este indicat să se folosească particularitățile problemei, pentru a obține ecuații cu mai puține necunoscute.

Ecuațiile de proiecție se pot înlocui cu ecuații independente de momente în raport cu drepte diferite. Se poate arăta astfel că, în cazul cel mai general, sistemul de șase ecuații cu șase necunoscute se descompune în sisteme de cîte numai două ecuații cu cîte două necunoscute.

În adevăr, dacă avem șase direcții oarecare în spațiu, se pot găsi totdeauna două drepte Δ_1 și Δ_2 care să întîlnească patru dintre ele (de exemplu, direcțiile *1*, *2*, *3*, *4*). Dacă se iau ecuațiile de momente în raport cu Δ_1 și Δ_2, vor rămîne două ecuații în care necunoscutele sînt numai reacțiunile după direcțiile *5* și *6*, astfel că se pot obține R_5 și R_6 prin rezolvarea unui sistem de două ecuații.

Aceasta rezultă din faptul că pe trei drepte neconcurente în spațiu se poate genera totdeauna o suprafață riglată.

Această suprafață riglată este înțepată în două puncte A și B de dreapta 4. Prin punctele A și B se pot duce două drepte Δ_1 și Δ_2 aparținînd suprafeței riglate, care întîlnesc deci primele trei drepte și, în același timp, și pe a patra.

Ecuațiile de momente în raport cu Δ_1 și Δ_2 vor da relații numai între forțele date și reacțiunile după direcțiile 5 și 6.

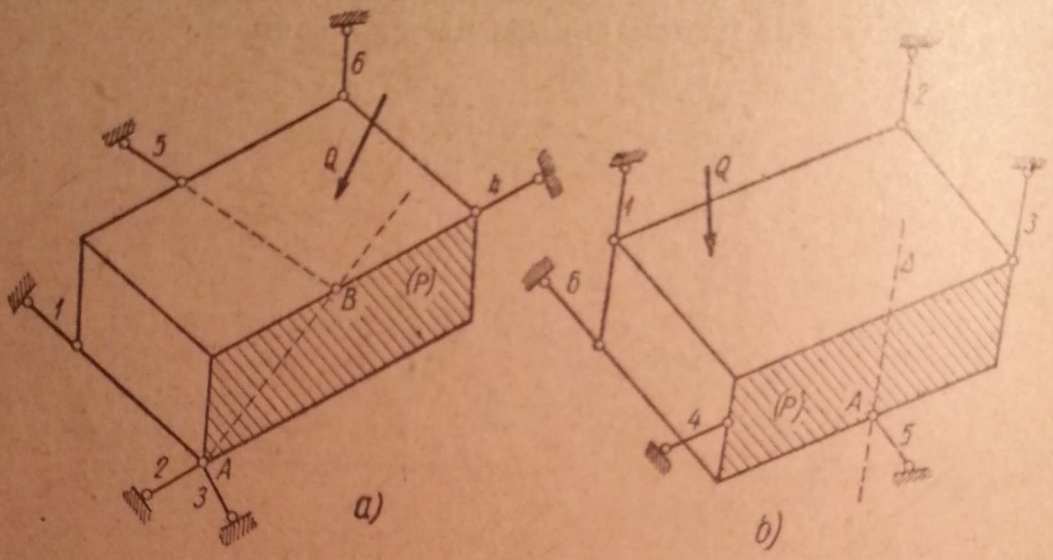


Fig. 361.

Astfel se determină R_5 și R_6.

În mod analog se pot găsi teoretic și alte grupuri de cîte două reacțiuni numai prin ecuații cu cîte două necunoscute.

În problemele cu caracter practic se pot găsi deseori posibilități de determinare a reacțiunilor din ecuații cu cîte o singură necunoscută sau două, cum se arată în cazurile de mai jos.

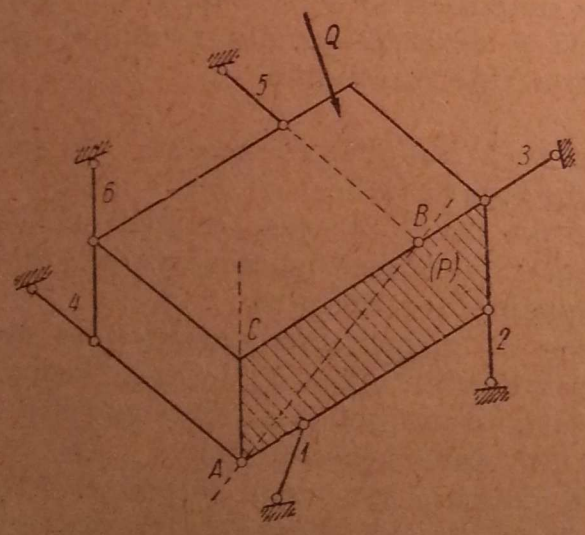


Fig. 362.

1. Cînd trei direcții sînt concurente (fig. 361, *a*). Prin punctul A de concurență al direcțiilor *1*, *2*, *3* și prin direcția *4* se duce un plan (P) care este înțepat în B de direcția *5*. Ecuația de momente în raport cu dreapta AB determină direct reacțiunea R_6 în funcție de sarcina dată Q.

Aceeași situație o avem cînd trei direcții *1*, *2*, *3* sînt paralele (fig. 361, *b*). Prin dreapta *4* se duce un plan (P) paralel cu primele trei direcții, care este înțepat în A de direcția *5*. Ecuația de momente în raport cu dreapta Δ a planului (P) ce trece prin A și este paralelă cu primele trei direcții determină direct reacțiunea după direcția *6*.

2. Cînd trei direcții *1*, *2*, *3* sînt într-un plan (P) (fig. 362). Direcțiile *4* și *5* înțeapă planul (P) în punctele A și B. Ecuația de momente față de dreapta AB determină direct reacțiunea după direcția *6*.

Dacă una dintre direcții este paralelă cu planul, cum este cazul direcției 6 din fig. 362, pentru a determina reacțiunea după direcția 5, din punctul A de intersecție al direcției 4 cu planul (P), se duce paralela AC la direcția 6 și ecuația de momente în raport cu dreapta AC determină direct reacțiunea după dreapta 5.

3. Cînd patru drepte se găsesc în două plane a căror intersecție Δ este paralelă cu a cincea dreaptă, ecuația de momente în raport cu Δ determină direct reacțiunea după dreapta a șasea. La fel se procedează cînd cinci direcții se găsesc în două plane, folosind ecuațiile de momente în raport cu dreapta Δ de intersecție a celor două plane pentru determinarea reacțiunii a șasea.

4. Cînd cinci direcții se găsesc în două sau mai multe plane paralele între ele, ecuația de proiecție pe normala comună determină reacțiunea de pe a șasea dreaptă.

În alte cazuri nu se pot găsi ecuații cu o singură necunoscută, dar putem găsi sisteme de cîte două ecuații cu cîte două necunoscute, fără să se folosească construcția suprafețelor riglate din teoria generală.

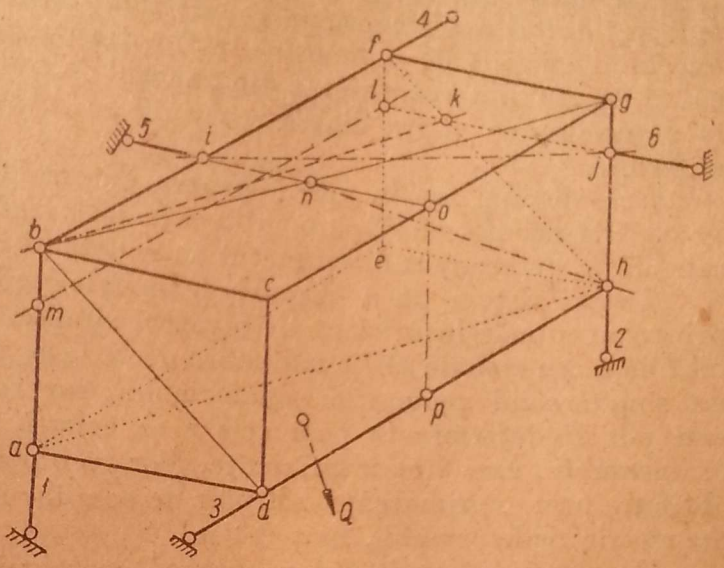


Fig. 363.

Astfel, în exemplul din fig. 363 cele șase bare sînt două cîte două paralele : 1 cu 2, 3 cu 4, și 5 cu 6. Să se determine reacțiunile după dreptele 1 și 3. Se observă că 4 și 5 se găsesc în planul *bcfg*, iar 2 și 6 — în planul *efgh*. Cele două plane se întîlnesc după dreapta *fg*. Ecuația de momente în raport cu *fg*, care întîlnește pe 2 și 4 și este paralelă cu 5 și 6, dă o relație numai între reacțiunile 1, 3 și încărcarea Q.

A doua dreaptă în raport cu care momentele reacțiunilor din 4, 5, 2 și 6 sînt nule, este dreapta *ij*, în care *i* este intersecția dreptelor 4 și 5, iar *j* — intersecția dreptelor 2 și 6. Ecuația de momente în raport cu dreapta *ij* va da a doua relație numai între reacțiunile 1, 3 și încărcarea Q. Cele două ecuații de momente în raport cu dreptele *fg* și *ij* determină astfel reacțiunile 1 și 3.

Să se determine reacțiunile după dreptele 2 și 5. Dreptele paralele 3 și 4 determină planul *bdfh* care este înțepat de dreapta 1 în *b* și de dreapta 6 în *k*. În ecuația de momente în raport cu dreapta *bk* vor intra numai reacțiunile 2, 5 și încărcarea Q. Dreptele 1 și 4 determină planul *abfe*, care este paralel cu 3 și este înțepat de 6 în *l*. Din *l* se duce dreapta *lm* paralelă cu 3. În ecuația de momente în raport cu *lm* intră numai reacțiunile 2, 5 și încărcarea Q. Deci, cele două ecuații de momente în raport cu dreptele *bk* și *lm* determină reacțiunile 2 și 5.

Pentru determinarea reacțiunilor 4 și 6 se observă că dreptele 1 și 2 determină planul *abgh*, care este înțepat de 3 în *h*, și de 5 în *n*. Ecuația de

momente în raport cu dreapta *nh* constituie o relație numai între reacțiunile de pe dreptele *4*, *6* și încărcarea *Q*. A doua ecuație se deduce observînd că dreptele *2* și *3* determină planul *cdhg*, care este paralel cu dreapta *1* și este înțepat de dreapta *5* în *o*. Deci, se va lua ecuația de momente în raport cu dreapta *op* paralelă cu dreapta *1*. Cele două ecuații de momente față de *nh* și *op* determină reacțiunile *4*, *6*.

Cele șase reacțiuni se pot determina astfel din trei grupuri de cîte două ecuații cu două necunoscute, liniar independente între ele.

De multe ori, în problemele practice și acest procedeu este dificil de aplicat, datorită elementelor geometrice care trebuie calculate pentru a exprima ecuațiile de momente; în funcție de particularitățile problemei se caută ecuații mai avantajoase din punctul de vedere al calculului, chiar dacă la determinarea unora dintre reacțiuni se folosesc alte reacțiuni calculate anterior.

Cele de mai sus se aplică pentru determinarea reacțiunilor unui corp geometric nedeformabil care, prin cele șase legături simple, corect dispuse, este static determinat din punctul de vedere al rezemării.

La un sistem de *n* corpuri geometric nedeformabile legate între ele printr-un număr insuficient de legături simple, numărul de legături simple față de teren trebuie să fie mai mare decît șase, pentru a alcătui în ansamblu un singur solid geometric nedeformabil, iar reacțiunile față de teren nu mai pot fi determinate prin cele șase ecuații de echilibru ale sistemului în ansamblu, care sînt insuficiente. Vor trebui folosite și ecuații ajutătoare obținute prin exprimarea condițiilor de echilibru al fiecărui corp component, geometric nedeformabil, luat izolat.

Un sistem alcătuit din *n* corpuri geometric nedeformabile este static determinat, cînd numărul necunoscutelor în rezemările față de teren și în legăturile dintre corpuri este $6n$, deoarece, pentru fiecare corp în parte se pot scrie cîte șase ecuații de echilibru. Dacă numărul necunoscutelor este mai mare decît $6n$, sistemul este static nedeterminat, iar dacă este mai mic, sistemul este geometric deformabil (mecanism).

Condiția aceasta este necesară, dar nu suficientă. Trebuie ca sistemul celor $6n$ legături simple să nu constituie o formă critică, adică determinantul principal al sistemului de $6n$ ecuații să fie diferit de zero.

În cazurile simple, sistemele de legături critice se pot recunoaște fără calculul determinantului, după indicațiile date la începutul acestui paragraf.

§ 40. CONDIȚII DE NEDEFORMABILITATE GEOMETRICĂ ȘI TIPURI MAI IMPORTANTE DE GRINZI CU ZĂBRELE

Ipotezele admise pentru calculul grinzilor cu zăbrele în spațiu sînt aceleași de la grinzile cu zăbrele în plan : toate barele se presupun articulate la capete în noduri teoretice, iar sarcinile sînt aplicate numai la noduri, de unde rezultă că fiecare bară va fi solicitată numai la o forță după dreapta care unește articulațiile de la capetele ei.

Dacă forțele exterioare se aplică direct pe bare, între noduri apar solicitări suplimentare cu caracter local, care nu schimbă numărul necunoscutelor și calea generală de rezolvare, la fel ca la grinzile cu zăbrele în plan (§ 21 — F).

De asemenea, folosirea barelor curbe între noduri articulate face să apară solicitări suplimentare ce se calculează ulterior, fără a influența mersul general al calculelor, la fel ca la grinzile cu zăbrele plane.

De aceea, în cele ce urmează barele articulate la capete se presupun drepte și sarcinile aplicate numai la noduri.

Cel mai simplu mod de a alcătui un sistem articulat în spațiu, geometric nedeformabil, este de a porni de la un triunghi de bare ABC (fig. 364) de care prin trei bare ce nu sînt în același plan se fixează un nod D, apoi, prin alte trei bare, un nod E și așa mai departe. În felul acesta, pentru fiecare nod nou apar trei bare. Dacă se ține seamă însă că pentru primele trei noduri A, B, C au fost necesare numai trei bare în loc de nouă, înseamnă că la n noduri vom avea $3n - 6$ bare, astfel încît relația de nedeformabilitate geometrică a unei grinzi cu zăbrele în spațiu cu n noduri și b bare este :

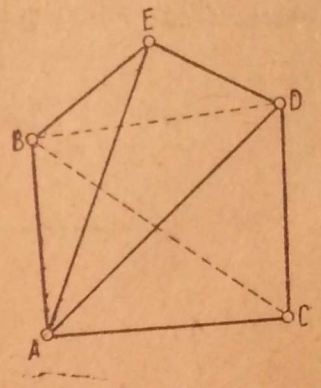


Fig. 364.

$$b = 3n - 6. \tag{6.2}$$

Condiția (6.2) este necesară, dar nu suficientă. Trebuie ca sistemul de bare să nu conducă la o formă critică. În cele ce urmează presupunem că nu sîntem în cazul formelor critice, și atunci grinda cu zăbrele care îndeplinește condiția (6.2), constituind un sistem geometric nedeformabil independent de legăturile sale cu terenul, se numește grindă liberă. Pentru a o fixa de teren vor fi necesare șase legături simple.

Numărul total de necunoscute va fi alcătuit din eforturile din bare și din cele șase reacțiuni față de teren, adică în total vor fi $b+6$ necunoscute.

În același timp, dacă se izolează fiecare nod în parte prin secționarea barelor care pleacă din el, eforturile din barele secționate și sarcina din nod alcătuiesc un sistem de forțe concurente în spațiu pentru care se pot exprima trei ecuații de echilibru. La toate cele n noduri vom avea $3n$ ecuații de echilibru. Pentru ca sistemul să fie static determinat trebuie ca numărul de necunoscute să fie egal cu numărul de ecuații :

$$b + 6 = 3n. \tag{6.2'}$$

Relația (6.2') este echivalentă cu relația (6.2), dar pusă sub această formă arată că dacă se suprimă una sau mai multe bare, pentru ca sistemul să rămînă static determinat și geometric nedeformabil, trebuie ca ele să fie înlocuite cu tot atîtea legături simple care pot fi bare sau reazeme simple. Dacă se notează cu r numărul de legături simple în reazeme, condiția (6.2') se transformă într-o condiție mai generală dată de relația :

$$b + r = 3n, \tag{6.3}$$

în care, evident, $r \geqslant 6$.

Relația (6.3) se transformă în relația (6.2) pentru $r = 6$ și în acest caz rezultă o grindă cu zăbrele liberă a cărei nedeformabilitate geometrică este independentă de legăturile din reazeme.

Dacă însă $r > 6$, sistemul articulat din bare este geometric nedeformabil numai în baza legăturilor cu terenul. În acest caz, reacțiunile din reazeme nu pot fi deduse numai din cele șase ecuații de echilibru al sistemului

în ansamblu, ci trebuie folosite și ecuații de echilibru al diferitelor părți componente, geometric nedeformabile, din care este alcătuit ansamblul.

Mai sus s-a presupus că toate sistemele care îndeplinesc condiția (6.2), sau condiția mai generală (6.3) nu sînt forme critice, adică din punct de vedere teoretic sistemul celor $3n$ ecuații deduse din condițiile de echilibru al forțelor din noduri are determinantul principal diferit de zero:

$$\Delta_{3n} \neq 0. \tag{6.4}$$

Relația (6.4) constituie condiția teoretică de eliminare a formelor critice.

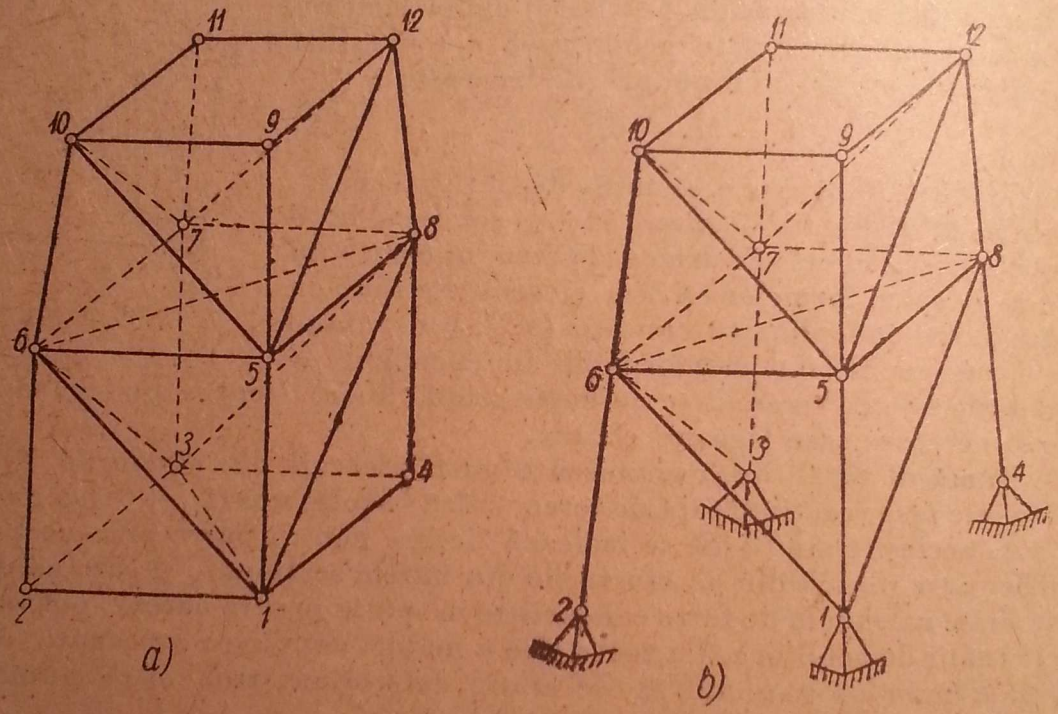


Fig. 365.

Dacă în relația (6.3) $b + r < 3n$, sistemul este geometric deformabil (mecanism), iar dacă $b + r > 3n$, sistemul este static nedeterminat.

Modul de alcătuire a sistemelor articulate în spațiu este foarte variat. Sub o formă cu totul generală se poate face aceeași clasificare ca la sistemele articulate plane în grinzi cu zăbrele simple, compuse și complexe.

a) Grinzile cu zăbrele simple se obțin prin suprapunerea de tetraedre fără întrepătrundere (grinzile cu zăbrele simple în plan se obțineau prin suprapunere de triunghiuri), (fig. 365, *a* și *b*).

În fig. 365, *a*, de triunghiul de bare *1*, *2*, *3* se fixează nodul *6* cu barele *6—1*, *6—2*, *6—3* alcătuind tetraedrul *6 — 1*, *2*, *3*. Apoi se fixează nodul *8* prin barele *8—1*, *8—3*, *8—6* alcătuind tetraedrul *8 — 1*, *3*, *6*. După aceea se fixează nodul *5* prin tetraedrul *5 — 1*, *6*, *8*; nodul *4*, prin tetraedrul *4 — 1*, *3*, *8*; nodul *7*, prin tetraedrul *7 — 3*, *6*, *8*; nodul *10*, prin tetraedrul *10 — 5*, *6*, *7*; nodul *12*, prin tetraedrul *12 — 5*, *7*, *8*; nodul *9*, prin tetraedrul *9 — 5*, *10*, *12*, și nodul *11*, prin tetraedrul *11 — 7*, *10*, *12*.

Grinda cu zăbrele astfel alcătuită este un sistem geometric nedeformabil, indiferent de legăturile sale cu terenul, constituind o grindă liberă, deoarece satisface condiția (6.2) ($b = 30$, $n = 12$).

În fig. 365, *b*, nodul *6* este fixat prin trei bare : *6—1*, *6—2*, *6—3* de trei puncte fixe ale terenului *1*, *2*, *3*, apoi nodul *8* se fixează prin trei bare *8—1*, *8—6*, *8—4* de punctele *1*, *6* și *4*, dintre care *1* și *6* sînt fixate anterior, iar punctul *4* este un al patrulea punct fix al terenului. Mai departe se fixează nodul *5* prin barele *5—1*, *5—6*, *5—8*, alcătuind tetraedrul *5—1*, *6*, *8*, nodul *7*, prin tetraedrul *7—3*, *6*, *8* etc.

Această grindă cu zăbrele este un sistem geometric nedeformabil numai în baza legăturilor cu terenul, deoarece corespunde relației (6.3) : $b + r = 3n$ ($b = 24$; $r = 4 \times 3 = 12$; $n = 12$).

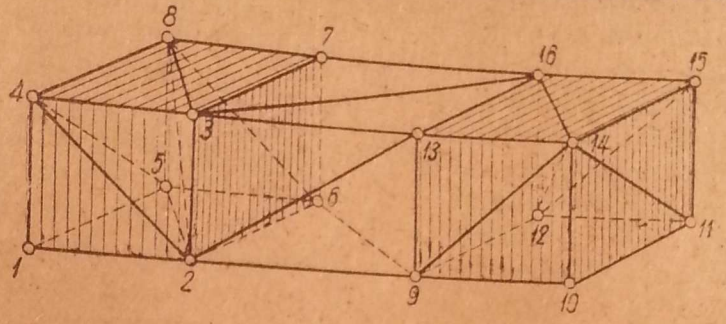


Fig. 366.

De aici rezultă că se pot obține sisteme simple fie ca grinzi libere, fie ca grinzi legate de teren prin mai mult decît șase legături simple.

Se poate recunoaște dacă un sistem a fost alcătuit prin suprapunere de tetraedre, atunci cînd suprimînd succesiv cîte un nod și cele trei bare care-l fixau se ajunge la suprimarea completă a sistemului. Astfel, în fig. 365, *a* dacă se suprimă nodul *9* cu barele *9—10*, *9—12*, *9—5*, și nodul *11*, cu barele *11—12*, *11—10* și *11—7*, se poate suprima apoi nodul *10* cu barele *10—6*, *10—7* și *10—5*, și nodul *12*, cu barele *12—7*, *12—8* și *12—5*. S-a suprimat astfel tot etajul superior. Se poate trece acum la suprimarea nodurilor *5* și *7* scoțînd barele : *5—1*, *5—6*, *5—8*, și *7—3*, *7—6*, *7—8* ; apoi a nodului *4*, scoțînd barele : *4—1*, *4—3*, *4—8* ; a nodului *8*, scoțînd barele : *8—6*, *8—1*, *8—3*, și a nodului *6*, prin scoaterea barelor : *6—1*, *6—3*, *6—2*. S-a ajuns astfel la triunghiul de bază *1*, *2*, *3*.

În mod analog se poate proceda în cazul din fig. 365, *b*.

b) Grinzile cu zăbrele compuse se obțin prin compunerea altor sisteme care, la rîndul lor, sînt geometric nedeformabile.

În fig. 366 sistemele hașurate : *1—2—3—4—5—6—7—8* și *9—10—11—12—13—14—15—16* sînt două sisteme simple, geometric nedeformabile. Dacă se leagă între ele prin șase bare : *2—9*, *3—13*, *7—16*, *2—13*, *6—9* și *3—16*, se obține un sistem compus, care, la rîndul său, este geometric nedeformabil. Bineînțeles, trebuie ca cele șase bare de legătură să nu constituie un sistem critic de legături așa cum s-a examinat în § 39.

Dacă se identifică o construcție cu zăbrele în spațiu ca un sistem simplu sau compus, aceasta constituie o indicație sigură că sistemul este static determinat și satisface condițiile de strictă nedeformabilitate, adică nu este o formă critică.

c) Grinzile cu zăbrele complexe sînt cele ce nu se pot interpreta ca sisteme simple sau compuse. Ele pot avea forme foarte variate ; în cele ce urmează vor fi indicate formele care prezintă interes pentru construcții.

Uneori este indicat ca grinda cu zăbrele în spațiu să nu aibă bare care să obstrueze spațiul interior. Construcția grinzilor cu zăbrele în spațiu fără

diagonale interioare se poate face prin utilizarea poliedrelor, ale căror fețe sînt alcătuite din grinzi cu zăbrele plane, acestea avînd nodurile numai pe muchiile poliedrelor. Asemenea construcții satisfac condițiile de nedeformabilitate geometrică în spațiu.

Pentru a demonstra aceasta, trebuie utilizată o teoremă a lui Euler: la un poliedru închis oarecare relația dintre numărul vîrfurilor n, al muchiilor m și al fețelor plane f este:

$$m - n = f - 2. \tag{6.5}$$

În adevăr, dacă pornim de la o primă față alcătuită dintr-un poligon oarecare, aceasta are un număr egal de muchii (laturi) și vîrfuri. Adăugîndu-i o a doua față, una dintre muchii și două vîrfuri sînt comune cu ale primei fețe. La fel, cînd se adaugă a treia față, două muchii și trei vîrfuri sînt comune cu ale fețelor precedente, și așa mai departe. Astfel, la adăugarea fiecărei fețe noi, după prima, se adaugă un număr nou de muchii mai mare cu unu decît numărul vîrfurilor, și la un moment dat numărul total de muchii depășește numărul total de vîrfuri exact cu numărul fețelor adăugate la fața de plecare. Deci, la un moment dat numărul de muchii trebuie să fie egal cu numărul de vîrfuri plus numărul de fețe adăugate, adică toate, fără fața de plecare. Această relație rămîne valabilă pînă se ajunge la ultima față a cărei adăugare nu antrenează nici o muchie nouă și nici un vîrf nou. Deci, ultima față este a doua față particulară; în ultima analiză diferența dintre numărul muchiilor m și al vîrfurilor n este egală cu numărul fețelor f micșorat cu două, adică:

$$m - n = f - 2. \tag{6.5}$$

Să presupunem acum că fiecare față este un triunghi alcătuit din trei bare; în acest caz, avem o relație suplimentară între numărul fețelor și numărul muchiilor, deoarece fiecare muchie este comună la două fețe, și fiecare față are trei muchii, deci:

$$m = \frac{3}{2} f. \tag{6.6}$$

Înlocuind valoarea lui f din (6.6) în relația (6.5), se obține:

$$m = 3n - 6. \tag{6.7}$$

Muchiile nu sînt însă decît barele grinzii cu zăbrele: ($m = b$), iar vîrfurile sînt nodurile grinzii cu zăbrele poliedrice, astfel încît relația (6.7) devine tocmai relația (6.2):

$$b = 3n - 6, \tag{6.2}$$

care arată că grinda cu zăbrele de formă poliedrică închisă cu fețele alcătuite din triunghiuri este un sistem în spațiu geometric nedeformabil (fig. 367, *a*).

Dacă fiecare față este alcătuită dintr-o grindă cu zăbrele plană, geometric nedeformabilă, cu nodurile numai pe muchii și astfel încît în fiecare nod să fie cel puțin trei bare ce nu sînt în același plan, raționamentul de mai sus rămîne valabil, deoarece se poate considera fiecare triunghi al grinzii cu zăbrele plane ca o față a poliedrului. Fig. 367, *b* reprezintă o grindă cu zăbrele în spațiu, în care cele șase fețe sînt alcătuite din grinzi

cu zăbrele plane în condițiile de mai sus. Acest sistem poliedric nu are nici o diagonală în spațiul interior ($n = 20$, $b = 54$, $b = 3n - 6$).

Fig. 367, *c* și *d* reprezintă construcții teoretic greșite ; nodurile *1* și *2* nu se găsesc pe o muchie a poliedrului, iar nodul *3*, deși se găsește pe muchie, are toate barele în același plan.

In practică — de exemplu la turle de foraj — se folosesc sisteme cu noduri ce nu se găsesc pe muchii (nodurile *1* și *2* din fig. 367, *c*), dar în calcule, aceste noduri, care de fapt sînt rigide, se consideră articulații plane, numai în planul feței respective și nu primesc forțe normale pe planul feței.

Formele poliedrice sînt grinzi libere ($b = 3n - 6$), dar ele se pot transforma, obținîndu-se astfel forme poliedrice transformate.

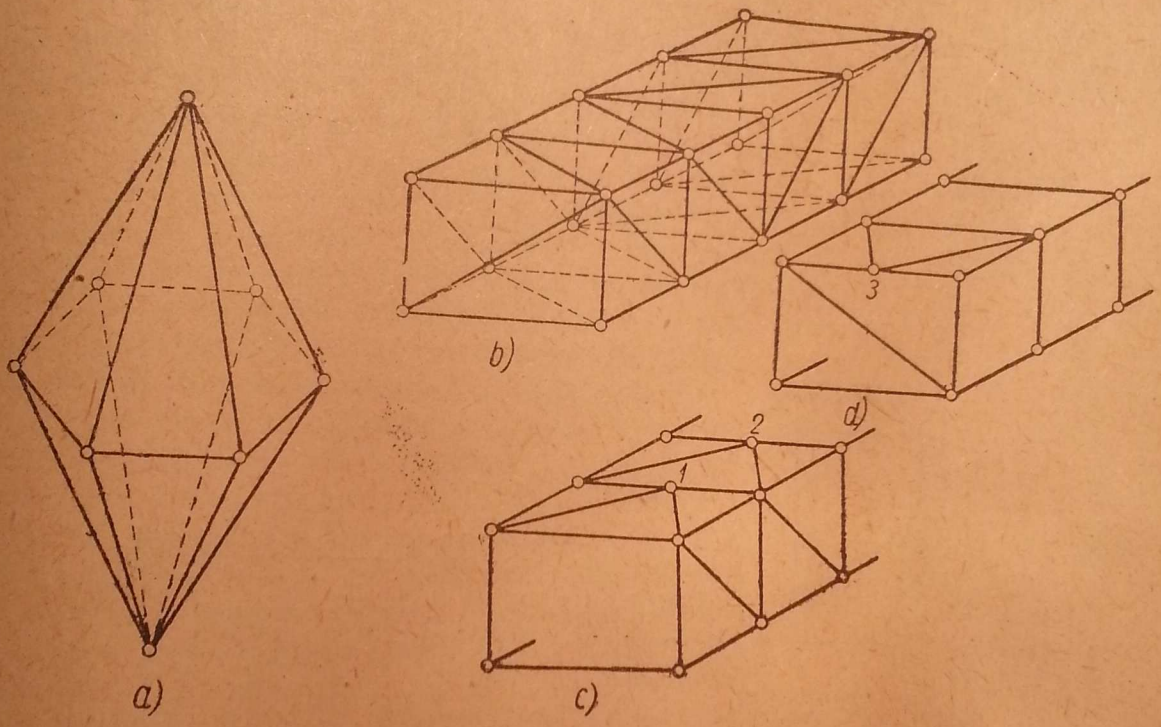


Fig. 367.

Astfel, la formele poliedrice inițiale nu există nici o diagonală în spațiul interior (fig. 367), dar fiecare față fiind triangulată, înseamnă că nu se poate intra pe nici o față în mod liber în spațiul interior. Se pot scoate însă diagonalele unei fețe sau a două fețe și înlocui cu legături suplimentare de rezemare. În acest caz, grinda poliedrică transformată va intra în categoria grinzilor a căror nedeformabilitate geometrică se obține numai pe baza legăturilor cu terenul ($b + r = 3n$).

Sistemele poliedrice transformate cele mai folosite sînt turnurile și cupolele.

În fig. 368 se vede cum din grinda poliedrică liberă care avea nevoie numai de șase reazeme simple (fig. 368, *a*), prin înlocuirea barelor *1* și *2* cu două reazeme s-a obținut turnul din fig. 368, *b*, în care atît spațiul interior, cît și fețele superioară și inferioară sînt libere. În fig. 368, *c* este arătat un turn cu două etaje, în care diagonalele din fața de jos și din cea de sus au fost înlocuite cu două reazeme, astfel încît : $n = 12$, $b = 28$, $r = 8$ ($b + r = 3n$).

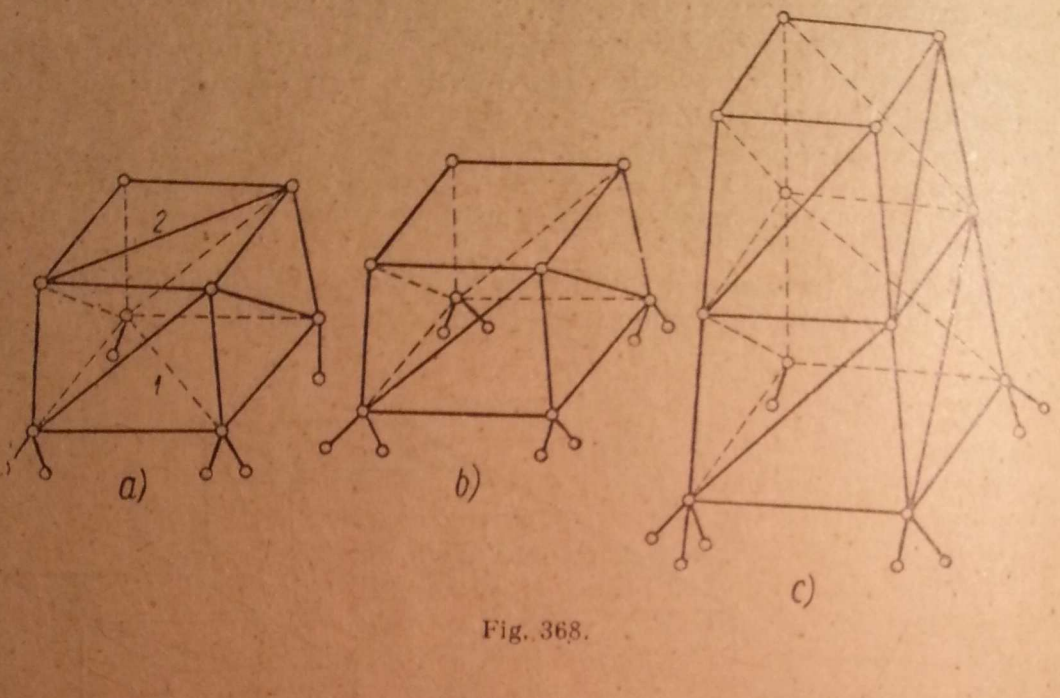


Fig. 368.

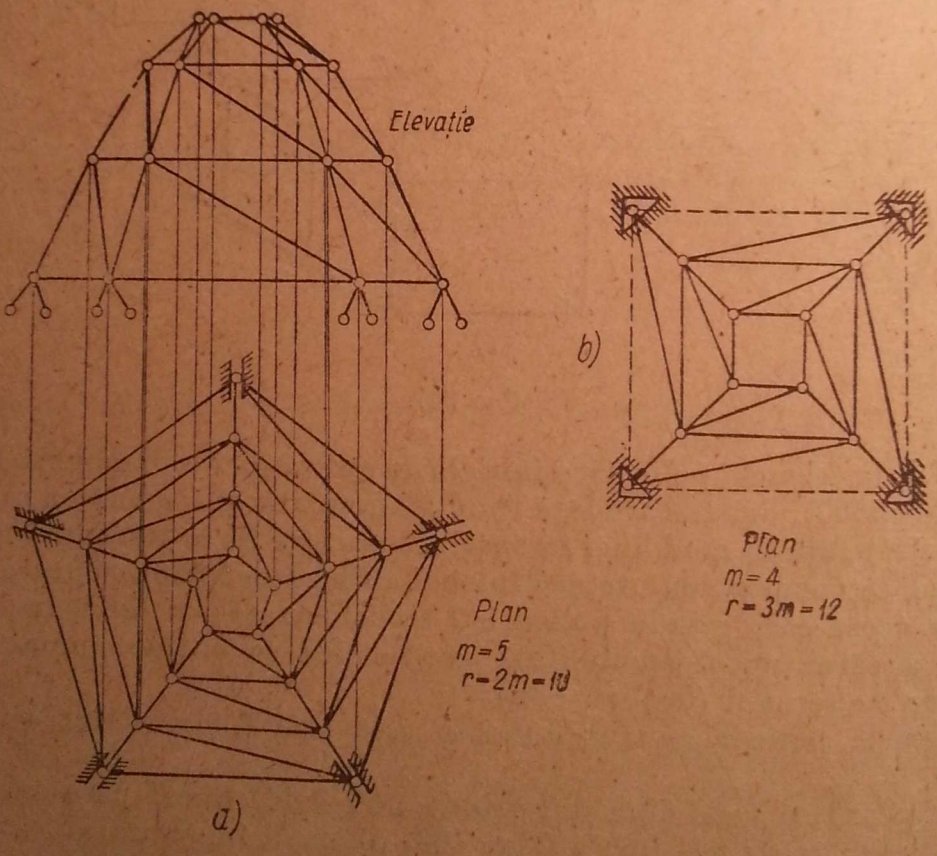


Fig. 369.

În mod analog se obțin cupolele (fig. 369). Prin suprimarea diagonalelor de pe fața de la baza cupolei și de pe fața din vîrf se observă că dacă poligonul de bază și cel din vîrf au cîte m laturi, se suprimă $2(m-3)$ diagonale și se vor adăuga tot atîtea reazeme, astfel încît numărul total de reazeme simple este : $r = 6 + 2(m-3) = 2m$, adică, cîte două reazeme de fiecare latură sau de fiecare nod al poligonului de bază (fig. 369, *a*).

Dacă se suprimă și laturile exterioare ale poligonului de bază, trebuie introduse cîte trei reazeme simple în fiecare nod al inelului de bază : $r = 3m$ (fig. 369, *b*).

În categoria turnurilor poliedrice este de menționat tipul de turn propus de academicianul rus V. G. Suhov încă din 1894, în care generatoarele oblice sînt drepte pe o suprafață riglată (paraboloid hiperbolic), (fig. 370).

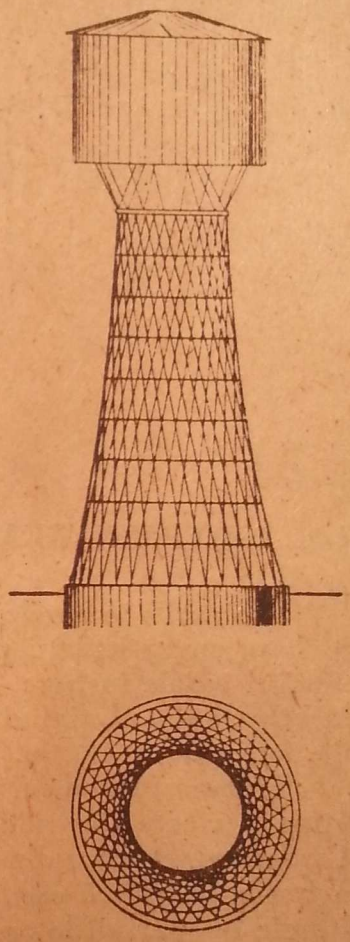


Fig. 370.

Un alt tip de grinzi cu zăbrele în spațiu sînt „biconstrucțiile" [1]), alcătuite din două grinzi cu zăbrele plane legate între ele printr-un sistem de contravîntuiri, așa încît să constituie un sistem cu zăbrele în spațiu geometric nedeformabil (fig. 371).

Aceste sisteme sînt folosite de obicei la poduri metalice, și după numărul barelor și al reazemelor pot fi static determinate sau static nedeterminate.

Cînd cele două grinzi cu zăbrele plane sînt static determinate și legate complet în planul lor, iar barele de solidarizare (contravîntuirile) între cele două grinzi principale sînt dispuse astfel, încît sistemul în ansamblu rezultă static determinat și geometric nedeformabil, sistemul se numește simplu, iar cînd grinzile cu zăbrele principale nu sînt complet legate în planul lor și se introduc bare de legătură în alte plane pentru a se asigura nedeformabilitatea geometrică, sistemul se numește transformat.

Rețeaua de contravîntuiri se numește simplă cînd formează un sistem continuu între grinzile principale. Sistemul de contravîntuiri simplu este deschis (fig. 371, *a*) cînd o secțiune transversală completă taie ambele grinzi principale și o singură bară a contravîntuirii. Dacă o acemenea secțiune taie două sau mai multe bare ale contravîntuirii, sistemul se numește închis (fig. 371, *b*).

Exemplul din fig. 371, *a* este static determinat, avînd $r = 7$, $b = 53$, $n = 20$ ($b + r = 3n$), pe cînd exemplul din fig. 371, *b* este de două ori static nedeterminat, deoarece este un poliedru cu toate fețele plane alcătuite din grinzi cu zăbrele complete, dar are opt reazeme în loc de șase.

La construcțiile de poduri, cele două grinzi plane principale sînt, de obicei, paralele, dar la deschideri mari cele două plane se pot așeza înclinat, pentru o mai bună stabilitate la sarcinile normale pe planul vertical longitudinal al podului.

[1]) Termenul „biconstrucție" și metoda de calcul corespunzătoare aparțin profesorului sovietic *A. A. Umanski*. A se vedea lucrarea sa „Sisteme spațiale", Moscova, 1948.

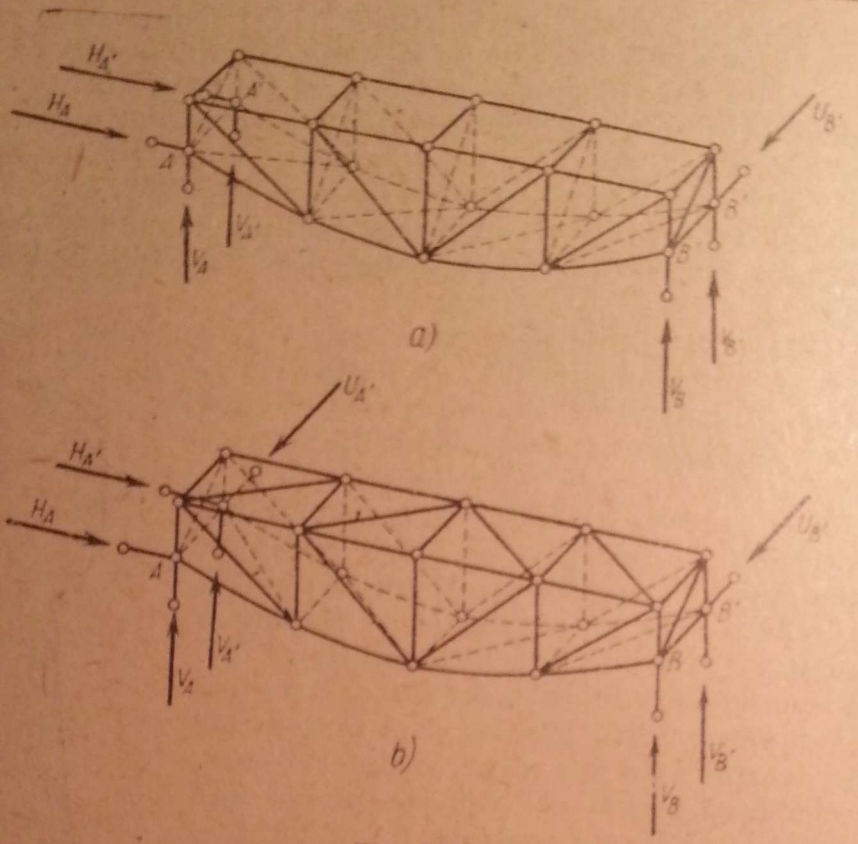


Fig. 371.

§ 41. DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN BARE. METODE GENERALE

Eforturile în barele grinzilor cu zăbrele în spațiu considerate ca sisteme de bare cu articulații perfecte în noduri și încărcate numai la noduri sînt eforturi axiale în bare, care, în principiu, se calculează la fel ca la grinzile cu zăbrele plane, ținînd seamă că vom avea, în general, ecuații de echilibru ale forțelor în spațiu.

Trebuie însă menționat că admiterea ipotezelor cu privire la articulațiile perfecte din noduri are o influență mult mai mare asupra naturii și valorii eforturilor din bare decît la grinzile cu zăbrele în plan. Rigiditatea nodurilor modifică esențial eforturile în bare la anumite tipuri de grinzi cu zăbrele în spațiu (de exemplu cupolele în care inelele sînt alcătuite din poligoane cu multe laturi), pe cînd la grinzile cu zăbrele în plan efectul rigidității nodurilor sepoate neglija de cele mai multe ori. În acest capitol, însă, calculul eforturilor se face în ipoteza articulațiilor perfecte în noduri, deoarece introducerea nodurilor rigide constituie probleme static nedeterminate.

În principiu se va folosi metoda generală a secțiunilor, care, după modul cum se aplică, poartă diferite denumiri.

A. METODA SEPARĂRII NODURILOR

Dacă se face o secțiune completă prin grinda cu zăbrele, dar astfel ca una dintre părțile separate să conțină numai un nod cu barele respective, metoda se numește metoda separării nodurilor. În acest fel, în fiecare nod se obține un sistem de forțe concurente în spațiu, pentru care există

trei ecuații de echilibru. Numărul total de ecuații în cele n noduri va fi deci $3n$, iar numărul total de necunoscute : eforturile din bare — b — și reacțiunile din reazeme — r. Așa cum am văzut : $b + r = 3n$.

Pe această cale ar urma să se rezolve un sistem de $3n$ ecuații.

Prin metoda separării nodurilor se înțelege însă — la fel ca în plan — metoda care permite rezolvarea acestor ecuații pentru fiecare nod în parte. Pentru aceasta este necesar, pe de o parte, ca la un nod să se găsească numai trei necunoscute, adică să avem numai trei bare ce nu sînt în același plan, iar pe de altă parte, să putem găsi succesiv numai noduri în care să apară cîte maximum trei necunoscute. Dacă această condiție este îndeplinită într-o anumită ordine de succesiune a nodurilor, atunci în fiecare nod problema de reduce la a studia echilibrul unui sistem de forțe concurente în spațiu, dintre care numai mărimile a trei dintre ele sînt necunoscute.

Compunînd forțele și eforturile cunoscute dintr-un nod într-o rezultantă, problema se reduce la descompunerea rezultantei după trei direcții în spațiu concurente pe ea. Componentele după cele trei direcții, cu sens schimbat, vor fi eforturile în cele trei bare.

Această operație se poate face pe cale analitică, pe cale grafică, sau pe o cale combinată, utilizînd atît elemente analitice, cît și elemente grafice.

a) Soluția analitică

Față de un sistem de axe rectangulare proiecțiile forțelor date și ale eforturilor necunoscute pe fiecare dintre cele trei axe sînt nule. Rezultă astfel, în general, un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute. Uneori, calculele sub această formă sînt greoaie și pot fi evitate dacă se ia ca axă de proiecție o dreaptă Δ perpendiculară pe planul a două dintre direcțiile eforturilor necunoscute. Ecuația de proiecție pe axa Δ dă direct valoarea efortului după a treia direcție. Astfel, în fig. 372 dreapta Δ este perpendiculară pe planul format de barele $0-1$ și $0-2$ și face unghiurile α și β cu $0-3$, respectiv P. Proiecția pe axa Δ determină efortul N_3 din bara $0-3$ dintr-o ecuație cu o singură necunoscută :

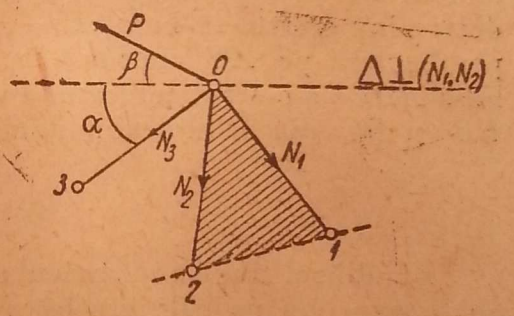


Fig. 372.

$$N_3 \cos \alpha + P \cos \beta = 0. \qquad (6.8)$$

Eforturile N_1 și N_2 se determină în mod asemănător.

Din relația de mai sus se pot trage concluzii importante :

1. Dacă într-un nod în spațiu alcătuit numai din trei bare ce nu sînt în același plan, nu se aplică nici o forță, eforturile din cele trei bare sînt nule.

2. Dacă într-un nod în spațiu cu m bare, $m - 1$ bare se găsesc într-un plan, atunci efortul din bara ce nu se găsește în acest plan se determină direct din ecuația de proiecție pe normala la acel plan. În particular, dacă în nod se aplică numai forțe situate în planul celor $m - 1$ bare, atunci efortul în bara ce nu aparține planului este nul.

Aceste observații pot fi folosite de multe ori pentru a determina barele inactive (cu eforturi nule) pentru anumită încărcare a unui sistem articulat în spațiu, ceea ce constituie o ușurare în determinarea eforturilor în barele active.

Astfel, în exemplul din fig. 373 unde acționează numai forța oarecare P în nodul A, se deduce cu ușurință că barele active sînt numai cele desenate îngroșat. În adevăr, în nodul B nu acționează nici o forță, iar trei dintre cele patru bare ale nodului B, și anume: AB, BC și BD sînt într-un plan, iar una, BF, este în afara acestui plan. Deci, efortul în bara BF este nul.

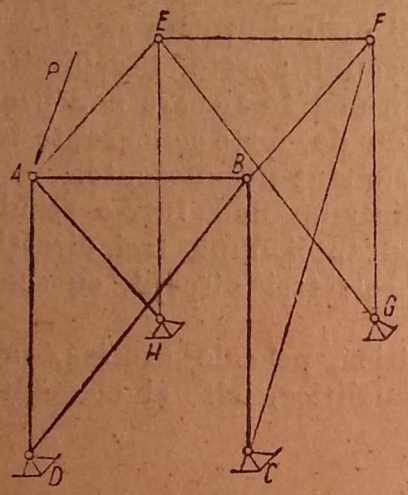


Fig. 373.

Din considerații analoge în nodul F rezultă că efortul în bara EF este nul; din echilibrul nodului E rezultă efort nul în bara AE. În nodul E au rămas două bare HE și EG fără nici o forță, astfel încît eforturile în aceste bare sînt nule.

La fel, din nodul F se obțin eforturi nule în barele CF și FG.

În consecință, la încărcarea cu sarcina P în nodul A lucrează numai barele AH, AD, AB, BD și BC.

În nodul A au rămas numai trei bare active: AD, AH și AB, care nu se găsesc în același plan, și forța P. Din ecuația de proiecție pe AB se determină efortul în această bară. Din ecuația de proiecție pe direcția AE se determină efortul în bara AH, și din ecuația de proiecție pe dreapta perpendiculară pe AH cuprinsă în planul $AEHD$ se determină efortul în bara AD. Cu efortul determinat în bara AB se determină eforturile în barele BD și BC din echilibrul nodului B în planul $ABCD$.

b) Soluția grafică

Echilibrul unui nod articulat cu trei bare ce nu sînt în același plan se poate exprima pe cale grafică utilizînd două plane de proiecție, la fel ca în problema descompunerii forței după trei direcții, cu ajutorul geometriei descriptive.

Dacă se pot alege planele de proiecție astfel, încît pe unul dintre ele două eforturi să se proiecteze după aceeași dreaptă, construcția grafică este foarte simplă, așa cum se arată în fig. 374, unde (O', O'') reprezintă proiecțiile nodului O pe cele două plane — să le spunem vertical și orizontal. În planul vertical direcțiile eforturilor N_1 și N_2 se proiectează după aceeași dreaptă N_1', N_2'. În planul orizontal, direcțiile eforturilor N_1, N_2, N_3 se proiectează în N_1'', N_2'', N_3''. Forța exterioară P din nodul O are proiecțiile P' și P'' pe cele două plane. Epura se începe în planul vertical, unde poligonul de forțe din spațiu cu patru laturi P, N_1, N_2 N_3 se proiectează după un triunghi, deoarece N_1 și N_2 se proiectează după aceeași dreaptă. Din extremitățile lui P' se duc paralele la N_3' și N_1', și în triunghiul astfel format N_3' este determinat. În planul orizontal, prin extremitățile lui P'' se duc palalele la N_1'' și N_3''. Cu ajutorul lui N_3' din planul vertical,

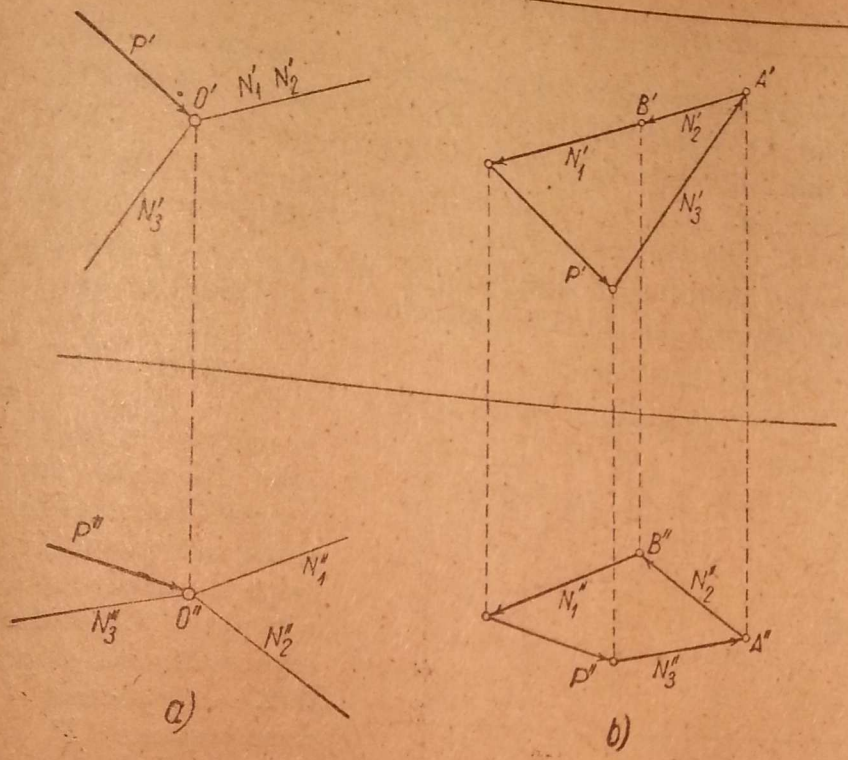


Fig. 374.

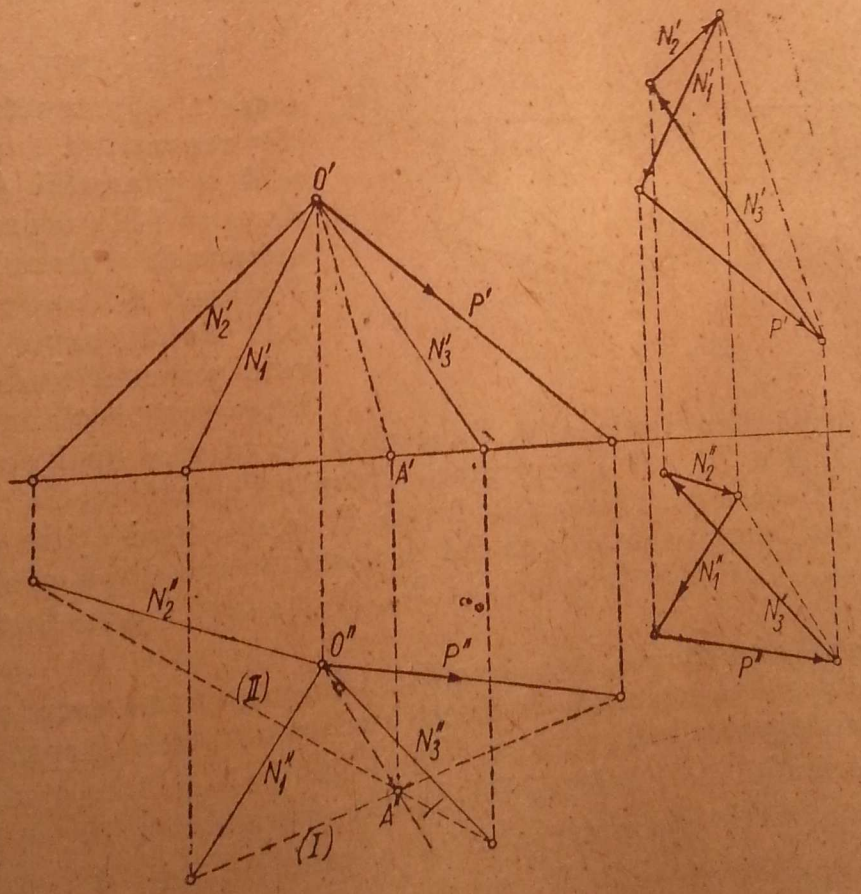


Fig. 375.

se determină, prin proiecția lui A' în A'', mărimea lui N_3'', și în extremitatea acestuia se duce paralela la N_2'' care, prin intersecția cu N_1'' în B'', determină mărimile lui N_2'' și N_1''. Ridicînd pe B'' în B' (în planul vertical), se determină N_1' și N_2'. Sensurile eforturilor N_1, N_2, N_3 se determină prin închiderea poligoanelor de forțe în cele două plane de proiecție.

Dacă nu se poate alege unul dintre planele de proiecție ca mai sus, și în fiecare dintre cele două plane cele trei eforturi se proiectează după drepte distincte, se pot folosi două procedee :

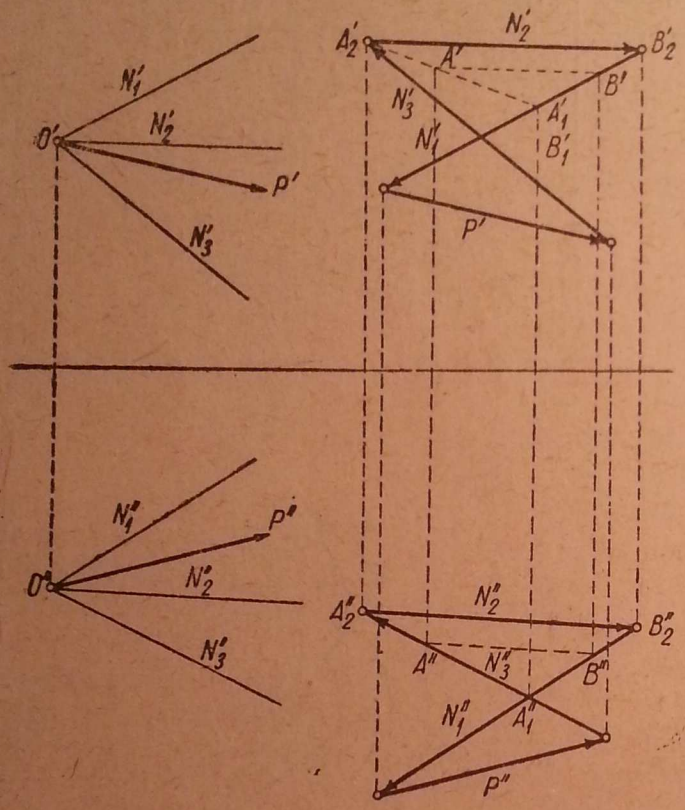


Fig. 376.

În primul, se interpretează grafic metoda generală : prin direcția forței P și a unuia dintre eforturi — N_1 — se duce un plan, iar prin celelalte două direcții, N_2 și N_3 — alt plan. Cele două plane se intersectează după o dreaptă OA. În planul (P, N_1) se descompune P după N_1 și dreapta OA, iar în al doilea plan (N_2, N_3) se descompune componenta din OA după N_2 și N_3.

În fig. 375 este indicată această construcție. Dreapta (I) reprezintă urma orizontală a planului (P, N_1), iar dreapta (II) reprezintă urma orizontală a planului (N_2, N_3). Punctul A'' unde se întîlnesc cele două urme (I) și (II) este punctul unde dreapta de intersecție a planelor (P, N_1) și (N_2, N_3) înțeapă planul orizontal. Punctul A' se va găsi deci pe linia de pămînt, și $(O'A')$, $(O''A'')$ reprezintă dreapta de intersecție OA. Se descompune în fiecare plan proiecția forței P după proiecțiile dreptelor N_1 și OA, iar apoi, componenta după OA se descompune după proiecțiile dreptelor N_2 și N_3. Sensurile forțelor N_1, N_2, N_3 se obțin prin închiderea poligoanelor.

Procedeul este simplu, dar de multe ori dreapta OA este greu de determinat, prin faptul că necesită intersecții ce ies din cadrul epurei. De aceea, este mai practic procedeul următor (fig. 376) :

Prin extremitățile lui P' și P'' se duc paralele la N_1' și N_3', respectiv N_1'' și N_3''. În planul orizontal se duce o paralelă $A''B''$ la dreapta N_2''. Punctul B'' se raportează în B', de aici se duce paralela la N_2', iar din A'' verticala care determină pe A'. Punctul A' nu se va găsi în general pe N_3', deci poziția $A''B''$ nu este cea justă. Dacă se consideră o altă dreaptă $A''B''$ paralelă cu N_2'', vom găsi un alt punct A'. Se observă că patrulaterul $A''B''B'A'$ se deformează astfel, încît toate laturile sale rămîn paralele,

iar trei vîrfuri A'', B'' și B' se deplasează pe trei drepte, deci, în baza teoremei care a mai fost folosită, al patrulea vîrf A' se va deplasa și el pe o dreaptă. Pentru a determina o a doua poziție a punctului A', se pornește de la o nouă poziție pentru $A''B''$ paralelă cu N_2''. În figură s-a luat pentru această poziție chiar punctul de intersecție A_1'', a lui N_1'' cu N_3''. Punctul B_1'' se confundă cu A_1''. Acest punct se ridică pe verticală în B_1', pe dreapta N_1'. În B_1' se găsește și A_1'. Dreapta $A'A_1'$ întîlnește dreapta N_3' în punctul A_2'. Din A_2' se duce $A_2'B_2'$ paralelă cu N_2'. Proiectînd A_2' în A_2'' pe N_3'' și B_2' în B_2'' pe N_1'', se obține dreapta $A_2''B_2''$, care, pentru verificare, trebuie să fie paralelă cu N_2''. În modul acesta au fost determinate eforturile în barele poligoanelor de forțe în fiecare dintre cele două plane de proiecție: (N_1', N_1''), (N_2', N_2'') și (N_3', N_3''). Sensurile se obțin din închiderea poligoanelor de forțe în fiecare dintre cele două plane de proiecție.

Aceste operații grafice se fac pe rînd în fiecare nod unde există maximum trei necunoscute.

Dacă aceste descompuneri grafice se fac pe aceleași plane de proiecție, prin trecerea succesivă într-o ordine convenabilă la noduri cu numai trei necunoscute, se poate construi și epura poligoanelor reciproce pentru determinarea eforturilor în fiecare dintre cele două plane de proiecție, analogă epurei poligoanelor reciproce de la grinzi cu zăbrele plane (metoda Maxwell — Cremona).

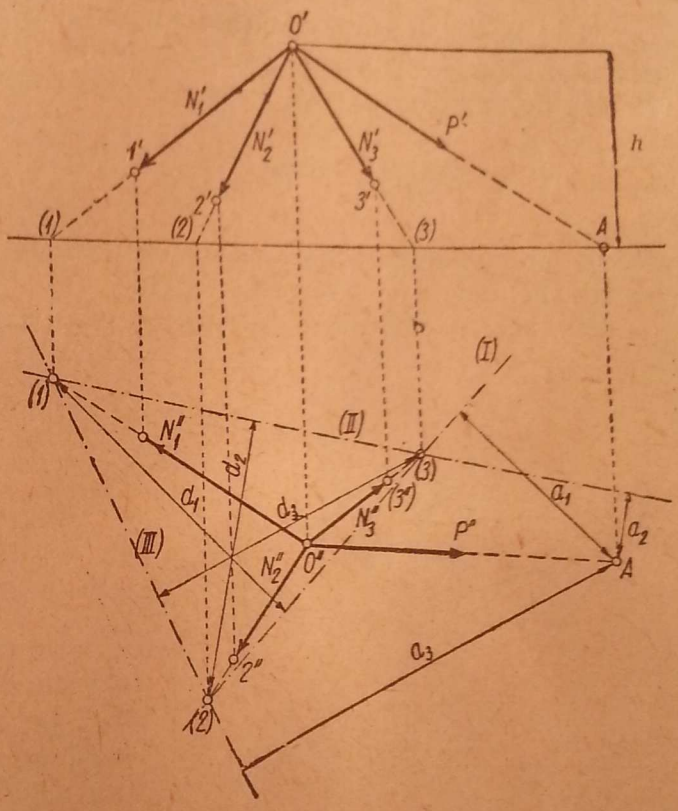


Fig. 377.

c) Soluția combinată

Efortul în una dintre cele trei bare ale unui nod articulat încărcat cu o sarcină exterioară se poate determina și cu ajutorul ecuației de momente în raport cu o axă care întîlnește celelalte două bare. În exemplul din fig. 372, prin ecuația de momente în raport cu axa $1-2$, care taie barele $0-1$ și $0-2$, se determină direct efortul din bara $0-3$.

De obicei, acest procedeu se aplică pe o cale combinată, utilizînd concomitent atît ecuații analitice, cît și construcții grafice, așa cum se arată în fig. 377, unde cele trei bare $0-1$, $0-2$, $0-3$ și forța P sînt reprezentate prin proiecțiile lor pe cele două plane de proiecție. Se prelungesc direcțiile $0-1$, $0-2$, $0-3$ și direcția de acțiune a forței P pînă cînd întîlnesc planul de referință (orizontal) în punctele (1), (2), (3) și A. Pentru a afla efortul N_1, se iau momentele în raport cu axa (I) care trece prin punctele (2) și

(3) ale planului orizontal. În raport cu această axă, momentele lui N_2 și N_3 sînt nule. În punctele (1), (2), (3) și A se descompun forțele N_1, N_2, N_3 și P în componentele după normala la planul de referință, adică după verticală și cele din planul de referință (orizontal). Componentele din planul de referință (orizontal) nu vor da momente în raport cu nici o dreaptă din acel plan.

Deci, pentru ecuațiile de momente trebuie evaluate componentele verticale ale acestor forțe. Dacă se notează adevăratele lungimi $0-(1)$ cu l_1, $0-(2)$ cu l_2, $0-(3)$ cu l_3 și $0-A$ cu s, iar cu h, înălțimea punctului 0 deasupra planului orizontal, componentele verticale ale forțelor N_1, N_2, N_3 și P vor fi:

$$V_1 = N_1 \cdot \frac{h}{l_1}; \quad V_2 = N_2 \cdot \frac{h}{l_2}; \quad V_3 = N_3 \cdot \frac{h}{l_3}; \quad V = P \cdot \frac{h}{s}. \tag{6.9}$$

N_1 se determină din ecuația de momente în raport cu axa (I) a planului orizontal. Dacă se notează cu d_1 distanța în planul orizontal a punctului (1) față de axa (I), și cu a_1, distanța lui A față de aceeași axă, rezultă:

$$-N_1 \cdot \frac{h}{l_1} \cdot d_1 + P \frac{h}{s} \cdot a_1 = 0.$$

În mod analog se obțin două ecuații de momente în raport cu axele (II) și (III) care vor determina pe N_2 și N_3.

Din aceste ecuații de momente rezultă:

$$N_1 = P \cdot \frac{l_1}{s} \cdot \frac{a_1}{d_1};$$

$$N_2 = -P \cdot \frac{l_2}{s} \cdot \frac{a_2}{d_2}; \tag{6.10}$$

$$N_3 = -P \cdot \frac{l_3}{s} \cdot \frac{a_3}{d_3}.$$

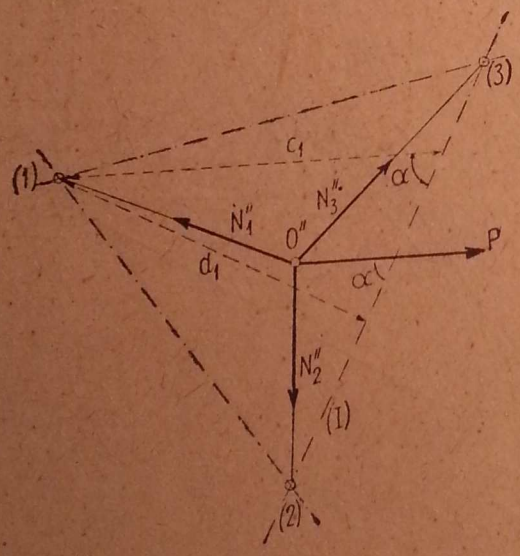


Fig. 378.

În cazul cînd forța P este paralelă cu planul de referință, pentru a afla pe N_1 se descompune forța P după o paralelă și o perpendiculară la axa (I) în planul lui P, paralel cu planul de referință. Componenta după paralela la (I) nu dă moment față de (I), deci interesează numai componenta după perpendiculara la (I). Dacă α este unghiul pe care-l face P cu (I) (fig. 378), componenta după normală este $P \sin \alpha$, și ecuația de momente în raport cu axa (I) devine:

$$-N_1 \frac{h}{l_1} d_1 + P \sin \alpha \cdot h = 0,$$

de unde rezultă:

$$N_1 = P \cdot \frac{l_1}{d_1} \sin \alpha.$$

Dacă din (*I*) se duce paralela la P și se notează cu c_1 distanța pînă la intersecția cu axa (*I*), din fig. 378, rezultă :

$$c_1 = \frac{d_1}{\sin \alpha}$$

și deci expresia lui N_1 devine :

$$N_1 = P \cdot \frac{l_1}{c_1}. \qquad (6.11)$$

În mod analog se determină eforturile N_2 și N_3.

B. METODA SECȚIUNILOR

Dacă prin secțiunea care separă în două grinda cu zăbrele în spațiu, în fiecare dintre părți, barele secționate nu sînt toate concurente în același nod, metoda poartă numele de metoda secțiunilor.

Deoarece există șase condiții de echilibru pentru un corp geometric nedeformabil în spațiu, trebuie ca secțiunea să taie maximum șase bare, cu condiția ca să nu existe și alte necunoscute, cum ar fi reacțiunile din reazeme, dacă nu au fost determinate anterior. În acest caz, eforturile din cele șase bare secționate pot fi determinate numai prin secțiunea făcută. În cazul cînd secțiunea taie mai mult decît șase bare, sau, în general, rămîn mai mult decît șase necunoscute pe una dintre părțile secționate, la cele șase ecuații de echilibru trebuie adăugate altele obținute pe altă cale.

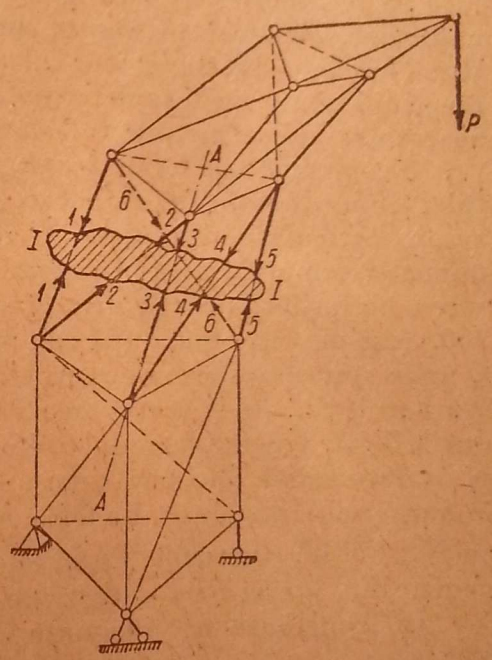


Fig. 379.

În exemplul din fig. 379 secțiunea $I - I$ separă complet în două sistemul și taie șase bare. Dacă se exprimă echilibrul părții de deasupra, afară de cele șase eforturi din bare nu sînt alte necunoscute. Același rezultat se obține dacă se exprimă echilibrul părții de jos, după ce în prealabil au fost determinate reacțiunile din reazeme.

Determinarea eforturilor în cele șase bare secționate se face după criteriile de care s-a ținut seamă la determinarea reacțiunilor (§ 39), adică din ecuații de momente în raport cu axe care să întîlnească cît mai multe bare. În exemplul din fig. 379, prin ecuația de momente în raport cu axa $A - A$, care este dreapta de intersecție a două plane ce conțin cinci eforturi, se determină direct efortul din bara *6*.

În general, în spațiu se întîlnesc rar secțiuni care să taie numai șase bare și, de aceea, metoda secțiunilor trebuie combinată cu alte metode, cum este, de exemplu, metoda înlocuirii barelor.

C. METODA ÎNLOCUIRII BARELOR

La fel ca la sistemele plane, dacă nu se poate utiliza direct metoda separării nodurilor sau a secțiunilor, se folosește metoda înlocuirii barelor.

În această metodă se suprimă una sau mai multe bare introducîndu-se eforturile necunoscute X_1, X_2... după direcțiile barelor suprimate. Din punct de vedere cinematic, se introduc în locul lor alte legături care să asigure nedeformabilitatea geometrică, dar care să permită aplicarea metodei separării nodurilor sau a secțiunilor. Se obține astfel o grindă transformată, care se numește forma de bază a grinzii inițiale. Forma de bază va coincide cu grinda inițială cînd eforturile în legăturile nou introduse vor fi nule. Punînd condiția — pe forma de bază — ca sub sarcinile date și necunoscutele X_1, X_2... eforturile în aceste legături introduse să fie nule, se obține un sistem de ecuații care determină necunoscutele X_1, X_2...

Astfel, în exemplul cupolei din bare articulate, reprezentată în fig. 380, *a*, *b*, *c*, este satisfăcută condiția de nedeformabilitate geometrică, deoarece : $n = 9$, $b = 18$, $r = 2 \cdot 3 + 3 = 9$, $(b + r = 3n)$.

În punctele *a*, *c* și *e* avem reazeme duble cu posibilitate de alunecare radială, iar în punctele *b*, *d*, *f*, — reazeme simple verticale.

Se recunoaște ușor că nu se poate aplica direct nici metoda separării nodurilor, deoarece în fiecare nod sînt cîte cinci bare, nici metoda secțiunilor, căci o secțiune taie cel puțin cinci bare la care se adaugă și trei reacțiuni ce nu au fost determinate anterior, deci opt necunoscute. Pentru aceasta se aplică metoda înlocuirii barelor în modul următor :

Se suprimă trei bare : *ig*, *gh*, *ih* și se înlocuiesc cu alte trei bare orizontale, după direcția de alunecare în reazemele *a*, *c*, *e*. Aceste reazeme devin acum articulații complete (fig. 380, *d*). Sistemul astfel transformat, numit sistemul de bază al sistemului primitiv se poate rezolva prin separarea nodurilor pentru orice încărcare. Astfel, o sarcină în nodul *g* (fig. 380, *e*) se descompune după cele trei bare *ga*, *gb* și *gf*. Se trece apoi la nodul *f*, unde sînt cunoscute eforturile din barele *fg* și *fi*, și se determină eforturile din barele *fa*, *fe* și reacțiunea verticală din *f*. La fel se procedează în nodurile *b* și *d*. Trecînd la nodul *a*, eforturile din barele *ag*, *af* și *ab* sînt cunoscute și se determină cele trei componente ale reacțiunii din *a*, dintre care una în bara nou introdusă. La fel se procedează cu nodurile din *c* și *e*. Se notează cu N_a^0, N_c^0, N_e^0 eforturile din barele nou introduse în nodurile *a*, *c* și *e*, provenite din încărcările exterioare pe forma de bază.

În locul barelor suprimate se introduc necunoscutele X_1, X_2, X_3 (fig. 380, *d*).

Dacă în sistemul transformat (forma de bază) facem să acționeze numai perechea de forțe $X_1 = 1$ după direcția *gh* (fig. 380, *f*), în barele introduse în nodurile *a*, *c*, și *e* vor rezulta eforturile $n_{a,1}$, $n_{c,1}$, $n_{e,1}$, iar dacă după aceeași direcție *gh* acționează perechea de forțe X_1, vor rezulta în aceleași bare eforturile $X_1 \cdot n_{a,1}$; $X_1 \cdot n_{c,1}$; $X_1 \cdot n_{e,1}$.

În mod analog, dacă pe direcția *gi* acționează perechea de forțe $X_2 = X_2 \cdot 1$, în cele trei bare vor apărea eforturile : $X_2 \cdot n_{a,2}$; $X_2 \cdot n_{c,2}$; $X_2 \cdot n_{e,2}$, iar cînd acționează după direcția *ih* perechea de forțe $X_3 = X_3 \cdot 1$, vom avea în aceleași bare : $X_3 \cdot n_{a,3}$; $X_3 \cdot n_{c,3}$; $X_3 \cdot n_{e,3}$.

Punînd condiția ca sub încărcările exterioare și a necunoscutelor X_1, X_2, X_3 eforturile N_a, N_c, N_e în barele introduse în nodurile *a*, *c* și *e* să fie

nule, înseamnă că sistemul de bază se comportă la fel ca sistemul inițial :

$$\begin{aligned} N_a &= X_1 \cdot n_{a,1} + X_2 \cdot n_{a,2} + X_3 \cdot n_{a,3} + N_a^0 = 0; \\ N_c &= X_1 \cdot n_{c,1} + X_2 \cdot n_{c,2} + X_3 \cdot n_{c,3} + N_c^0 = 0; \\ N_e &= X_1 \cdot n_{e,1} + X_2 \cdot n_{e,2} + X_3 \cdot n_{e,3} + N_e^0 = 0. \end{aligned} \qquad (6.12)$$

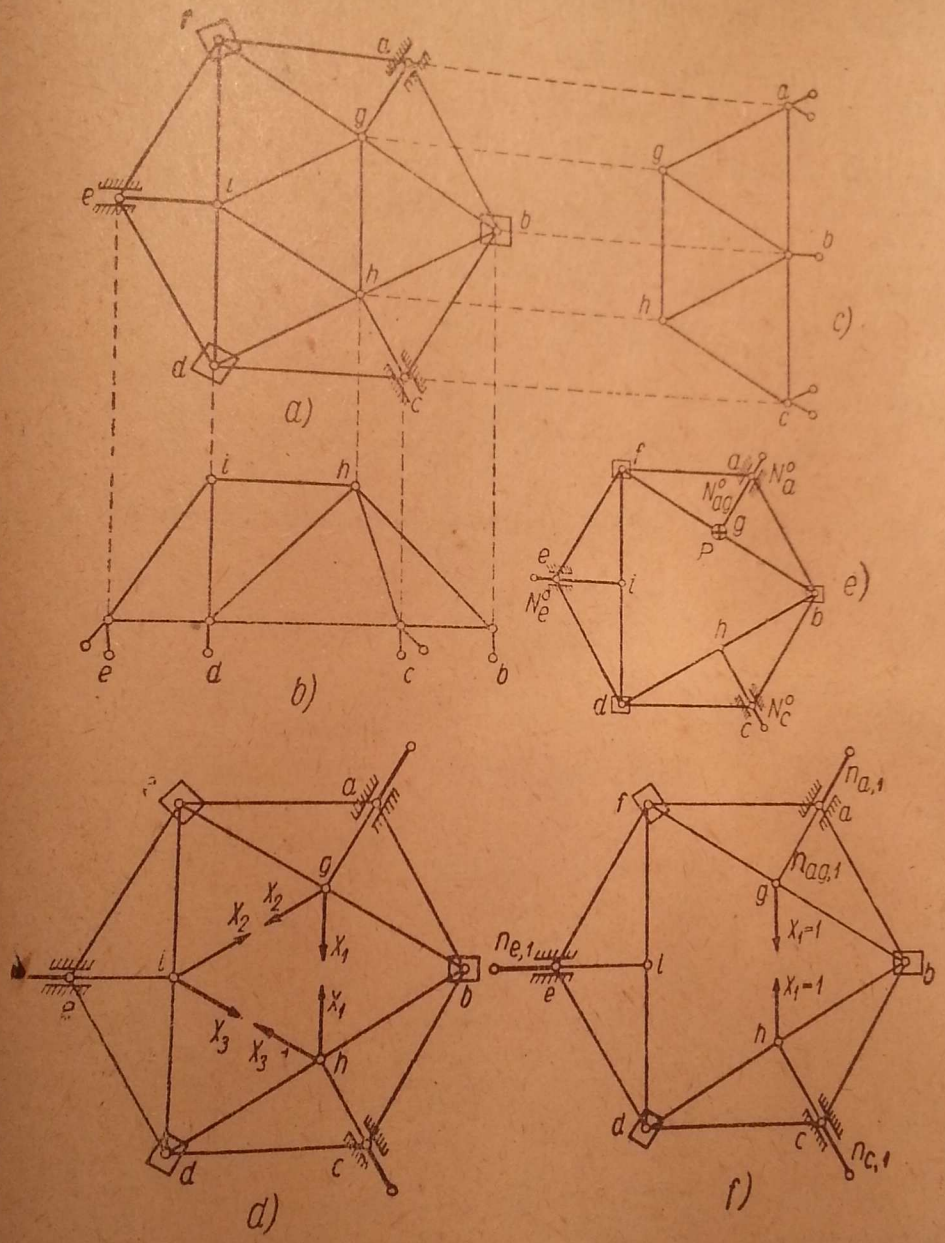


Fig. 380.

Rezolvînd acest sistem de ecuații se găsesc necunoscutele X_1, X_2, X_3 și atunci efortul într-o bară oarecare ag a sistemului inițial este :

$$N_{ag} = N_{ag}^0 + X_1 n_{ag,1} + X_2 n_{ag,2} + X_3 n_{ag,3},$$

în care N^0_{ag} este efortul în bara *ag* a sistemului de bază din încărcările exterioare;

$n_{ag,1}$ — efortul din bara *ag* a sistemului de bază din încărcarea $X_1 = 1$;

$n_{ag,2}$ — efortul în aceeași bară din încărcarea $X_2 = 1$ etc.

Evident, în barele *gh*, *ig* și *ih* vom avea: $N_{gh} = X_1$; $N_{ig} = X_2$; $N_{ih} = X_3$.

În cazul din fig. 380, ținînd seamă de simetria figurii, se notează:

$$n_{e,1} = n_{c,2} = n_{a,3} = \alpha;$$

$$n_{a,1} = n_{c,1} = n_{a,2} = n_{e,2} = n_{e,3} = n_{c,3} = \beta, \tag{6.13}$$

și sistemul de ecuații devine:

$$\begin{aligned} N_e &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \beta X_3 + N^0_e = 0;\\ N_c &= \beta X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 + N^0_c = 0;\\ N_a &= \beta X_1 + \beta X_2 + \alpha X_3 + N^0_a = 0, \end{aligned} \tag{6.14}$$

cu soluțiile:

$$X_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{6.15}$$

Condiția ca sistemul să fie strict nedeformabil, adică să nu fie o formă critică, este:

$$\Delta \neq 0.$$

Avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & (\beta-\alpha) & (\alpha-\beta) \end{vmatrix} = (\beta-\alpha) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 2\beta \\ \beta & \alpha & (\alpha+\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} (\beta-\alpha) = (\alpha-\beta) \begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & (\alpha+\beta) \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\beta) \begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ (\beta-\alpha) & (\alpha-\beta) \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)^2 \begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)^2 (\alpha+2\beta),$$

de unde rezultă și condiția de strictă nedeformabilitate:

$$\Delta = (\alpha-\beta)^2 (\alpha+2\beta) \neq 0, \tag{6.16}$$

adică trebuie să avem: $\alpha \neq \beta$ și $\alpha \neq -2\beta$.

Apoi se găsește:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -[N^0_e (\beta^2-\alpha^2) - (\beta^2-\alpha\beta)(N^0_c + N^0_a)];\\ \Delta_2 &= -[N^0_c (\beta^2-\alpha^2) - (\beta^2-\alpha\beta)(N^0_a + N^0_e)];\\ \Delta_3 &= -[N^0_a (\beta^2-\alpha^2) - (\beta^2-\alpha\beta)(N^0_e + N^0_c)]. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Mai jos este dată rezolvarea completă a acestui caz.

Sistemul de bază cu barele gh, ig și ih înlocuite prin barele orizontale dispuse radial în a, c și e încărcat cu $X_1 = 1$ după direcția gh, este rezolvat pe cale grafică (fig. 381). Pentru ușurința urmăririi desenului, echilibrul fiecărui nod s-a desenat separat, după indicațiile date la metoda separării nodurilor, folosindu-se două plane de proiecție. Succesiunea nodurilor este: g, f, e, b, a. Se poate arăta ușor că înălțimea cupolei luată egală cu $\frac{3}{4}l$, unde l este latura exagonului de bază, nu influențează proiecțiile orizontale ale eforturilor din bare reprezentate în planul orizontal. Barele paralele cu planul orizontal au eforturile determinate în adevărata mărime în acest plan ($n_{af,1}$; $n_{ef,1}$; $n_{e,1}$; $n_{ab,1}$; $n_{a,1}$; $H_{a,1}$, iar reacțiunile verticale sînt reprezentate în adevărata mărime în planul vertical ($V_{f,1}$; $V_{b,1}$; $V_{a,1}$).

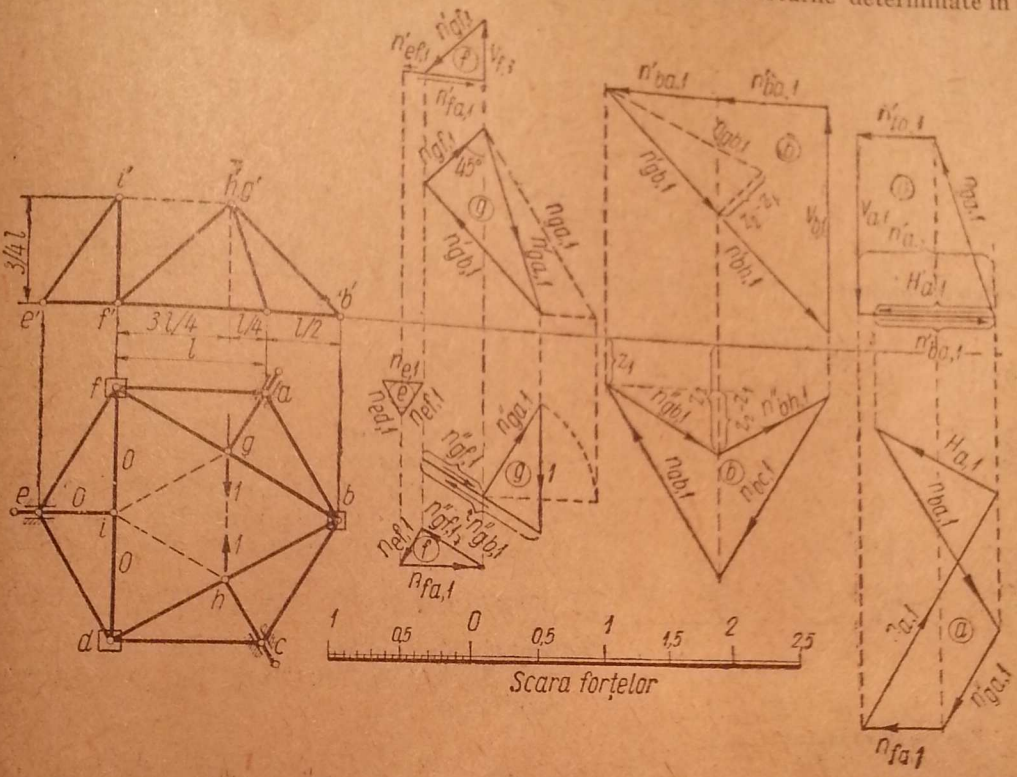


Fig. 381.

Eforturile în barele înclinate sînt reprezentate prin proiecțiile lor în cele două plane, orizontal și vertical. Adevărata lor mărime pe cale grafică se determină prin metodele cunoscute ale geometriei descriptive și proiective. Astfel, în fig. 381 efortul $n_{ga,1}$ în adevărată mărime este determinat prin rotația lui în jurul unei verticale pînă ajunge paralel cu planul vertical, și atunci proiecția pe acest plan îl reprezintă în adevărata mărime (nodul g). Altă cale este arătată tot în fig. 381, unde adevărata mărime a efortului $n_{gb,1}$ — în nodul b — este obținută prin utilizarea diferenței depărtărilor z_1 și z_2 ale capetelor sale.

În felul acesta se pot găsi pe cale grafică toate eforturile cu ajutorul scării forțelor din epură.

Ținînd seamă însă de forma exagonului regulat și a triunghiului echilateral f, b, d din proiecția orizontală a construcției se pot găsi și expresiile analitice ale eforturilor din bare, dacă se folosesc concomitent și poligoanele de forțe rezultate din echilibrul nodurilor. Este suficient să se găsească proiecțiile orizontale ale eforturilor din bare, deoarece în funcție de înălțimea cupolei se pot găsi unghiurile pe care le fac barele cu planul orizontal, și apoi, eforturile din barele respective.

Din proprietățile geometrice ale figurii și din echilibrul nodului g, la încărcarea $X_1 = 1$ în nodurile g și h reprezentate în cele două plane (fig. 381), rezultă:

$$\left| n''_{gf,1} \right| = \frac{1}{2} \left| n''_{gb,1} \right| \tag{6.18}$$

și apoi cu ușurință se deduce:

$$n''_{gb,1} = -1; \quad n''_{gf,1} = -\frac{1}{2}; \quad n''_{ga,1} = +\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad n_{fa,1} = +\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$n_{ef,1} = n_{e,1} = +\frac{1}{2\sqrt{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{6}; \quad n_{ba,1} = +\sqrt{3};$$

$$n_{a,1} = \frac{1}{2} n_{ba,1} + n''_{ga,1} + \frac{1}{2} n_{fa,1} = \frac{7\sqrt{3}}{6}. \tag{6.18}$$

Deci:

$$\alpha = n_{e,1} = n_{c,2} = n_{a,3} = +\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$\beta = n_{a,1} = n_{c,1} = n_{a,2} = n_{e,2} = n_{e,3} = n_{c,3} = +\frac{7\sqrt{3}}{6}, \tag{6.19}$$

astfel încît condiția de strictă nedeformabilitate geometrică este satisfăcută, obținînd:

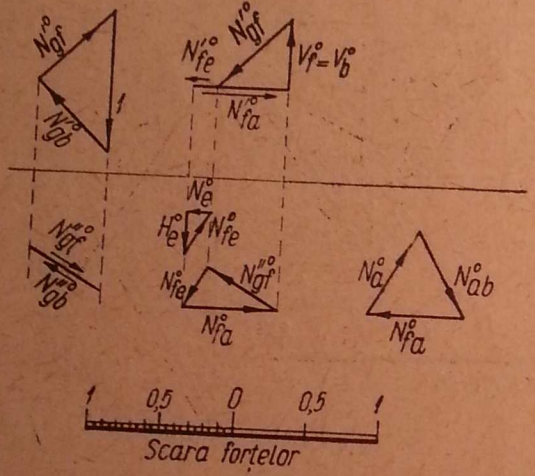


Fig. 382.

$$\Delta = (\alpha - \beta)^2 (\alpha + 2\beta) = \frac{15}{2}\sqrt{3} \neq 0. \tag{6.20}$$

Ca încărcare exterioară vom lua o forță verticală P aplicată în nodul g.

Fig. 382 arată eforturile sistemului de bază în cele două plane de proiecție (orizontal și vertical) date de încărcarea verticală $P = 1$, în g. Înălțimea grinzii a fost luată $\frac{3}{4} l$ (l = latura exagonului de bază).

În barele introduse pe sistemul de bază rezultă:

$$N_a^0 = \frac{2}{3} P; \quad N_e^0 = N_c^0 = \frac{1}{6} P \text{ și apoi:}$$

$$\Delta_1 = -[N_e^0 (\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^2 - \alpha\beta)(N_c^0 + N_a^0)] = +\frac{9}{4} P; \tag{6.21}$$

$$\Delta_2 = -[N_c^0 (\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^2 - \alpha\beta)(N_a^0 + N_e^0)] = +\frac{9}{4} P;$$

$$\Delta_3 = -[N_a^0 (\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^2 - \alpha\beta)(N_e^0 + N_c^0)] = -\frac{3}{2} P,$$

de unde rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sqrt{3}}{10} P; \quad X_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\sqrt{3}}{10} P;$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_3}{\Delta} = +\frac{\sqrt{3}}{15} P. \tag{6.22}$$

În tabela 7 sînt date eforturile în bare calculate pentru încărcarea verticală P în nodul g. În tabelă sînt calculate întîi proiecțiile orizontale ale eforturilor pentru o bară oarecare, notată, în general, cu jk, cu expresia:

$$N''_{jk} = N''^0_{jk} + X_1 n''_{jk,1} + X_2 n''_{jk,2} + X_3 n''_{jk,3}, \tag{6.23}$$

iar efortul real N_{jk} se obține din expresia :

$$N_{jk} = \frac{N''_{jk}}{\cos \gamma_{jk}}, \tag{6.24}$$

în care γ_{jk} este unghiul pe care-l face bara jk cu planul orizontal .Tabela conține coloana pentru $\operatorname{tg}\gamma_{jk}$ și $1/\cos_{jk}$.

În tabelă sînt trecute numai barele de pe jumătate din construcție, datorită simetriei sistemului și încărcării față de planul vertical care trece prin a, g, d. Completarea rubricilor tabelei s-a făcut pornind de la datele din epure (fig. 381 și 382) și ținînd seamă că :

$$n''_{gf,2} = n''_{gb,1} = -1\,;\; n''_{ga,2} = n''_{ga,1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; n_{af,2} = n_{ab,1} = \sqrt{3}\,;$$

$$n''_{if,2} = n''_{gb,1} = -1\,;\; n_{ef,2} = n_{ab,1} = \sqrt{3}\,;\; n''_{ei,2} = n''_{ga,1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

$$n''_{id,2} = n''_{fg,1} = -\frac{1}{2}\,;\; n_{ed,2} = n_{af,1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,;\; n_{a,2} = n_{a,1} = \frac{7\sqrt{3}}{6}\,;$$

$$n_{e,2} = n_{a,1} = \frac{7\sqrt{3}}{6}\,;\; H_{a,2} = -H_{a,1}\,;\; H_{e,2} = H_{a,1} = 1\,;$$

$$n''_{gf,3} = n''_{if,1} = 0\,;\; n''_{ga,3} = 0\,;\; n_{af,3} = n_{ef,1} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,;$$

$$n''_{if,3} = n''_{gf,1} = -\frac{1}{2}\,;\; n_{ef,3} = n_{af,1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,;\; n''_{ei,3} = n''_{ga,1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

$$n''_{id,3} = n''_{gb,1} = -1\,;\; n_{ed,3} = n_{ab,1} = \sqrt{3}\,;\; n_{a,3} = n_{e,1} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,;$$

$$n_{e,3} = n_{a,1} = \frac{7\sqrt{3}}{6}\,;\; H_{a,3} = 0\,;\; H_{e,3} = -H_{a,1} = -1.$$

Pentru reacțiunile verticale din reazeme, în tabelă ar trebui introduse proiecțiile pe planul vertical, dar ele pot fi deduse direct din eforturile în bare găsite mai sus, astfel :

$$V_a = -N_{ga}\sin\gamma_{ga} = -N''_{ga}\operatorname{tg}\gamma_{ga} = +\frac{3}{10}P\cdot\frac{3}{2} = +\frac{9}{20}P = 0{,}450\,P\,;$$

$$V_e = -N''_{ei}\operatorname{tg}\cdot\gamma_{ei} = +\frac{1}{20}P\cdot\frac{3}{2} = +\frac{3}{40}P = 0{,}075\,P\,;$$

$$V_d = -N''_{id}\operatorname{tg}\gamma_{id} - N''_{dh}\operatorname{tg}\gamma_{dh} = -2N''_{id}\operatorname{tg}\gamma_{id} =$$

$$= +2\frac{\sqrt{3}}{60}P\frac{\sqrt{3}}{2} = +\frac{1}{20}P = +0{,}050\,P\,;$$

$$V_f = -N''_{gf}\operatorname{tg}\gamma_{fg} - N''_{if}\operatorname{tg}\gamma_{if} = +\frac{11\sqrt{3}}{60}P\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{15}P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = +\frac{7}{40}P = +0{,}175\,P.$$

Ca verificare trebuie să fie satisfăcută ecuația generală de proiecție pe verticală :

$$V_a + V_d + (V_f + V_b) + (V_e + V_c) - P = 0,$$

unde : $V_f = V_b$ și $V_e = V_c$. Ecuația este satisfăcută, deoarece :

$$0{,}450\,P + 0{,}050\,P + 2\cdot 0{,}175\,P + 2\cdot 0{,}075\,P - P = 0$$

Tabe

Bara ik	N^{0}_{jk}	$n_{jk,1}$	$n_{jk,2}$	$n_{jk,3}$	$X_1 = -\frac{\sqrt{3}}{10}P$	$X_2 = -\frac{\sqrt{3}}{10}P$
					$X_1 n_{jk,1}$	$X_2 n_{jk,2}$
gf	$-\frac{1}{\sqrt{3}}P$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$+\frac{\sqrt{3}}{20}P$	$+\frac{\sqrt{3}}{10}P$
ga	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3}{20}P$	$-\frac{3}{20}P$
af	$\frac{2}{3}P$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{1}{10}P$	$-\frac{3}{10}P$
if	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{3}}{10}P$
ef	$\frac{1}{3}P$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{20}P$	$-\frac{3}{10}P$
ei	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3}{20}P$
id	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$+\frac{\sqrt{3}}{20}P$
ed	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{20}P$	$-\frac{1}{10}P$
ig	0	0	1	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{10}P$
ih	0	0	0	1	0	0
$a-$	$\frac{2}{3}P$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{7}{20}P$	$-\frac{7}{20}P$
$e-$	$\frac{1}{6}P$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{1}{20}P$	$-\frac{7}{20}P$
H_a	0	1	-1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{10}P$	$+\frac{\sqrt{3}}{10}P$
H_e	$\frac{\sqrt{3}}{6}P$	0	1	-1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{10}P$

la 7

$X_3 = -\frac{\sqrt{3}}{15} P$				
$X_3 n_{jk,3}$	N''_{jk}	$\operatorname{tg} \gamma_{jk}$	$\frac{1}{\cos \gamma_{jk}}$	$N_{jk} = \frac{N''_{jk}}{\cos \gamma_{jk}}$
0	$-\frac{11\sqrt{3}}{60} P$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$-\frac{11\sqrt{21}}{120} P = -0{,}42\,P$
0	$-\frac{3}{10} P$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{13}}{20} P = -0{,}54\,P$
$+\frac{1}{30} P$	$+\frac{3}{10} P$	–	1	$0{,}3\,P$
$-\frac{\sqrt{3}}{30} P$	$+\frac{\sqrt{3}}{15} P$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$+\frac{\sqrt{21}}{30} P = +0{,}153\,P$
$+\frac{1}{15} P$	$+\frac{1}{20} P$	–	1	$0{,}05\,P$
$+\frac{1}{10} P$	$-\frac{1}{20} P$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{\sqrt{13}}{40} P = -0{,}0903\,P$
$-\frac{\sqrt{3}}{15} P$	$-\frac{\sqrt{3}}{60} P$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$-\frac{\sqrt{21}}{120} P = -0{,}0382\,P$
$+\frac{1}{5} P$	$+\frac{1}{20} P$	–	1	$+0{,}05\,P$
0	$-\frac{\sqrt{3}}{10} P$	–	1	$-\frac{\sqrt{3}}{10} P = -0{,}173\,P$
$+\frac{\sqrt{3}}{15} P$	$+\frac{\sqrt{3}}{15} P$	–	1	$+\frac{\sqrt{3}}{15} P = +0{,}1155\,P$
$+\frac{1}{30} P$	0	–	–	0
$+\frac{7}{30} P$	0	–	–	0
0	0	–	–	0
$-\frac{\sqrt{3}}{15} P$	0	–	–	0

Din eforturile și reacțiunile pentru încărcarea cu sarcina verticală P în nodul g se pot găsi, prin suprapunerea efectelor, eforturile în bare din încărcarea cu sarcini verticale egale cu P în toate cele trei noduri g, h și i (fig. 383), obținîndu-se rezultatele:

$$N_{ga} = N_{hc} = N_{ei} = N_{ga.g} + N_{hc.g} + N_{ei.g} = -\frac{3\sqrt{13}}{20}P - \frac{2\sqrt{13}}{40}P =$$

$$= -\frac{\sqrt{13}}{5}P = -0.721\ P;$$

$$N_{gf} = N_{gb} = N_{if} = N_{id} = N_{hd} = N_{hb} = N_{gf.g} + N_{if.g} + N_{id.g} =$$

$$= -\frac{11\sqrt{21}}{120}P + \frac{\sqrt{21}}{30}P - \frac{\sqrt{21}}{120}P =$$

$$= -\frac{2\sqrt{21}}{30}P = -0{,}305\ P;$$

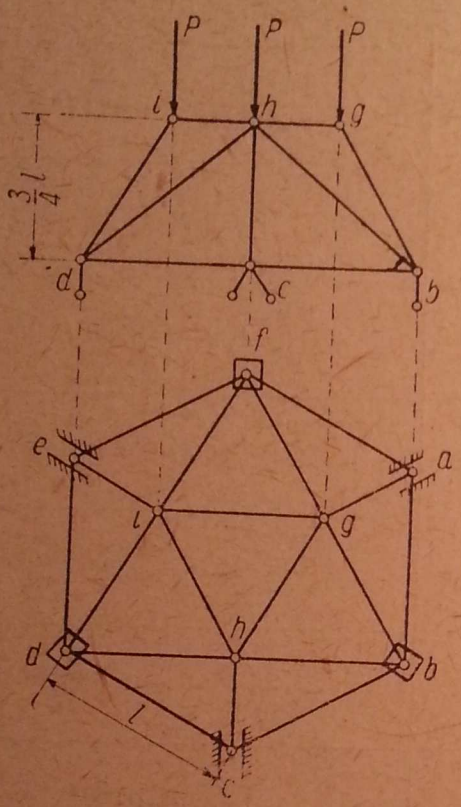


Fig. 383.

$$N_{gi} = N_{gh} = N_{ih} = 2N_{gi.g} + N_{ih.g} = -\frac{2\sqrt{3}}{10}P +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{15}P = -\frac{2\sqrt{3}}{15}P = -0{,}231\ P;$$

$$N_{af} = N_{ab} = N_{fe} = N_{ed} = N_{dc} = N_{cb} = N_{af.g} + N_{gf.g} + N_{ed.g} =$$

$$= \frac{3}{10}P + 2\cdot\frac{1}{20}P = \frac{4}{10}P = 0{,}4\ P;$$

$$V_a = V_e = V_c = V_{a.g} + 2V_{e.g} = +0{,}450\ P +$$

$$+ 2\cdot 0{,}075\ P = 0{,}6\ P;$$

$$V_f = V_d = V_b = 2V_{f.g} + V_{d.g} = 2\cdot 0{,}175\ P +$$

$$+ 0{,}050\ P = 0{,}4\ P;$$

$$H_a = H_e = H_c = 0.$$

Pentru verificare se pot folosi relațiile:

$$V_a = -N_{ga}\sin\gamma_{ga} \text{ și } V_f = -2N_{gf}\sin\gamma_{gf}.$$

Avem: $\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\gamma$ și din tabelă se obține:

$$\sin\gamma_{ga} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \sin\gamma_{gf} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{21}}.$$

Apoi:

$$V_a = \frac{\sqrt{13}}{5}P\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{5}P = 0{,}6\ P;$$

$$V_f = 2\cdot\frac{2\sqrt{21}}{30}P\cdot\frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{4}{10}P = 0{,}4\ P.$$

Prin metodele generale date în acest capitol (metoda separării nodurilor, metoda secțiunilor, metoda înlocuirii barelor) se poate rezolva orice grindă cu zăbrele static determinată, dar varietatea formelor grinzilor cu zăbrele în spațiu face ca pentru anumite forme particulare să căutăm și alte metode particulare care să ducă repede la rezultate.

§ 42. FORME CRITICE

Condiția de nedeformabilitate geometrică (6.3) sub forma relației $b + r = 3n$ este necesară fără a fi suficientă.

La fel ca în plan, trebuie ca pe lîngă verificarea relației între numărul de bare, reazeme și noduri să se verifice daçă este asigurată și condiția de strictă nedeformabilitate geometrică, sau, cu alte cuvinte, să se verifice dacă sistemul de bare care respectă condiția (6.3) nu este o formă critică.

Din punctul de vedere al deformațiilor, formele critice se caracterizează prin faptul că la o variație foarte mică în lungimile barelor, provenită din jocurile în articulații, erori de montaj, sau deformații elastice axiale datorite eforturilor, corespund deplasări foarte mari ale nodurilor.

Din punct de vedere static, la formele critice, exprimarea condițiilor de echilibru în starea nedeformată duce la valori infinite ale eforturilor pentru o încărcare oarecare, sau la valori nedeterminate pentru anumite încărcări particulare, adică determinantul principal al sistemului de ecuații pentru calculul eforturilor este nul.

Dacă grinda cu zăbrele are n noduri, atunci în cazul cel mai general vom avea un sistem de $3n$ ecuații, pentru determinarea eforturilor și a reacțiunilor provenind din separarea fiecărui nod.

Condiția teoretică cea mai generală de strictă nedeformabilitate a unei grinzi cu zăbrele static determinată în spațiu va fi dată de inegalitatea :

$$\Delta_{3n} \neq 0, \tag{6.25}$$

în care Δ_{3n} este determinantul principal al sistemului de $3n$ ecuații. Sub această formă este dificil de aplicat condiția de strictă nedeformabilitate, deoarece se evită, în general, determinarea eforturilor prin sistemul celor $3n$ ecuații.

Plecînd de la condiția (6.25), se poate găsi o metodă particulară numită *metoda sarcinii zero*, care se poate aplica cu bune rezultate în multe cazuri. Se ajunge la această metodă prin considerente analoge cu cele de la sistemele plane.

În adevăr, dacă sistemul nu constituie o formă critică ($\Delta_{3n} \neq 0$), înseamnă că pentru orice încărcare în noduri vom avea soluții bine determinate și unice față de încărcările respective.

Dacă nu se aplică nici o forță în noduri (adică, dacă se aplică niște sarcini nule) înseamnă că toți termenii liberi în sistemul celor $3n$ ecuații vor fi nuli și, deci, toate necunoscutele sistemului de ecuații — eforturile în bare și reacțiunile — vor fi nule.

Plecînd de la această observație se ajunge la concluzia că dacă, indiferent pe ce cale, vom reuși să ne asigurăm că pentru sarcini nule în noduri, eforturile în bare sînt nule în mod cert, fără posibilitatea altei soluții, atunci rezultă că grinda respectă condiția de strictă nedeformabilitate (nu este o formă critică).

Dar dacă pentru sarcini nule în toate nodurile se pot găsi și eforturi diferite de zero în bare, aceasta constituie dovada că grinda este o formă critică.

Într-adevăr, din sistemul celor $3n$ ecuații efortul într-o bară i este :

$$X_i = -\frac{\Delta_i}{\Delta_{3n}}, \tag{6.26}$$

în care Δ_i este determinatul care se obține din Δ_{3n} prin înlocuirea coloanei i cu termenii liberi ai sistemului de ecuații. Dacă toate sarcinile exterioare din noduri sînt nule, toți termenii liberi sînt nuli și $\Delta_i = 0$.

În acest caz, dacă avem $X_i = 0$ ca soluție unică. rezultă neapărat din (6.26) că $\Delta_{3n} \neq 0$.

Dacă însă pentru încărcări nule în noduri, adică pentru $\Delta_i = 0$, există soluții în care $X_i \neq 0$, înseamnă că relația (6.26) este o expresie nedeterminată de forma

$$X_i = -\frac{0}{0} \neq 0.$$

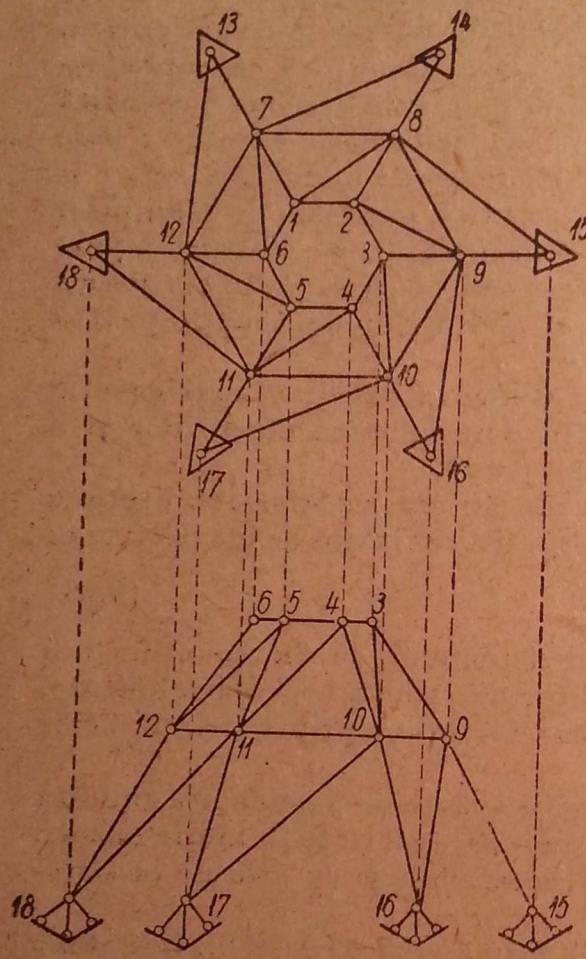


Fig. 384.

Deci, în acest caz $\Delta_{3n} = 0$, care este condiția ca grinda cu zăbrele să constituie o formă critică.

Metoda sarcinii zero este folosită curent în spațiu pentru verificarea strictei nedeformabilități. Succesul ei depinde de posibilitatea de a găsi prin anumite căi particulare concluzii certe asupra eforturilor în bare prin aplicarea sarcinilor nule în noduri fără să se folosească sistemul celor $3n$ ecuații.

De la determinarea eforturilor în bare prin separarea nodurilor avem următoarele două cazuri evidente cînd știm cu siguranță că eforturile în anumite bare sînt nule la o sarcină nulă în nod:

a) dacă într-un nod sînt numai trei bare, care nu se găsesc în același plan, pentru o sarcină nulă în nod eforturile în cele trei bare sînt nule;

b) dacă într-un nod sînt mai multe bare, astfel încît, cu excepția uneia singure, toate celelalte se găsesc într-un plan, atunci pentru o sarcină nulă în nod, efortul din bara care nu este cuprinsă în planul celorlalte este nul.

Aceste observații permit verificarea strictei nedeformabilități într-o serie de cazuri practice.

Cupola din fig. 384 respectă condiția (6.3) ($b + r = 3n$), deoarece: $n=18$; $b=36$; $r=3\cdot 6=18$. Stricta nedeformabilitate se verifică ușor cu ajutorul sarcinii zero. În nodul *1* sînt patru bare dintre care trei (*1—2*, *1—8* și *1—7*) se găsesc în același plan, astfel că pentru o sarcină nulă în nod, efortul în bara *1—6* este nul. Aplicînd sarcini nule în celelalte noduri ale inelului superior (nodurile *2*, *3*, *4*, *5*, *6*), din aceleași motive se obțin eforturi nule în toate barele acestui inel. Revenind acum la nodul *1*, se observă că au rămas numai două bare (*1—7* și *1—8*), și pentru o sarcină nulă în nod, eforturile în aceste bare sînt, de asemenea, nule. Concluzii identice tragem și pentru barele analoge din nodurile *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. În felul acesta s-a obținut soluția unică a eforturilor nule în toate barele etajului superior la încărcarea

cu sarcina zero. Cu acest rezultat putem trece acum la etajul inferior și, aplicînd sarcina zero în nodurile 7, 8, 9, 10, 11, 12, se obțin eforturi nule în toate barele etajului inferior. Am ajuns astfel cu încărcări nule în punctele de reazem 13, 14, . . . , 18. Acestea sînt reazemele triple (articulații complete), adică identice cu nodurile alcătuite din trei bare ce nu se găsesc în același plan, astfel că pentru sarcini zero rezultă reacțiuni nule.

Deci, cupola din fig. 384, nu este o formă critică.

Cupola din fig. 385 diferă de cupola din fig. 384 numai prin faptul că reazemele triple au fost înlocuite cu reazeme duble, în schimb s-au adăugat șase bare ce alcătuiesc inelul inferior 13—14—15—16—17—18. Și acest sistem respectă condiția generală de nedeformabilitate geometrică (6.3): ($n = 18$; $b = 42$; $r = 12$).

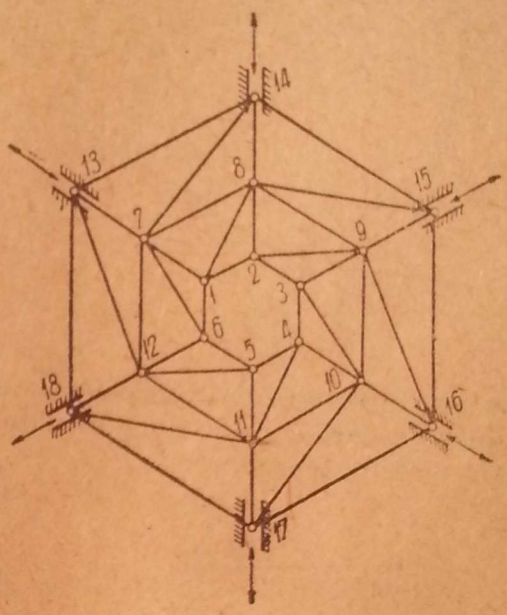


Fig. 385.

Verificarea strictei nedeformabilități cu ajutorul sarcinii zero se face exact ca în cazul precedent, dar concluzia este diferită. În adevăr, se aplică sarcina zero întîi în nodurile inelului superior (1,...,6) și apoi, în nodurile inelului mijlociu (7,...,12); se obțin eforturi nule în toate barele ce pornesc din aceste noduri. Aplicînd apoi sarcina zero în nodurile inelului (13,...,18), situația este diferită de cea din fig. 384. În adevăr, fiecare nod al acestui inel are patru bare ce se găsesc în două plane. Astfel, nodul 13 are două bare 13—14 și 13—18 în planul orizontal și două bare care constituie reazemul dublu; aceste bare nu sînt arătate explicit în figură, dar se știe că trebuie să se găsească în planul vertical perpendicular pe direcția care reprezintă posibilitatea de mișcare a reazemului 13, așa cum este indicată de săgeata paralelă cu cele două glisiere ale acestui reazem.

Aplicarea sarcinii zero într-un asemenea nod nu mai conduce la concluzii certe, și verificarea strictei nedeformabilități se va continua pe altă cale. Se observă că din modul cum este legat de teren inelul inferior (13,...,18), o eventuală mobilitate a nodurilor n-ar putea avea loc decît în direcțiile indicate de săgețile din fiecare reazem, deoarece toate se găsesc în același plan orizontal. Deci, verificarea strictei nedeformabilități în acest caz devine o problemă plană. Problema constă în a verifica dacă un poligon plan articulat la noduri în care fiecare nod are o singură direcție determinată pe care s-ar putea deplasa este sau nu o formă critică (fig. 386). Aceasta se verifică foarte ușor cu ajutorul diagramelor vitezelor, așa cum s-a procedat la sistemele articulate în plan.

Din fiecare nod se duce perpendiculara pe direcția de mișcare a nodului respectiv. Apoi se începe construcția luînd pentru nodul a punctul său rabătut a', iar prin paralela din a' la ab se găsește b', și așa mai departe, punctele rabătute c', d', e', f'. Se unește apoi f' cu a'. Dacă $a'f'$ este paralelă cu af, avem o formă critică, pe cînd dacă $a'f'$ nu este paralelă cu af, sistemul este strict nedeformabil.

În baza acestei concluzii rezultă că dacă baza cupolei este un poligon regulat cu un număr par de laturi, iar direcțiile pe care se pot deplasa reazemele sînt radiale ca în fig. 387, forma este critică, pe cînd dacă poligonul regulat are un număr impar de laturi, forma este strict nedeformabilă, chiar pentru direcțiile de deplasare radiale ale reazemelor (fig. 388), deoarece ultima latură $a'e'$ nu poate fi paralelă cu latura ae.

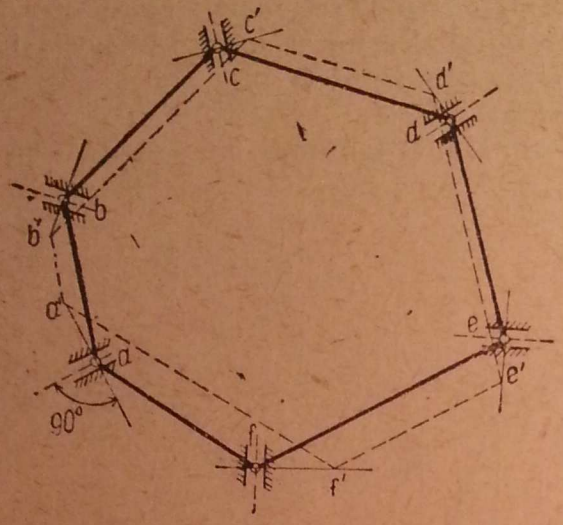


Fig. 386.

De aici rezultă că în realizarea practică a cupolelor din bare articulate, care au la bază un poligon regulat, trebuie să se dea o atenție specială pentru a evita formele critice, așa cum a rezultat din analiza de mai sus. În cazul poligonanelor regulate cu un număr par de laturi, care au reazeme duble cu libertate de deplasare radială, trebuie să se introducă o legătură suplimentară într-unul dintre reazeme, astfel, încît acesta să devină fix, pentru a obține o formă strict nedeformabilă. În acest caz, însă, sistemul devine static nedeterminat.

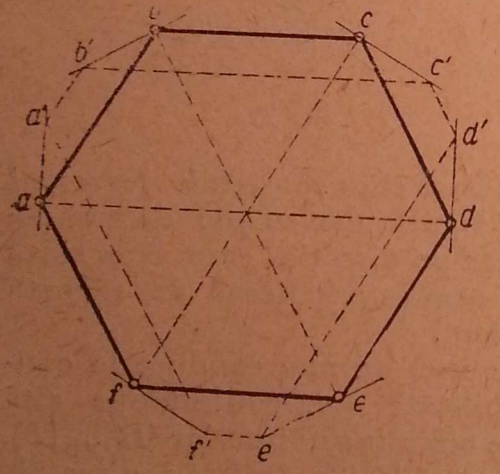


Fig. 387.

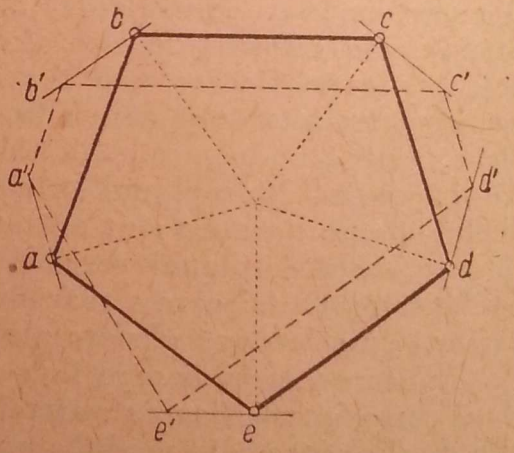


Fig. 388.

Metoda sarcinii zero poate da rezultate și în alte situații decît cele analizate, dacă se ține seamă de particularitățile construcției. Un exemplu în acest sens îl constituie aplicația 88.

§ 43. METODE PARTICULARE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN BARE

Calculul static al unui sistem de bare static determinat supus la o încărcare oarecare duce la rezolvarea unui sistem liniar de ecuații, în care numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații date de condițiile corespunzătoare de echilibru static.

Dacă determinantul principal al sistemului de ecuații este diferit de zero ($\Delta \neq 0$), adică dacă sistemul de bare nu este o formă critică, soluțiile sistemului de ecuații sînt bine determinate și unice pentru o încărcare dată.

În consecință, după ce s-a constatat că sistemul de bare este static determinat și nu constituie o formă critică, este suficient să se obțină — indiferent prin ce mijloc — un sistem de eforturi, care să satisfacă toate condițiile de echilibru ; acel sistem de eforturi este unica soluție a problemei.

De aceea, la grinzile cu zăbrele în spațiu este uneori util ca, ținînd seamă de particularitățile structurii, să se caute metode particulare de rezolvare care să ducă la rezultat mai repede decît metodele generale — separarea nodurilor, metoda secțiunilor și a înlocuirii barelor — cu atît mai mult cu cît la construcțiile cu mai multe noduri, adeseori ar trebui să se folosească metoda înlocuirii barelor, care necesită calcule lungi.

În adevăr, numărul mediu de bare b_1 care pleacă dintr-un nod se poate obține din relația $b = 3n - r$, dacă se ține seamă că o bară leagă două noduri, prin împărțirea numărului de bare cu jumătate din numărul de noduri :

$$b_1 = \frac{3n - r}{n/2} = 6 - \frac{2r}{n}. \tag{6.27}$$

Se observă că b_1 se apropie de 6 cu cît numărul de noduri n este mai mare. Pentru $r = 6$, rezultă :

$$b_1 = 6 - \frac{12}{n}, \tag{6.27'}$$

de exemplu : la un număr mijlociu de noduri $n = 30$, avem :
$b_1 = 5{,}6$, deci în medie dintr-un nod vor pleca 5,6 bare.

În aceste condiții este greu să se găsească noduri în care să apară succesiv numai cîte trei eforturi necunoscute, pentru aplicarea metodei separării nodurilor.

Mai rare sînt cazurile cînd printr-o secțiune completă se pot tăia numai șase bare în condițiile aplicării metodei secțiunilor.

Aplicarea metodelor generale ar necesita astfel deseori folosirea metodei înlocuirii barelor.

Sînt însă unele construcții spațiale articulate cu forme particulare, dar răspîndite în practică, care se pretează la aplicarea unor căi adecvate de rezolvare.

A. METODA DESCOMPUNERIII SISTEMULUI SPAȚIAL ÎN MAI MULTE SISTEME PLANE

Grinzile cu zăbrele provenite din formele poliedrice au particularitatea că fețele lor sînt alcătuite din grinzi cu zăbrele plane. Dacă o sarcină se aplică în planul unei asemenea fețe, și grinda cu zăbrele plană care constituie această față are sistemul de rezemare în planul ei, atunci sarcina respectivă va provoca eforturi numai în barele acestei grinzi cu zăbrele plane și reacțiuni în reazemele respective. Avem astfel de-a face cu o problemă plană mult mai ușor de rezolvat. Această soluție este compatibilă cu toate condițiile de echilibru ale grinzii cu zăbrele în spațiu și constituie deci soluția problemei.

La sistemele provenite din formele poliedrice, fețele alcătuite din grinzi cu zăbrele plane se leagă prin muchii. În fig. 389, *a* este reprezentată o astfel de construcție a cărei strictă nedeformabilitate se verifică cu sarcina zero. Dacă într-un nod — de exemplu, nodul *6* — al unei asemenea muchii se aplică o sarcină oarecare *P*, aceasta se poate descompune în trei componente: componenta *P'*, după direcția muchiei *6—16*, o componentă *P''*, care se găsește în planul *1—5—20—16*, și o componentă *P'''*, care se găsește în planul *1—2—17—16*. Cele două componente *P''* și *P'''* pot avea direcții arbitrare în planele respective, deoarece soluția finală pentru eforturi fiind unică, nu

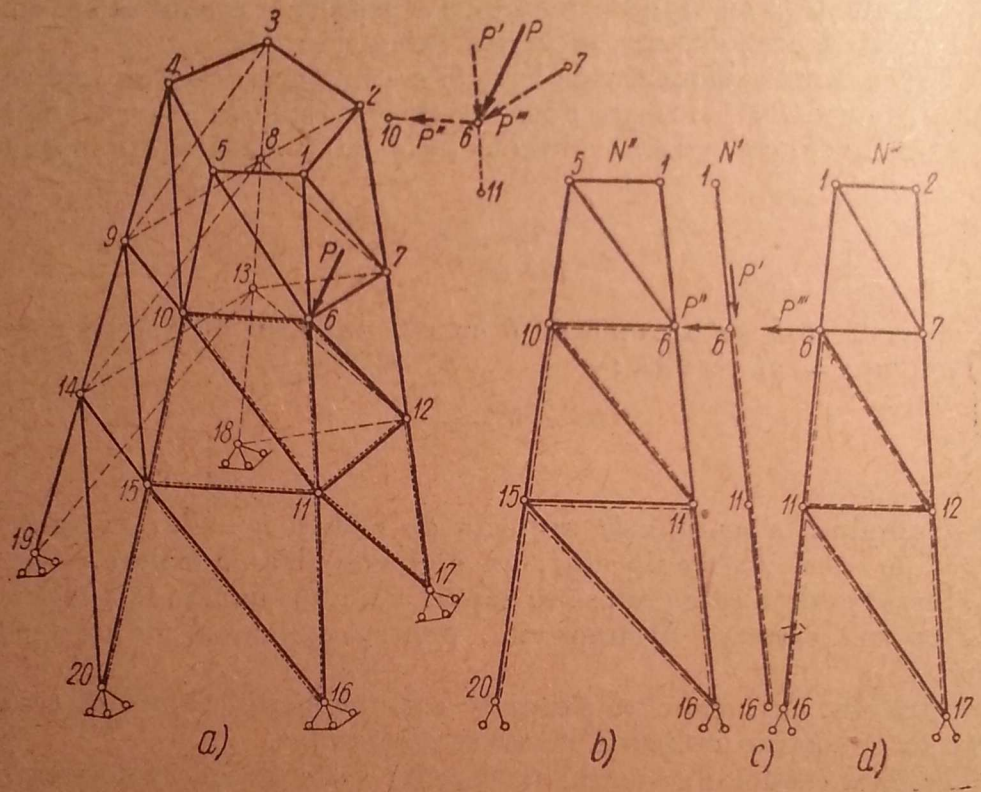


Fig. 389.

este influențată de modul cum se descompune forța *P* în componente, care să aibă același punct de aplicație.

În figură s-au luat direcțiile *6—10* pentru *P''* și *6—7* pentru *P'''*.

Componenta *P'* produce eforturi numai în barele *6—11* și *11—16*, transmițîndu-se prin intermediul acestora direct în reazemul *16* (fig. 389, *c*). Rezultă :

$$N'_{6-11} = N_{11-16} = -P'.$$

Componenta *P''* produce eforturi *N''* numai în barele grinzii cu zăbrele plane care constituie fața *1—5—20—16* reprezentată în fig 389, *b*, unde sînt dublate prin linii punctate barele în care sarcina *P''* produce eforturi.

Componenta *P'''* produce eforturi *N'''* numai în barele grinzii cu zăbrele plane *1—2—17—16* ; în fig. 389, *d* sînt dublate barele active corespunzătoare.

Pe baza suprapunerii efectelor (independența acțiunilor), efortul într-o bară oarecare *ij* se obține din însumarea eforturilor în aceeași bară produse

de fiecare dintre cele trei încărcări P', P'', P''' aplicate construcțiilor plane din fig. 389, *b*, *c*, *d*:

$$N_{ij} = N'_{ij} + N''_{ij} + N'''_{ij}.$$

În fig. 389, *a* prin linii întrerupte subțiri sînt dublate barele active în cazul sarcinii P aplicate în nodul 6. Astfel:

$$N_{16} = 0;\ N_{6-11} = N'_{6-11} + N''_{6-11};\ N_{6-7} = 0;\ N_{6-10} = N''_{6-10};$$
$$N_{11-16} = N'_{11-16} + N''_{11-16} + N'''_{11-16};\quad N_{6-12} = N'''_{6-12};\ \text{etc.}$$

În cazul cînd grinzile cu zăbrele plane care constituie fețele poliedrului nu au reazemele direct în planul lor, sau cînd aceste fețe se reazemă, la rîndul lor, pe alte fețe care nu mai sînt în același plan, operația de descompunere a forțelor din noduri în componente, care să acționeze în planele fețelor poliedrului, începe la fel ca în cazul precedent, dar trebuie apoi repetată de mai multe ori.

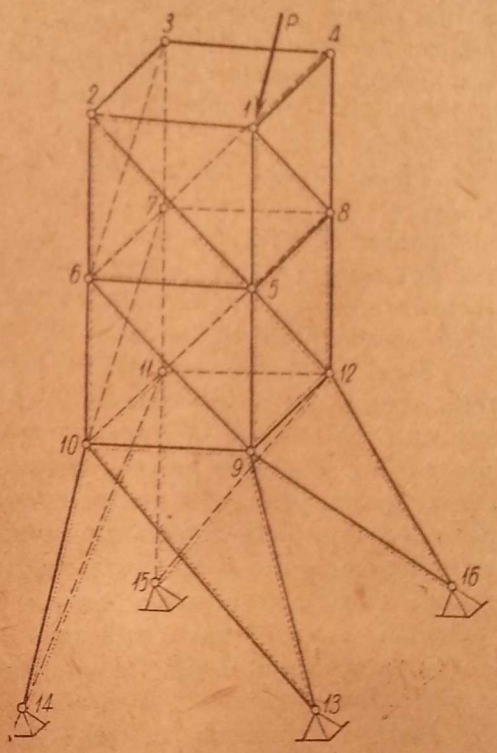


Fig. 390.

În exemplul din fig. 390 după ce se verifică stricta nedeformabilitate cu sarcina zero, se descompune sarcina P de direcție oarecare aplicată în nodul *1*, în trei componente, după direcțiile *1 — 5*, *1 — 2* și *1 — 4*. Dacă se consideră nodurile *9*, *10*, *11*, *12* ca reazeme triple ale părții de deasupra, componenta după direcția *1—5* produce eforturi în barele *1—5* și *5—9*, componenta după direcția *1—4* produce eforturi în barele *1 — 8*, *1—5*, *5—8*, *8—12*, *5—12* și *5—9*, iar componenta după direcția *1—2* produce eforturi în barele *1 — 2*, *2 — 5*, *2—6*, *5 — 6*, *6 — 10*, *6 — 9* și *5 — 9*. Toate aceste eforturi se obțin prin metodele grinzilor cu zăbrele plane.

Eforturile în barele etajului inferior *9—10—11—12—13—14—15—16* se determină aplicînd în nodurile *9*, *10*, *11* și *12* ale acestui etaj sarcinile care provin din eforturile determinate ale barelor etajului de deasupra.

Astfel, în nodul *9* rezultanta eforturilor din barele *5—9* și *6—9* o descompunem în trei componente după barele *9—13*, *9—10* și *9—12*. La fel, în nodul *10* efortul din bara *6—10* se descompune după direcțiile *10—14*, *10—9* și *10—11*, iar în nodul *12* rezultanta eforturilor din barele *8—12* și *5—12* se descompune după direcțiile *12—9*, *12—16* și *12—11*.

Grinda cu zăbrele plană *9—10—13—14* va fi supusă la sarcinile din planul ei, aplicate în nodurile *9* și *10*, și se calculează astfel în plan. La fel se obțin eforturile în grinzile cu zăbrele plane ale celorlalte fețe care alcătuiesc etajul inferior. Apoi, prin însumarea efectelor se obțin eforturile finale în toate barele. În fig. 390 sînt reprezentate cu linii duble barele active pentru sarcina P din nodul *1*. Se observă că bara *11—12* este inactivă, ceea ce se verifică ușor din echilibrul nodului *11*. În nodul *11* sînt șase bare,

dar barele *11—7* și *11—8* nu au eforturi pentru încărcări pe muchia *1—5—9*. Trei dintre cele patru bare care rămîn în nodul *11* (barele *11—10*, *11—14* și *11—15*) sînt într-un plan, iar bara *11—12* nu este cuprinsă în planul lor. Dacă nu se aplică o sarcină în nodul *11*, bara *11—12* nu are efort.

B. CALCULUL EFORTURILOR ÎN SISTEMELE NUMITE „BICONSTRUCȚII"[1])

Prin „biconstrucție" se înțelege un sistem spațial compus din două grinzi plane, geometric nedeformabile în planul lor și solidarizate printr-un sistem de bare articulate (contravîntuiri), astfel ca în ansamblu să rezulte un sistem geometric nedeformabil în spațiu.

Se vor studia acum biconstrucțiile în care cele două grinzi plane sînt paralele.

Dacă fiecare dintre cele două grinzi plane are numărul de legături necesar față de teren, orice sarcină care se aplică în planul uneia dintre ele provoacă eforturi numai în grinda plană respectivă. Grinzile plane nu pot suporta însă sarcini normale pe planul lor. Pentru aceste sarcini trebuie să intre în acțiune sistemul spațial compus din ansamblul celor două grinzi plane și sistemul de contravîntuiri.

Dacă o sarcină normală pe grinzile plane se aplică într-un nod al acesteia, atunci din acel nod trebuie să pornească o bară de legătură care să fie capabilă că lucreze la forțe normale. În cele ce urmează, nodurile contravîntuirilor se găsesc pe cele două grinzi plane, iar sarcinile se aplică tot pe aceste grinzi plane. În aceste condiții, orice sarcini aplicate într-un nod se pot descompune în două componente, dintre care una este normală pe planul grinzii principale, și alta este cuprinsă în planul ei. Componenta din planul grinzii provoacă eforturi numai în grinda plană corespunzătoare, deci constituie o problemă plană care nu interesează aici. Se va analiza numai efectul componentei normale pe grinzile plane, deoarece numai pentru aceste sarcini „biconstrucția" lucrează spațial.

Pentru urmărirea metodei de calcul este util ca anumite proprietăți elementare ale poligoanelor de forțe să fie prezentate într-o formă corespunzătoare cu modul de conducere al calculului.

a) Proprietățile poligoanelor de forțe

Dacă avem un sistem de forțe $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ca în fig. 391, astfel încît extremitatea uneia să constituie originea forței următoare, adică dacă se consideră un poligon de forțe $F_1, F_2, \ldots, F_n$, rezultanta lor este reprezentată de un vector paralel cu coarda AB. Presupunînd că în epură forțele sînt reprezentate la o anumită scară, astfel încît unitatea de lungime din epură să reprezinte q unități de forță, rezultă $F_i = q \cdot l_i$, unde q se măsoară în kg/m.

La fel: $R = q \cdot a_{AB}$, unde a_{AB} este lungimea coardei AB; q se numește intensitatea poligonului de forțe AB.

---

[1]) După *A. A. Umanski*, „Sisteme spațiale", Moscova, 1948.

Din proiecțiile pe cele două axe rezultă :

$$R_x = -q \cdot a_x = q\,(x_B - x_A);$$
$$R_y = q \cdot a_y = q\,(y_B - y_A). \qquad (6.28)$$

Momentul unei forțe oarecare F_i în raport cu polul O este :

$$M_i = F_i \cdot r_i = q\,l_i \cdot r_i = q \cdot \Omega_i,$$

unde s-a notat : cu r_i — distanța de la polul O la forța F_i, și cu Ω_i — dublul suprafeței triunghiului cu baza l_i și înălțimea r_i.

Momentul rezultantei R este :

$$M = \sum M_i = q\,\Omega^O_{AB},$$

unde cu Ω^O_{AB} s-a notat dublul suprafeței sectorului poligonal cuprins între conturul frînt $A-B$ și polul O.

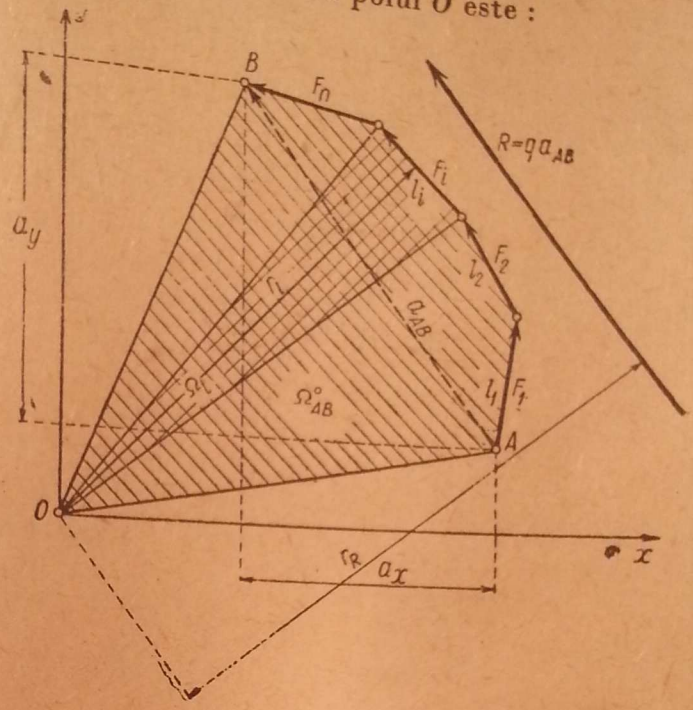


Fig. 391.

Dacă polul O se găsește pe coarda AB (fig. 392), atunci Ω^O_{AB} reprezintă dublul suprafeței cuprinse între conturul poligonal și coarda AB. În acest caz, indicele superior care arată polul O nu se mai scrie, și suprafața se notează simplu Ω_{AB}. Poziția rezultantei în fig. 391 se deduce din ecuația de momente în raport cu punctul O :

$$M = q\,\Omega^O_{AB} = q \cdot a_{AB} \cdot r_R,$$

de unde rezultă :

$$r_R = \frac{\Omega^O_{AB}}{a_{AB}}.$$

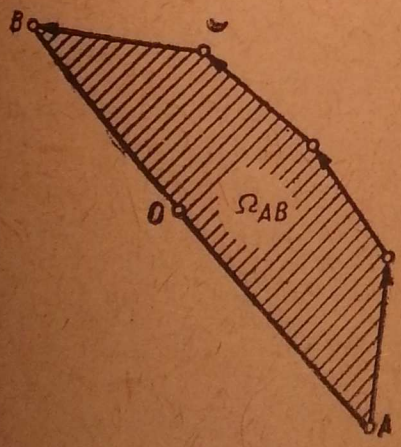


Fig. 392.

Determinarea pe cale grafică a poziției rezultantei se poate face prin compunerea succesivă a forțelor (fig. 393). Rezultanta parțială a forțelor F_1 și F_2 are direcția $A-2$ și trece prin punctul 1. Deci, din 1 se duce o paralelă la $A-2$. Rezultanta parțială $\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}$ are direcția $A-3$ și trece prin punctul $2'$ de intersecție al rezultantei parțiale $\overline{F_1}+\overline{F_2}$ care este paralela din 1 la $A-2$, cu F_3. Apoi din $2'$ se duce paralela la $A-3$ și la

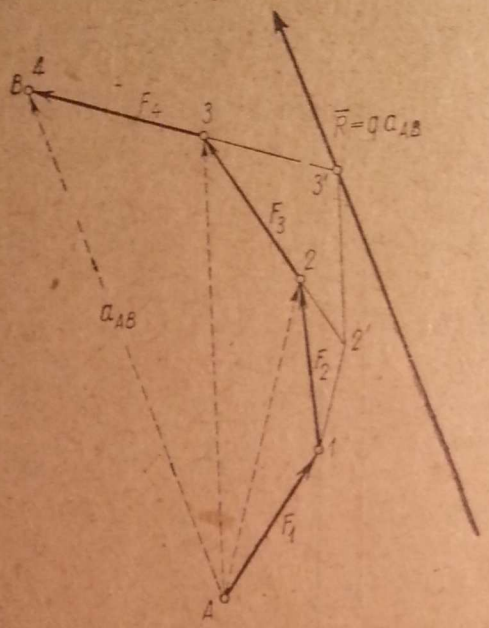


Fig. 393.

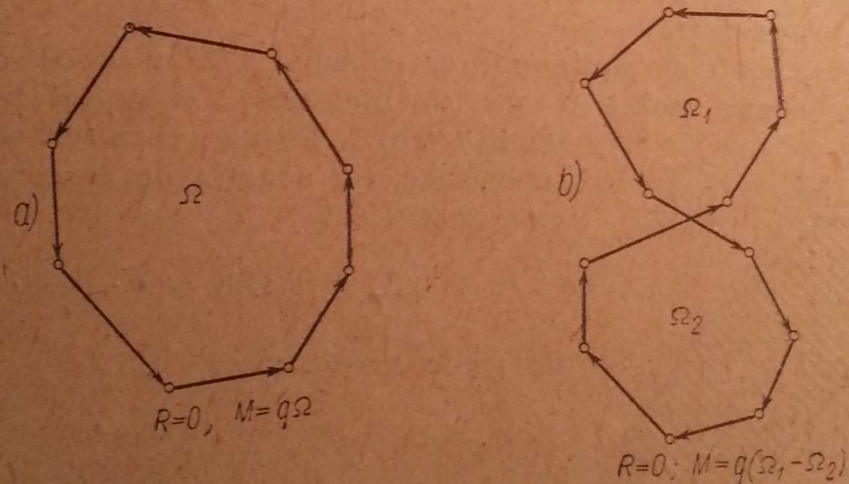


Fig. 394.

intersecția cu F_4 se găsește punctul $3'$, pe unde va trece rezultanta $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4}$.

În cazurile reprezentate în fig. 394 avem : pentru un poligon de forțe închis (fig. 394, *a*) $R = 0$, $M = q\,\Omega$, iar pentru un poligon de forțe închis în formă de opt (fig. 394, *b*), $R = 0$; $M = q\,(\Omega_1 - \Omega_2)$ și dacă $\Omega_1 = \Omega_2$, $M = 0$.

Dacă se consideră un poligon de forțe în spațiu, atunci în raport cu un punct oarecare, acesta se va reduce la un vector rezultant (forță) și la un vector moment rezultant.

Dacă se fac proiecțiile pe trei plane (fig. 395), proiecțiile forței rezultante sînt :

$$X = (x_B - x_A) \cdot q\,;$$

$$Y = (y_B - y_A) \cdot q\,;$$

$$Z = (z_B - z_A) \cdot q,$$

iar ale momentului rezultant sînt :

$$M_x = q\,\Omega_{yz}\,;\quad M_y = q \cdot \Omega_{zx}\,;$$

$$M_z = q \cdot \Omega_{xy}.$$

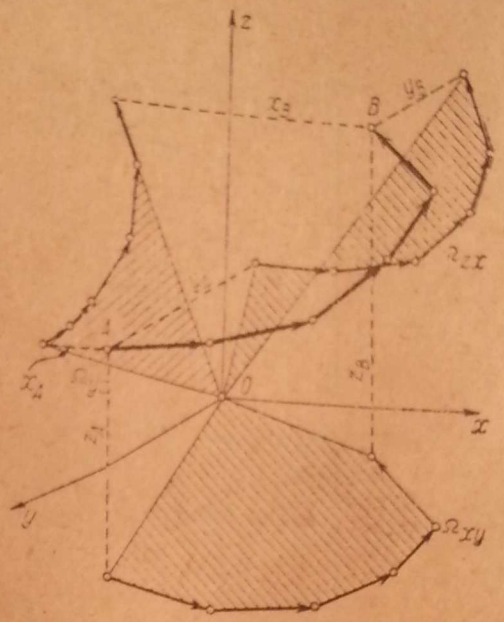


Fig. 395.

Cu aceste elemente se poate trece la expunerea metodei pentru determinarea eforturilor.

b) Eforturile în diagonalele contravîntuirilor și în grinzile plane principale

În fig. 396 este reprezentată în elevație și în plan o „biconstrucție" în care cele două grinzi plane sînt paralele cu planul vertical de proiecție *xoy*. Admițînd că grinda din față este transparentă, sistemul de contravîntuiri se vede în elevație. Nodurile contravîntuirilor cu grinda din față sînt reprezentate în elevație cu cerculețe goale, iar cele cu grinda din spate, prin cerculețe pline, negre. Contravîntuirile formează un sistem de bare continuu în spațiu, astfel că atît în elevație, cît și în plan proiecțiile respective formează linii poligonale continue.

Cele două grinzi plane paralele nu trebuie să fie neapărat grinzi cu zăbrele ; ele pot fi grinzi plane cu secțiuni pline, dar se presupune că nu au nici o rigiditate în direcția normală pe planul lor. Rigiditatea lor în această direcție se asigură prin sistemul de contravîntuiri articulate.

În fig. 396, pentru o urmărire mai clară a eforturilor în contravîntuiri, nu se face nici o precizare asupra modului cum sînt alcătuite cele două grinzi plane, ele fiind indicate numai prin conturul lor.

În proiecția pe planul orizontal *xoz* sistemul apare ca o grindă plană orizontală cu tălpi paralele (fig. 396, *b*) legate cu o serie de diagonale articulate, care, evident, nu se proiectează în mărime naturală.

Dacă printr-o secțiune transversală $I-I$ care taie o singură diagonală a contravîntuirilor se exprimă echilibrul uneia dintre părți prin proiecția pe axa Oz, rezultă :

$$N_{ij} = \frac{T_I}{\cos(N_{ij},z)} = \frac{T_I}{h} l_{ij}. \tag{6.29}$$

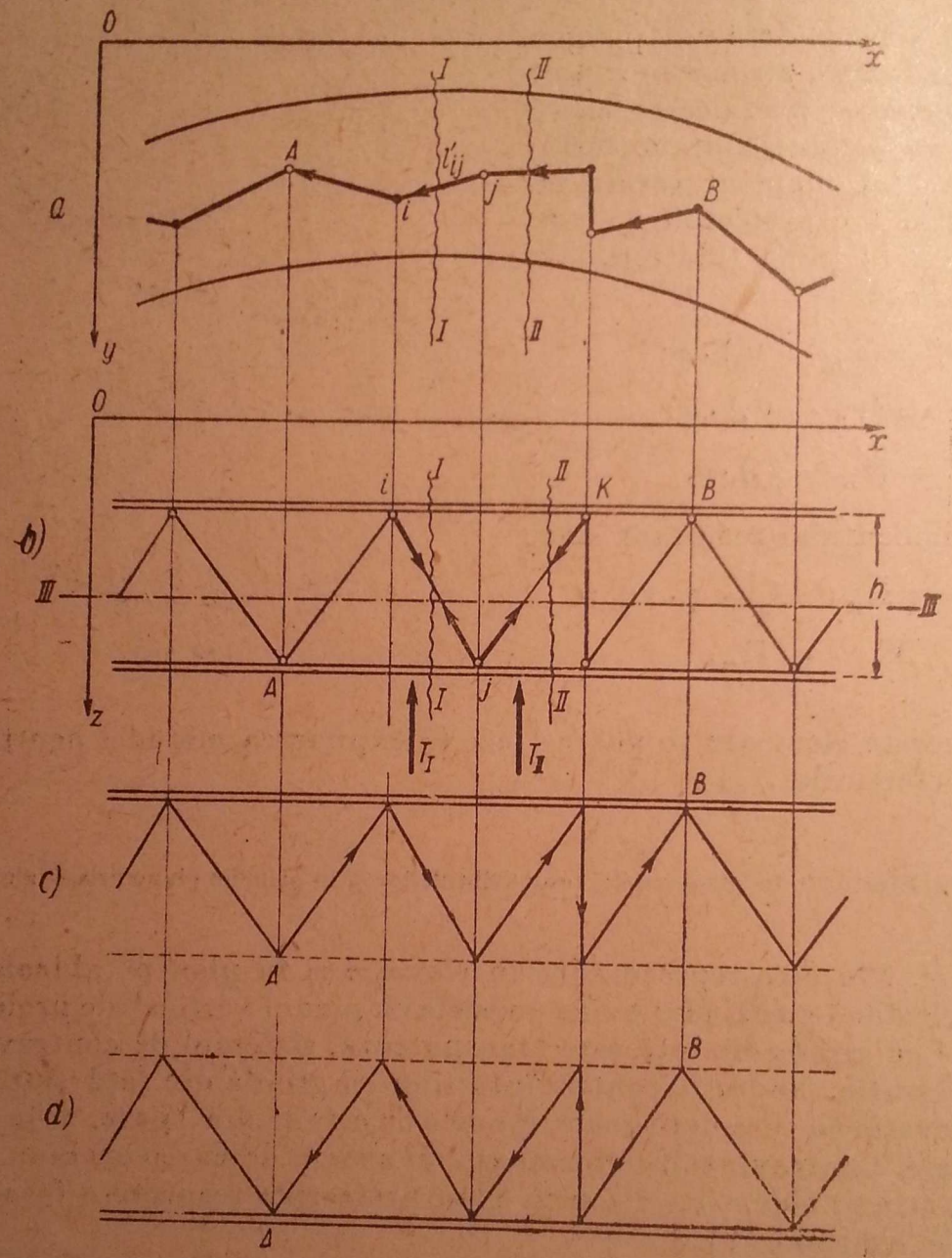


Fig. 396.

Printr-o secțiune $II - II$ se obține analog :

$$N_{jk} = \frac{-T_{II}}{\cos(N_{jk}, z)} = -\frac{T_{II}}{h} l_{jk}. \tag{6.30}$$

În aceste expresii T_I și T_{II} sînt forțele tăietoare după direcția Oz în secțiunile $I - I$, respectiv $II - II$, forțe tăietoare care acționează perpen-

dicular pe planul grinzilor paralele ale biconstrucției, adică paralele cu Oz, iar l_{ij} și l_{jk} sînt lungimile reale ale diagonalelor respective.

Pentru forțele tăietoare pozitive așa cum sînt T_I și T_{II} în fig. 396, *b*, diagonalele descendente în plan (diagonala ij) sînt întinse, iar cele ascendente — comprimate (diagonala jk).

Un caz particular care caracterizează modul de calcul este acela în care pe un interval dat, de exemplu, între nodurile A și B nu acționează nici o sarcină normală pe planele grinzilor principale. Pe acest interval forța tăietoare va fi constantă : $T = \text{constant}$.

Din expresiile (6.29) și (6.30) rezultă :

$$N_{ij} = \pm q \cdot l_{ij}, \tag{6.31}$$

unde s-au notat :

$$q = \frac{T}{h}. \tag{6.32}$$

Semnul plus se referă la diagonalele descendente, și semnul minus la cele ascendente, pentru q considerat pozitiv ; q este pozitiv cînd în planul orizontal forța tăietoare este pozitivă, adică dirijată în sensul invers axei Oz (cînd forța tăietoare T se aplică pe fața din dreapta a secțiunii făcute, adică atunci cînd forța tăietoare T rotește în sensul acelor unui ceasornic partea de corp pe care se aplică).

Dacă se face secțiunea $III - III$ printr-un plan paralel cu grinzile principale, astfel încît să taie toate diagonalele, eforturile din acestea vor acționa ca sarcini pe fiecare dintre grinzile plane principale. Pe intervalul $A - B$, în care forța tăietoare T este constantă, conform expresiei (6.31), forțele din diagonale care acționează pe fiecare dintre grinzile principale sînt proporționale cu lungimile acestor diagonale, astfel încît atunci cînd diagonalele formează un sistem continuu, forțele din diagonale alcătuiesc un poligon de forțe care acționează pe fiecare dintre grinzile principale. În fig. 396, *c* este reprezentat (în planul considerat) acest poligon de forțe care acționează pe grinda principală din spate, iar în fig. 396, *d* — poligonul de forțe care acționează pe grinda din față. Semnele celor două poligoane de forțe care acționează cele două grinzi între punctele A și B sînt opuse, așa cum a reieșit din secțiunea $III - III$ (fig. 396, *b*). Pentru T pozitiv, sensul poligonului de forțe pe grinda din față este de la dreapta la stînga (fig. 396, *d*), iar pe grinda din spate — de la stînga la dreapta (fig. 396, *c*).

Fiind cunoscute valorile acestor forțe care acționează cele două grinzi principale, se poate găsi ușor efectul lor pe grinzile principale. Astfel, din modul cum au fost determinate eforturile în diagonalele contravîntuirilor cu formula (6.29), adică din ecuația de proiecție pe axa Oz, rezultă că în intervalul AB proiecțiile pe direcția Oz ale eforturilor din diagonale (normale pe planele grinzilor principale) sînt în echilibru în fiecare nod, astfel încît asupra grinzilor principale acționează numai proiecțiile eforturilor din diagonale pe planul acestor grinzi.

Aceste proiecții alcătuiesc poligonul de forțe care rezultă din proiecția diagonalelor pe planele grinzilor principale. În fig. 396, *a*, care reprezintă elevația grinzilor principale, este arătat acest poligon de forțe pentru grinda din față. Valoarea proiecției forței date de efortul N_{ij} va fi : $F_{ij} = l_{ij} \cdot q$,

unde l'_{ij} este proiecția lui l_{ij} pe planul grinzilor principale, iar $q = \frac{T}{h}$ este intensitatea poligonului de forțe.

De aici rezultă că grinzile plane vor fi încărcate în planul lor cu poligoane de forțe rezultate din proiecțiile eforturilor contravîntuirilor pe planul grinzilor principale, forțe care se aplică în nodurile grinzii plane corespunzătoare. Astfel, pentru grinda din față acest poligon de forțe cu sensul de la B spre A este reprezentat în fig. 396, *a*, forțele avînd punctele de aplicație în cerculețele goale. Pentru grinda din spate poligonul de forțe va fi același, dar, evident, cu sensul schimbat de la A spre B, iar punctele de aplicație ale forțelor se găsesc în cerculețele negre. Intensitatea tuturor acestor poligoane de forțe pe porțiunea dintre A și B este :

$$q = \frac{T}{h}.$$

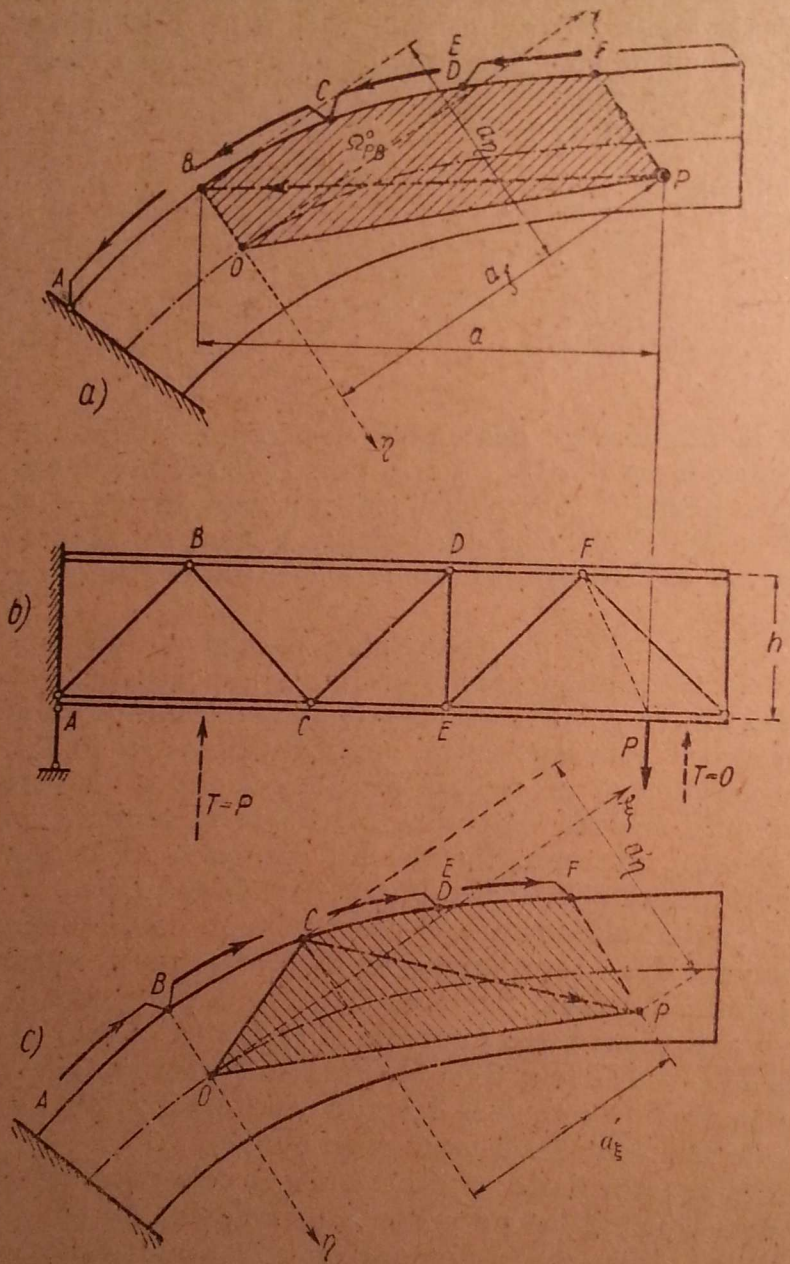


Fig. 397.

Ceea ce mai rămîne de determinat sînt eforturile în grinzile plane. Fiecare grindă plană principală încărcată cu aceste poligoane de forțe în planul ei poate fi calculată în mod obișnuit ca orice construcție plană.

În fig. 397 este reprezentată în elevație și în proiecție orizontală o „biconstrucție" cu cele două grinzi principale paralele și verticale solidarizate între ele cu un sistem continuu de contravîntuiri longitudinale așezate în lungul tălpii superioare.

Fiecare dintre cele două grinzi plane principale este complet fixată în planul său prin trei legături în același plan, în cazul de față — prin încastrare plană. Pentru a avea o figură mai ușor de urmărit, cele două grinzi plane se consideră cu secțiune plină, dar fără posibilitatea de a suporta, fiecare izolată,

sarcini normale pe planul său. Se observă de la început că cele șase legături față de teren ale grinzilor plane principale se găsesc în două plane paralele și, deci, nu sînt suficiente pentru a fixa sistemul în spațiu, deoarece există posibilitatea deplasării după normala la aceste plane. De aceea, s-a mai introdus o legătură față de teren printr-un reazem simplu reprezentat printr-o bară în punctul A, perpendiculară pe planul grinzilor principale (fig. 397, *b*).

Au fost necesare deci șapte legături simple față de teren la acest sistem de construcție.

În elevație (fig. 397, *a*) diagonalele sînt reprezentate puțin deplasate față de talpa superioară a grinzilor și sînt legate cu linii înclinate de nodurile grinzii plane din față. Extremitățile diagonalelor care rămîn libere înseamnă că sînt legate de nodurile grinzii plane din spate.

Acest procedeu permite să se reprezinte foarte ușor sistemul de forțe care încarcă grinda din față, în special în cazul cînd acționează o singură forță P normală pe planul grinzilor principale, deoarece este suficient să se traseze săgeți într-o anumită direcție pe proiecția în elevație a diagonalelor contravîntuirilor.

Asupra sistemului acționează forța P în punctul notat tot cu P, normală pe planul grinzilor principale. Deoarece punctul P nu este un nod al sistemului de contravîntuiri, este necesar să se realizeze în acest punct un nod secundar din care să pornească o bară care să-l lege cu un nod al contravîntuirilor.

Această bară trebuie în același timp să nu se găsească în planul grinzii din față asupra căreia acționează forța P, adică va trebui să se lege punctul P cu un nod de pe grinda plană din spate a sistemului de contravîntuiri.

Aceasta este bara PF, desenată punctat în plan și elevație în fig. 397.

În proiecție pe planul orizontal, forța dată P provoacă o forță tăietoare pozitivă egală cu P pe intervalul $A - P$ și o forță tăietoare nulă la dreapta lui P. În consecință, poligonul de forțe este alcătuit din forțele PF, FE, ED, DC, CB și BA, a căror intensitate este $q = \frac{P}{h}$.

Semnele eforturilor în diagonalele contravîntuirilor alternează după cum diagonalele sînt descendente sau ascendente.

Încărcarea grinzii din față în planul ei este dată de poligonul de forțe proiectat pe elevația grinzii, adică de poligonul de forțe reprezentat în fig. 397, *a* (elevație), $PFECBA$, forțele respective avînd punctele de aplicație în nodurile grinzii din față și sensurile de la P spre A, deoarece $T = P$ este pozitivă în acest interval.

Astfel, forța PF are punctul de aplicație în P, FE în E, DC în C, CB în C și BA în A, cu sensurile indicate în elevația grinzii (fig. 397, *a*).

Forța BA se transmite direct reazemului din A și nu mai încarcă grinda din față.

Pentru grinda din spate încărcarea este dată de același poligon de forțe, dar cu sensurile schimbate (de la A spre P) și cu punctele de aplicații în nodurile B, D și F ale acestei grinzi, așa cum se arată în elevația acesteia grinzi din fig. 397, *c*. Intensitatea acestui poligon de forțe care încarcă cele două grinzi plane principale este $q = \frac{P}{h}$.

Acum se pot determina eforturile în orice secțiune a grinzilor plane principale. De exemplu, în punctul O situat în centrul de greutate al secțiunii

transversale care se găsește imediat la dreapta nodului B, să se determine eforturile M, T, N pentru grinda din față. Încărcarea ce determină eforturile este reprezentată de poligonul de forțe dintre P și B în elevația din fig. 397, *a*, astfel încît vom avea momentul încovoietor în secțiune :

$$M = q\,\Omega^{O}_{PB} = \frac{P}{h}\,\Omega^{O}_{PB}, \tag{6.33}$$

în care Ω^{O}_{PB} reprezintă dublul suprafeței cu vîrful în O și conturul $PFECB$ (haşurată în figură).

Momentul încovoietor este pozitiv, deoarece s-a făcut reducerea forțelor de la dreapta, și poligonul forțelor rotește față de O în sens invers acelor unui ceasornic.

Forța normală în secțiunea O este egală cu proiecția rezultantei forțelor din dreapta pe tangenta la axa barei, adică, cu proiecția coardei PB pe axa $O\,\xi$ care se determină cu expresia (6.28)

$$N = -\,q \cdot a_{\xi} = -\,\frac{P}{h}\,a_{\xi}\,. \tag{6.34}$$

În mod analog forța tăietoare se determină din proiecția coardei PB pe axa $O\eta$

$$T = -\,q \cdot a_{\eta} = -\,\frac{P}{h}\,a_{\eta}\,. \tag{6.35}$$

În cazul mai multor forțe P_i normale pe grinzile principale se obțin eforturile din secțiunea O prin suprapunerea efectelor :

$$M = \frac{1}{h}\sum \Omega^{O}_{P_i B}$$

$$N = -\,\frac{1}{h}\sum P_i\,a_{i\xi}\,; \tag{6.36}$$

$$T = -\,\frac{1}{h}\sum P_i\,a_{i\eta}\,.$$

Pe grinda din spate (fig. 397, *c*) rezultă același poligon de forțe, dar cu sens invers.

Se observă că forța BC are punctul de aplicație în stînga secțiunii din O, astfel încît ea nu va intra în expresiile M, N, T. Deci, poligonul de forțe, pentru această secțiune a grinzii din spate, este cuprins între P și C, astfel că în expresia lui M intervine Ω^{O}_{PC} și în expresiile N și T — segmentele a'_{ξ} și a'_{η} determinate de proiecțiile coardei PC pe axele $O\xi$ și $O\eta$.

c) Aplicarea metodei la calculul unui pod cu două grinzi principale

În fig. 398 este reprezentat un pod cu calea la partea superioară, contravîntuirile longitudinale găsindu-se la nivelul tălpilor inferioare ale celor două grinzi principale paralele, iar nodurile tălpii superioare sînt legate în direcție perpendiculară pe planul grinzilor principale prin contravîntuiri transversale.

După cele stabilite, ar trebui ca fiecare grindă plană principală să fie legată de teren cu trei bare în planul ei, ceea ce conduce la șase bare de legătură. De asemenea, trebuie să existe și bare de legătură cu terenul, care să nu se găsească în planele grinzilor principale. Teoretic, ar fi suficient o asemenea bară $U_{A'}$, sau $U_{B'}$; o astfel de construcție are însă în mod obișnuit ambele aceste legături, așa că vor fi folosite amîndouă. În acest caz sistemul devine odată static nedeterminat, deoarece $n = 28$, $b = 77$, $r = 8$ și $b + r - 3n = 77 + 8 - 3.28 = 1$.

Pentru a trata sistemul ca un sistem static determinat va trebui să fie suprimată o bară, sau un reazem. Nu se poate suprima o bară fără să se

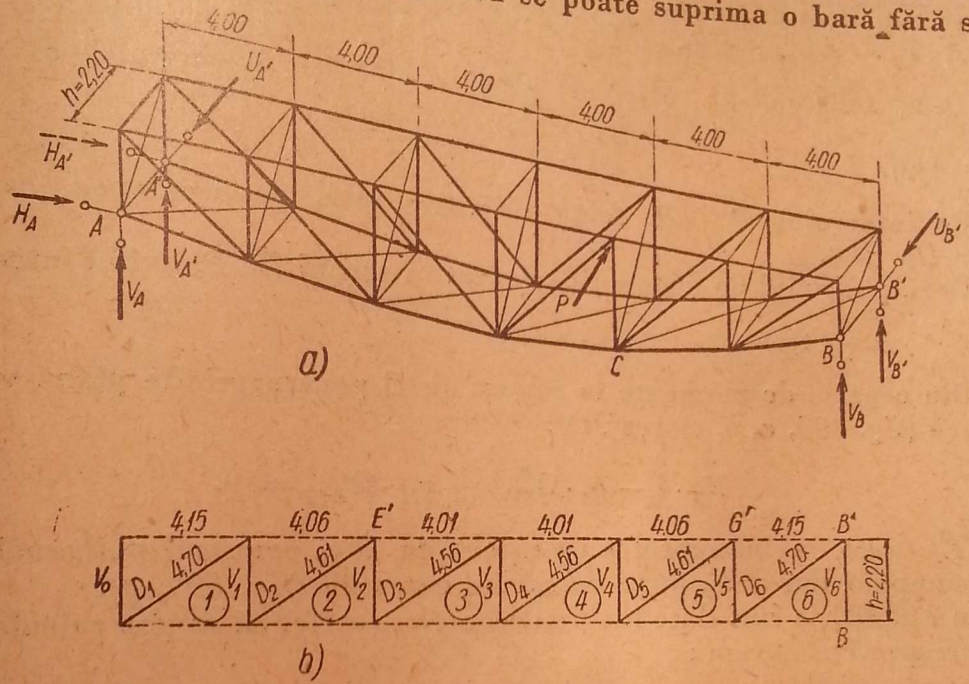


Fig. 398.

strice simetria construcției și de aceea va fi suprimat un reazem. Dacă se impune condiția ca fiecare grindă principală să rămînă cu cele trei legături din planul său, atunci ar trebui suprimată una dintre barele $U_{A'}$, sau $U_{B'}$; acest lucru ar schimba însă esențial condițiile de rezemare pentru sarcini normale pe planele grinzii principale, care fac obiectul problemei de față. Pentru aceste sarcini orizontale normale pe planul grinzilor principale este clar că legăturile care sînt mai puțin active sînt H_A și $H_{A'}$. De aceea, va fi suprimată una dintre ele, adică se admite ca $H_{A'} = 0$. În acest caz construcția devine static determinată, dar grinda principală din spate este fixată numai cu două bare în loc de trei în planul ei.

Se va analiza acum acest sistem transformat (fără bara $H_{A'}$) pentru o încărcare $P = 12$ t, aplicată într-un nod al tălpii superioare (fig. 398, *a*).

Din proiecția pe axa longitudinală a podului rezultă :

$$H_A = 0.$$

Din ecuațiile de momente în raport cu axele verticale care trec prin B și A se obține :

$$U_{A'} = \frac{P}{3} = 4 \text{ t} \quad \text{și} \quad U_{B'} = \frac{2}{3} P = 8 \text{ t}. \tag{6.37}$$

Pentru celelalte patru reacțiuni V_A, V_B și $V_{A'}$, $V_{B'}$ avem numai trei ecuații de echilibru exterior, astfel încît vor trebui folosite concluziile la care am ajuns pentru studiul „biconstrucției". Astfel, orice secțiune transversală taie o singură bară a contravîntuirii longitudinale, și efortul din ea se poate obține din expresia forței tăietoare în proiecție pe planul orizontal cu expresia (6.29).

Reacțiunile V_A și V_B se vor determina din condițiile de echilibru al grinzii principale din față în planul ei, după ce se va obține poligonul de forțe cu care este încărcată în planul ei prin acțiunea sarcinii P.

În proiecție orizontală pe intervalul $A - P$ avem forța tăietoare constantă $T_I = -U_{A'} < 0$.

Deci, poligonul de forțe are sensul ACP, și intensitatea $q_I = \frac{U_{A'}}{h} = \frac{4}{2{,}2}$ t/m.

Pe intervalul $P - B$, forța tăietoare este, de asemenea, constantă $T_{II} = U_{B'} > 0$.

Deci, poligonul de forțe este orientat în sensul BCP, avînd intensitatea $q_{II} = \frac{U_{B'}}{h} = \frac{8}{2{,}2}$ t/m.

Din ecuația de momente în raport cu B pentru grinda plană verticală din față (fig. 399, *a*, *b*, *c*) rezultă :

$$V_A \cdot l - q_I \cdot \Omega^B_{ACP} + q_{II} \cdot \Omega_{BCP} = 0. \tag{6.38}$$

Ω^B_{ACP} este dublul suprafeței cu polul în B și conturul poligonal ACP, fiind compusă din două părți de semne contrarii (fig. 399, *a*).

În fig. 399, *a* sînt date lungimile barelor, astfel că se pot calcula suprafețele respective. Avem :

$$\Omega^B_{ACP} = 2\left[4{,}0\left(0+1{,}11+1{,}78+2{,}00+\frac{1}{2}\,1{,}78\right)-\frac{1}{2}\,8{,}0\cdot 2{,}0\right] = 30{,}24\ \text{m}^2.$$

Ω_{BCP} este dublul suprafeței cu polul în B și conturul poligonal BCP (fig. 399, *b*) și are valoarea :

$$\Omega_{BCP} = 2\left[4\left(\frac{1}{2}\,3{,}78+3{,}11+\frac{1}{2}\,2{,}0\right)-\frac{1}{2}\,8{,}0\cdot 2{,}0\right] = 32{,}00\ \text{m}^2.$$

Ecuația de momente față de B (6.38) devine :

$$V_A \cdot 24 - \frac{4}{2{,}2}\cdot 30{,}24 + \frac{8}{2{,}2}\cdot 32 = 0, \text{ de unde rezultă :}$$

$V_A = -2{,}56$ t, ceea ce înseamnă că este dirijată în sens contrar celei din fig. 399, *c*. În fig. 399, *c* sînt suprapuse încărcările din fig. 399, *a* și *b*.

Reacțiunea V_A se poate calcula din ecuația de momente față de B și pe altă cale, care conduce la evaluări mai simple de suprafețe.

În loc să considerăm că poligonul de forțe provine pe intervalul ACP din T_I, și pe intervalul PCB din T_{II}, se poate încărca grinda cu sistemul echivalent următor : întîi un poligon de forțe dat de T_I constant pe toată grinda, peste care se suprapune un poligon de forțe dat de încărcarea P pe

intervalul PCB. Acest sistem este echivalent cu precedentul din punctul de vedere al reacțiunilor, deoarece : $T_{II} = T_I - P$.

În fig. 399, *d* sînt reprezentate poligoanele de forțe respective. T_I aplicat A spre B, iar P aplicat pe intervalul $P - B$ dă poligonul de forțe PCB orientat în sensul BCP, cu intensitatea $q = \frac{P}{h} = q_I + q_{II} = \frac{12}{2,2}$ t/m.

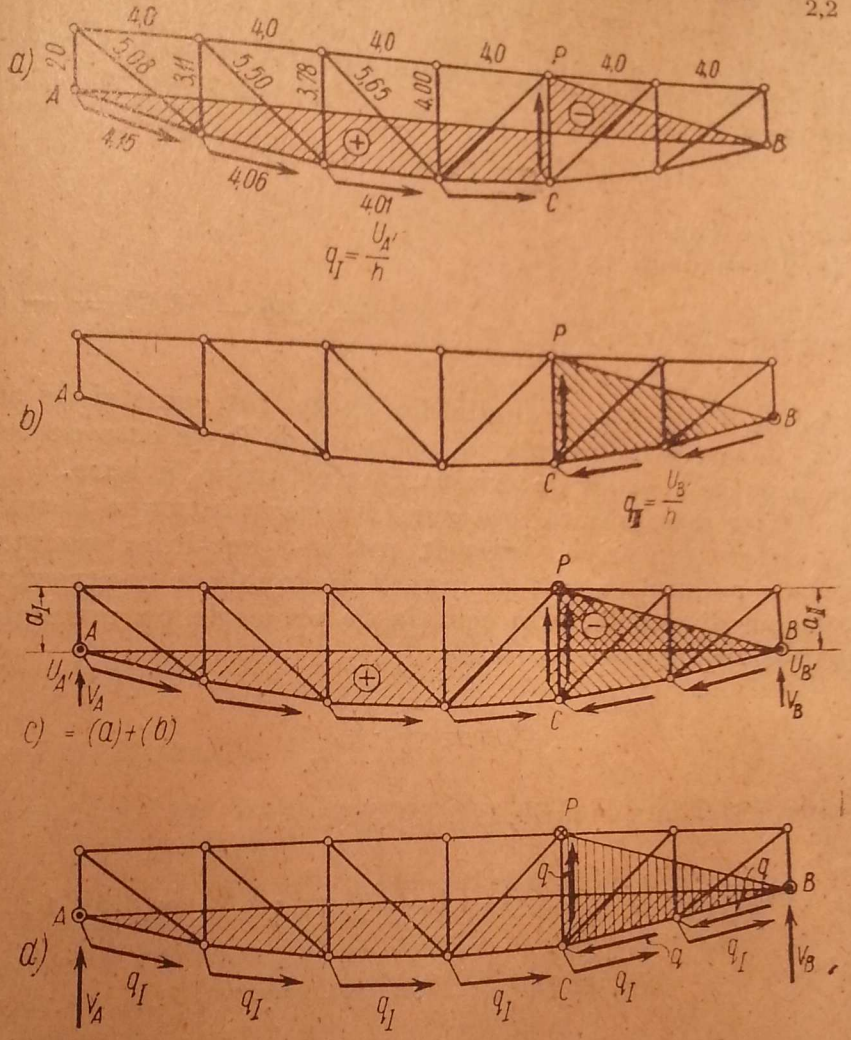


Fig. 399.

Ecuația de momente în raport cu B, în acest caz, devine :

$$V_A \cdot l - q_I \cdot \Omega_{ACB} + q \cdot \Omega_{PCB} = 0. \qquad (6.39)$$

Suprafețele duble Ω_{ACB} și Ω_{PCB} se evaluează cu datele din figură :

$$\Omega_{ACB} = 2 \cdot 4,0\ (0 + 1,11 + 1,78 + 2,0 + 1,78 + 1,11 + 0) = 62,24\ \text{m}^2;$$

$$\Omega_{PCB} = 2\left[4,0\left(\frac{1}{2}\,1,78 + 1,11 + 0\right) + \frac{1}{2} \cdot 8,0 \cdot 2,0\right] = 32,00\ \text{m}^2.$$

Ecuația (6.39) devine :

$$V_A \cdot 24 - \frac{4}{2,2} \cdot 62,24 + \frac{12}{2,2} \cdot 32,00 = 0, \text{ de unde :}$$

$$V_A = -2,56 \text{ t.}$$

V_B poate fi determinat din ecuația de momente în raport cu punctul A, dar această cale necesită determinarea altor suprafețe, astfel că se va utiliza ecuația de proiecție pe verticală, ținînd seamă că V_A a fost verificat prin calcul pe două căi.

Se proiectează reacțiunile și poligonul de forțe din fig. 399, *c* pe verticală și se obține :

$$V_A + V_B + q_I \cdot a_I + q_{II} \cdot a_{II} = 0, \tag{6.40}$$

unde $a_I = a_{II} = 2$ m.

Din (6.40) se deduce :

$$V_B = -(-2,56) - 2\left(\frac{4}{2,2} + \frac{8}{2,2}\right) = +2,56 - 10,91 = -8,35 \text{ t.}$$

Reacțiunile $V_{A'}$ și $V_{B'}$ pe grinda din spate sînt egale și de sens contrar cu V_A și V_B, deoarece încărcarea cu poligonul de forțe este de sens contrar.

Acum se poate trece la determinarea eforturilor în bare.

În fig. 398, *b* este arătată desfășurată contravîntuirea longitudinală cu lungimile barelor respective. Întrucît printr-o secțiune normală pe axa longitudinală a podului se taie o singură diagonală a contravîntuirilor, se obține efortul în diagonală, prin ecuația de proiecție pe normala la planul grinzilor principale, cu expresia (6.29)

$$D_i = \pm \frac{T_i}{h} \cdot l_i .$$

Se obține astfel în panourile (*1*), (*2*), (*3*), ...

$$D_1 = \frac{4}{2,2} \cdot 4,70 = 8,55 \text{ t}; \; D_2 = \frac{4}{2,2} \cdot 4,61 = 8,39 \text{ t};$$

$$D_3 = D_4 = \frac{4}{2,2} \cdot 4,56 = 8,30 \text{ t};$$

$$D_5 = -\frac{8}{2,2} \cdot 4,61 = -16,78 \text{ t}; \quad D_6 = -\frac{8}{2,2} \cdot 4,70 = -17,10 \text{ t.}$$

Eforturile în montanții contravîntuirilor longitudinale se pot obține din izolarea nodurilor. Astfel, din separarea nodului E' (fig. 398, *b*) numai barele D_2 și V_2 nu se găsesc în planul grinzii principale din spate. Din ecuația de proiecție pe normala la planul grinzii principale rezultă :

$$V_2 = -D_2 \cos (D_2, V_2) = T_I.$$

Se deduce astfel :

$$V_0 = V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = T_I = -U_{A'} = -4 \text{ t.}$$

Din echilibrul nodului G' se obține :

$$V_5 = -D_5 \cos (D_5, V_5) = T_{II} = U_{B'} = 8 \text{ t},$$

iar din echilibrul nodului B : $V_6 = 0$.

Din separarea nodurilor tălpii superioare a grinzii din față (fig. 398, *a*) rezultă că eforturile în barele superioare orizontale ale contravîntuirilor transversale sînt nule, cu excepția barei din nodul P, care are ca efort $N_P = -P = -12$ t.

Apoi, din separarea nodurilor tălpii superioare a grinzii din spate rezultă că și eforturile din diagonalele contravîntuirilor transversale sînt nule, cu excepția diagonalei unde se aplică sarcina P. Efortul în această bară este :

$$N = P \frac{l_d}{h} \quad \text{unde } l_d = \sqrt{3{,}78^2 + 2{,}20^2} = 4{,}38 \text{ m}$$

este lungimea diagonalei transversale din dreptul forței P. Rezultă :

$$N = 12 \cdot \frac{4{,}38}{2{,}20} = 23{,}9 \text{ t}.$$

Rămîn de calculat acum eforturile din grinzile principale ale căror încărcări sînt date de poligoanele de forțe determinate. Ținînd seamă de înclinările diferite ale barelor se recomandă calculul grafic cu ajutorul epurei Maxwell — Cremona.

În fig. 400, *a* este reprezentată grinda din față cu încărcările respective date de poligoanele de forțe de intensitate $q_I = \frac{4}{2{,}2}$ t/m pe intervalul AC și $q_{II} = \frac{8}{2{,}2}$ t/m, pe intervalul CB.

Cele două forțe verticale aplicate în C care aparțin una poligonului din stînga, și alta, poligonului din dreapta, au fost înlocuite în desen cu rezultanta lor F_7, care este reprezentată în afara grinzii.

Mărimile forțelor F_1, F_2, ..., se obțin din multiplicarea lungimilor barelor respective din elevație cu intensitatea poligoanelor de forțe corespunzătoare. Sensurile lor sînt indicate în fig. 400, iar mărimile lor vor fi, în valoare absolută :

$$F_1 = \frac{4}{2{,}2} \cdot 4{,}15 = 7{,}55 \text{ t}; \quad F_2 = \frac{4}{2{,}2} \cdot 4{,}06 = 7{,}39 \text{ t};$$

$$F_3 = F_4 = \frac{4}{2{,}2} \cdot 4{,}01 = 7{,}29 \text{ t}; \quad F_5 = \frac{8}{2{,}2} \cdot 4{,}06 = 14{,}78 \text{ t};$$

$$F_6 = \frac{8}{2{,}2} \cdot 4{,}15 = 15{,}10 \text{ t}; \quad F_7 = \frac{4+8}{2{,}2} \cdot 3{,}78 = \frac{12}{2{,}2} \cdot 3{,}78 = 20{,}60 \text{ t}.$$

Reacțiunile V_A și V_B sînt determinate anticipat :

$$|V_A| = 2{,}56 \text{ t}; \quad |V_B| = 8{,}35 \text{ t}.$$

Cu aceste date se construiește epura pentru determinarea eforturilor așa cum se arată în fig. 400, *b*. În fig. 400, *a* s-au notat spațiile cu cifre așa cum este mai practic la această metodă. Efortul dintr-o bară are în epură cifrele la capetele sale, iar bara respectivă este cuprinsă între aceleași cifre în elevația grinzii.

Grinda din spate este încărcată cu aceleași poligoane de forțe ca și cea din față, dar cu sensurile schimbate. Totodată se schimbă și punctele de aplicație ale forțelor, trecînd la celelalte capete ale barelor ca în fig. 400, *c*.

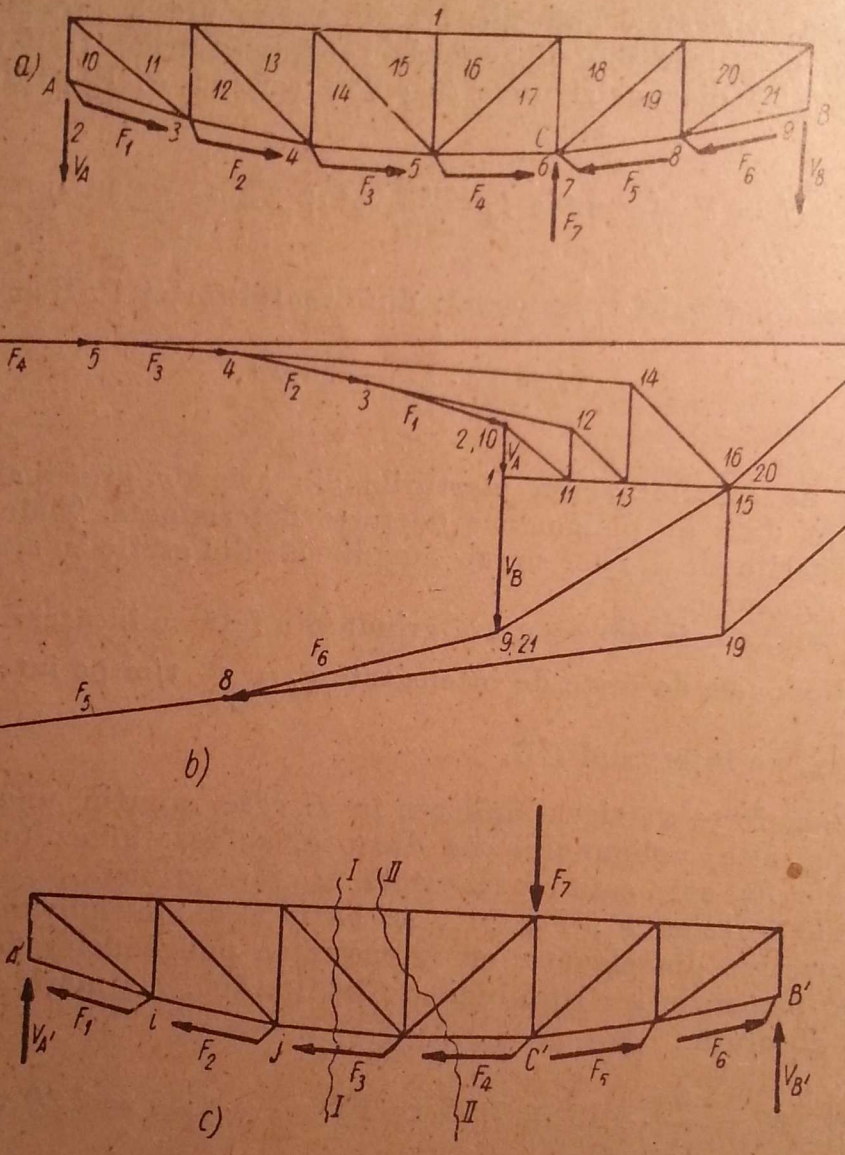


Fig. 400.

De aici rezultă că eforturile în grinda din spate vor fi egale și de sens contrar cu cele ale grinzii din față, dar trebuie să se țină seamă și de modificările pe care le produc schimbările punctelor de aplicație. Astfel, din secțiunile $I - I$ și $II - II$ în fig. 400, *c* rezultă că dintre barele secționate, barele de-a lungul cărora nu acționează încărcările din poligoanele de forțe (talpa superioară, diagonalele și montanții) au aceeași eforturi cînd, de exemplu, forța F_2 se aplică în *i* sau în *j*, dar concluzia nu mai

este valabilă pentru eforturile din barele de-a lungul cărora acționează forțele F.

Dacă se adaugă în nodurile i și j, două forțe F_{ij} egale și de sensuri contrare, rezultă că :

$$N_{ij}^{post} = -N_{ij}^{ant} - F_{ij},$$

în care F_{ij} este considerat pozitiv pentru grinda din față de la stînga la dreapta și de jos în sus.

Această relație se va aplica tuturor barelor tălpii inferioare și montantului din C.

De exemplu, din epura Cremona rezultă pe grinda din față :

$$N_{4-12}^{ant} = -18{,}10 \text{ t.}$$

Pe grinda din spate va rezulta :

$$N_{4-12}^{post} = +18{,}10 - 7{,}39 = +10{,}71 \text{ t.}$$

În bara $8-19$:

$$N_{8-19}^{ant} = -25{,}90 \text{ t, și apoi :}$$
$$N_{8-19}^{post} = 25{,}90 + 14{,}78 = 40{,}68 \text{ t.}$$

În montantul $17-18$:

$$N_{17-18}^{ant} = -8{,}30 \text{ și } N_{17-18}^{post} = +8{,}30 - 20{,}60 = -12{,}30 \text{ t.}$$

În tabela 8 sînt date valorile eforturilor în barele grinzii din față și din spate :

Tabela 8

Bara	Eforturi în:	
	Grinda din față	Grinda din spate
3—10	− 7,55	0
4—12	−18,10	+10,71
5—14	−28,20	+20,89
6—17	−48,40	+41,11
8—19	−25,90	+40,68
9— 4	0	+15,10
1—11	+ 3,31	− 3,31
1—13	+ 6,45	− 6,45
1—15	+10,90	−10,90
1—16	+10,90	−10,90
1—18	+19,20	−19,20
1—20	+10,90	−10,90
1—10	+ 2,56	− 2,56
11—12	+ 2,83	− 2,83
13—14	+ 4,56	− 4,56
15—16	0	0
17—18	− 8,30	−12,30
19—20	+ 7,92	− 7,92
21— 1	+ 8,33	− 8,33
10—11	− 4,20	+ 4,20
12—13	− 4,20	+ 4,20
14—15	− 6,40	+ 6,40
16—17	+11,75	−11,75
18—19	−11.65	−11,65
20—21	−13 60	−13,60

Astfel au fost obținute eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele (biconstrucției) din fig. 398.

Biconstrucțiile cu contravîntuiri longitudinale la nivelul ambelor tălpi, inferioară și superioară (fig. 371, *b*), sînt forme poliedrice netransformate, în care fiecare față este alcătuită dintr-o grindă cu zăbrele plană. Un asemenea sistem satisface condiția $b = 3n - 6$, adică este o grindă liberă care, pentru a fi static determinată, necesită numai șase legături simple față de teren. Totuși, în practică, o asemenea „biconstrucție" are opt legături simple (fig. 371, *b*) : cele trei bare de legătură în planul fiecărei grinzi principale plane verticale (V_A; H_A; V_B; respectiv $V_{A'}$; $H_{A'}$; $V_{B'}$) și două legături perpendiculare pe planul grinzilor principale : $U_{A'}$ și $U_{B'}$.

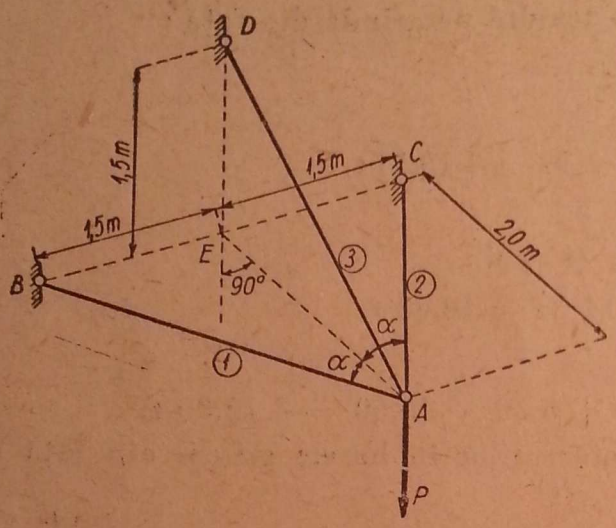


Fig. 401.

Deci, o asemenea construcție este de două ori static nedeterminată. Chiar dacă, după exemplul precedent, pentru sarcini normale pe planul grinzilor principale se suprimă o legătură orizontală, de exemplu, $H_{A'}$ — „biconstrucția" rămîne odată static nedeterminată. De aceea, asemenea „biconstrucții" în care orice secțiune transversală taie cel puțin două bare ale contravîntuirilor longitudinale nu vor fi tratate aici, ci la capitolul grinzilor cu zăbrele static nedeterminate [1]).

Aplicația 83. Să se determine eforturile în barele *1*, *2*, *3* ale sistemului din fig. 401.

Răspuns. Se descompune P în planul vertical $A-D-E$, după AD și AE, apoi în planul orizontal, componenta AE se decompune după AB și AC :

$$N_1 = N_2 = -\frac{5}{6}P; \quad N_3 = +\frac{5}{3}P.$$

Aplicația 84. Să se determine eforturile în barele de reazem ale corpului din fig. 402, *a*

Indicații. Pentru aflarea reacțiunilor se poate înlocui forța P cu un sistem echivalent aplicat oriunde pe solidul nedeformabil hașurat. În punctul A, sistemul echivalent este compus din forța P paralelă cu P din E și cuplul $P \cdot b$ care acționează în planul ABE Cuplul se poate descompune, la rîndul său, în forțele egale și de sens contrar $P\frac{b}{a}$ care acționează în punctele C și D paralel cu planul ABE (fig. 402, *b*).

Forța P din A produce reacțiuni numai în barele *1* și *2*, iar forțele din C și D, numai în barele *4* și *6*.

---

[1]) Pentru un studiu mai amănunțit al biconstrucțiilor se poate cerceta *A. A. Umanski*, op. cit.

Rezultă :

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha}\ ;\ N_2 = -P \operatorname{ctg} \alpha\ ;\ N_3 = N_5 = 0\ ;$$

$$N_4 = -N_6 = P\frac{b}{a}\ .$$

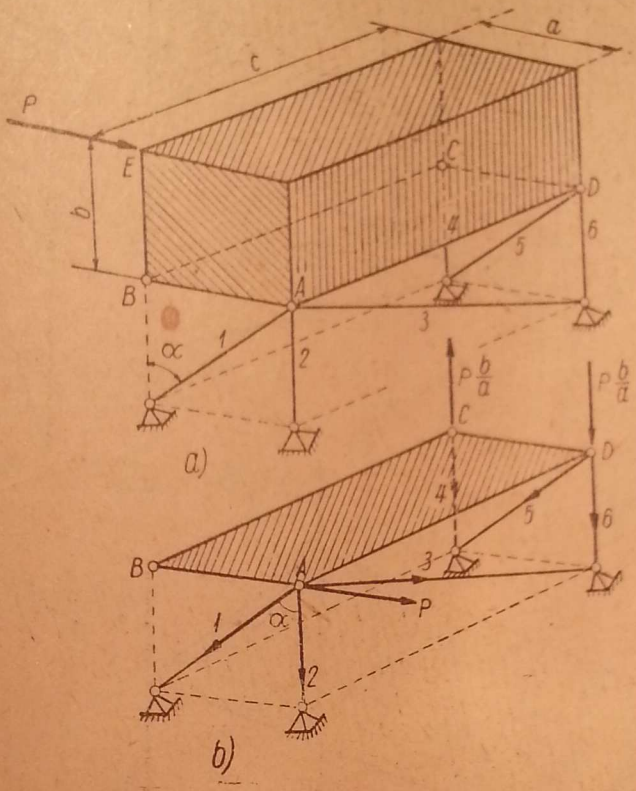


Fig. 402.

Aplicaţia 85. Să se determine reacţiunile în barele de legătură ale corpului rigid din fig 403, *a*.

Indicaţii. Profitînd de faptul că barele sînt cîte două în acelaşi plan (*1* cu *2*, *3* cu *4*, *5* cu *6*) se caută să se înlocuiască forţa P printr-un sistem echivalent aplicat corpului rigid, astfel ca elementele sale să acţioneze direct în cele trei plane ale reacţiunilor.

În raport cu sistemul de axe din A : $X = 0$; $Y = P$; $Z = 0$; $M_x = -P \cdot b$; $M_y = 0$; $M_z = +P \cdot a$.

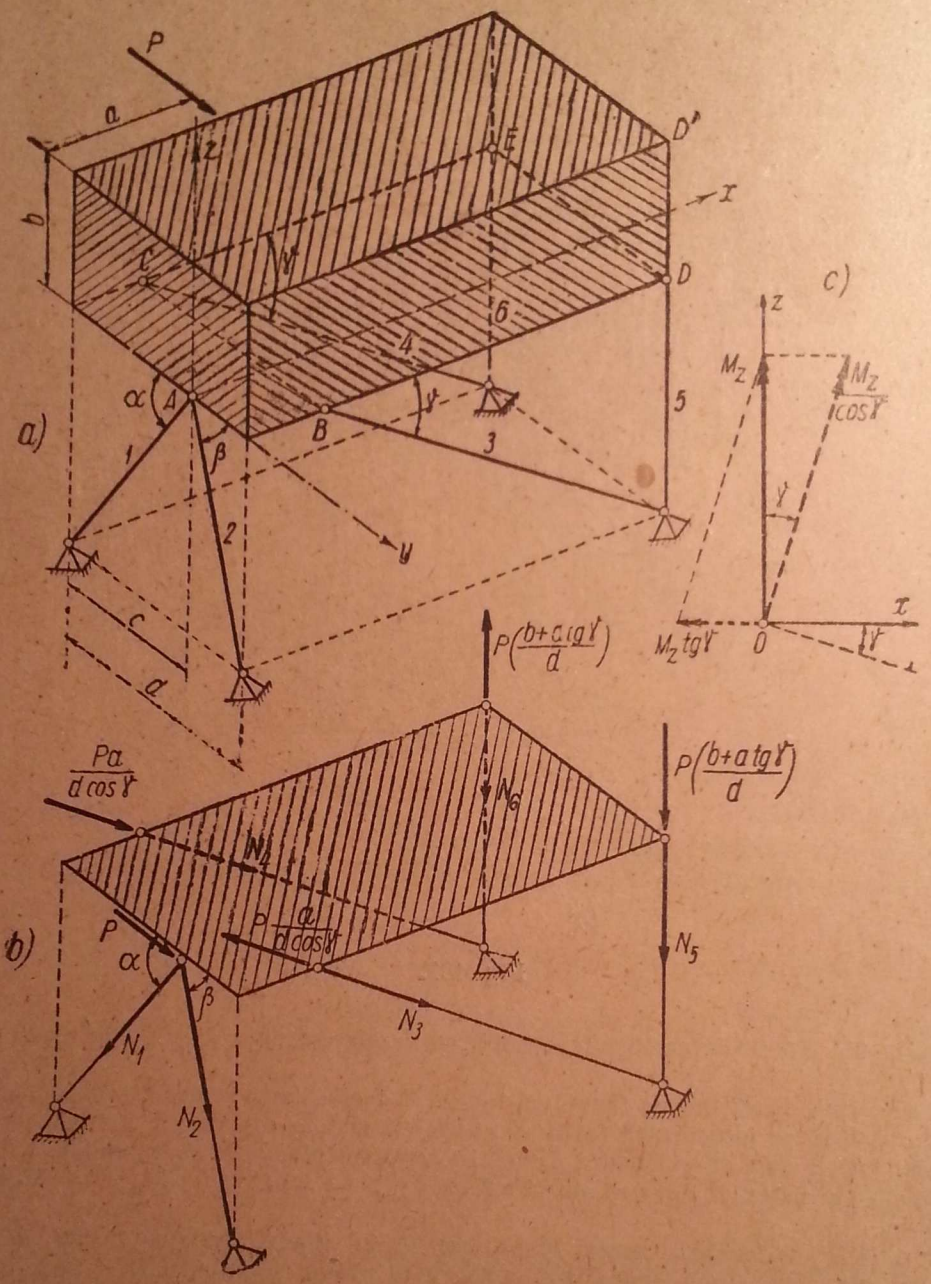
Forţa $Y = P$ acţionează acum în punctul A în planul barelor *1* şi *2*. $M_x = -P \cdot b$ este un cuplu ale cărui componente pot acţiona în planul vertical EDD' după barele *5* şi *6*, dar $M_z = P \cdot a$ acţionează în planul orizontal în care nu avem bare de legătură. De aceea, M_z se descompune după normala la planul barelor *3*, *4* şi după Ox (fig. 403, *c*).

Cuplul $M_z/\cos\gamma$ acţionează în planul *3*, *4*, şi componentele cuplului pot acţiona după aceste bare avînd valorile :

$$\frac{1}{d}\left|\frac{M_z}{\cos\gamma}\right| = \left|\frac{Pa}{d\cos\gamma}\right|,$$

iar cuplul $M_z \cdot \operatorname{tg}\gamma$ acţionează în planul barelor *5*, *6* şi se descompune împreună cu M_x după aceste bare. Valorile forţelor din aceste bare vor fi :

$$\frac{1}{d}\left|M_x - M_z \operatorname{tg}\gamma\right| = \left|\frac{P \cdot b + P \cdot a \cdot \operatorname{tg}\gamma}{d}\right|.$$



P
a
b
z
E
D'
x
C
γ
D
6
4
5
α
A
B
γ
3
a)
1
β
2
y
c
d
c)
z
M_z
$\frac{M_z}{\cos\gamma}$
γ
x
$M_z \operatorname{tg}\gamma$
0
γ
$P\left(\frac{b+a\operatorname{tg}\gamma}{d}\right)$
$\frac{Pa}{d\cos\gamma}$
N_6
N_4
$P\left(\frac{b+a\operatorname{tg}\gamma}{d}\right)$
b)
P
α
$P\frac{a}{d\cos\gamma}$
N_5
β
N_3
N_1
N_2

Fig. 403.

Toate aceste forțe sînt desenate în fig. 403, *b*; rezultă eforturile în bare:

$$N_1 = P\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};\quad N_2 = -P\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)};\quad N_3 = -N_4 = \frac{P\cdot a}{d\cos\gamma};$$

$$N_6 = -N_5 = \frac{P(b + a\operatorname{tg}\gamma)}{d}.$$

Aplicația 86. Să se determine eforturile în cele șase bare ale sistemului solid rigid din fig. 404 acționat de forța orizontală *P*.

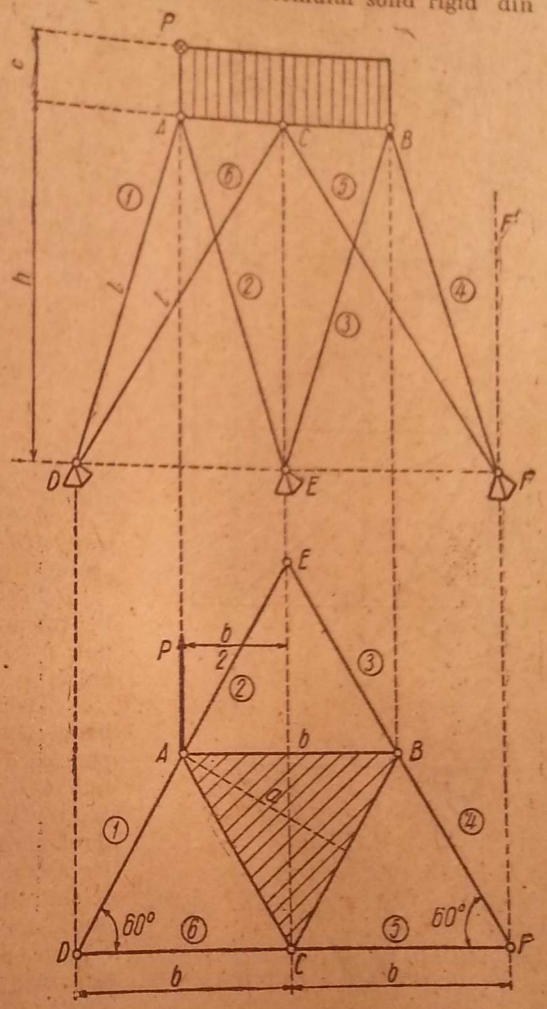


Fig. 404.

Indicații. Se secționează barele și se iau momentele în raport cu axe convenabile, astfel ca eforturile să rezulte din sisteme cu două necunoscute. Se notează cu $l = \sqrt{b^2 + h^2}$ adevărata lungime a barelor. De asemenea, din figură: $a = b\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Momentele față de *CB* și față de verticala din *F* determină pe N_1 și N_2:

$$\mathfrak{M}_{BC}) \cdot \quad N_2\frac{h}{l}a + N_1\frac{h}{l}a + \frac{P}{2}c = 0;\ (\alpha)$$

$$\mathfrak{M}_{FF'}) \cdot \quad N_2\frac{b}{l}\,2a - N_1\frac{b}{l}\,2a] +$$

$$+ P\frac{3}{2}b = 0, \qquad (\beta)$$

de unde rezultă:

$$N_1 = +P\frac{l}{4a}\left(1{,}5 - \frac{c}{h}\right);$$

$$N_2 = -P\frac{l}{4a}\left(1{,}5 + \frac{c}{h}\right).$$

Momentele față de *AC* și verticala din *D* determină pe N_3 și N_4.

În ecuațiile (α) și (β) de mai sus se schimbă numai termenii liberi cu $+\frac{P}{2}c$, respectiv $-\frac{P}{2}b$. Rezultă:

$$N_3 = -P\frac{l}{4a}\left(0{,}5 + \frac{c}{h}\right);$$

$$N_4 = +P\frac{l}{4a}\left(0{,}5 - \frac{c}{h}\right).$$

Momentele față de AB și verticala din E determină pe N_5 și N_6. Termenii liberi în ecuațiile (α) și (β) sînt: $-P \cdot c$, respectiv $+P \cdot \frac{b}{2}$. Rezultă:

$$N_5 = +P\frac{l}{4a}\left(0{,}5+2\frac{c}{h}\right);\quad N_6 = -P\frac{l}{4a}\left(0{,}5-2\frac{c}{h}\right).$$

Pentru verificare se folosește ecuația de proiecție pe verticală. Rezultă:

$\frac{h}{l}(N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6)=0$, ceea ce este verificat de expresiile găsite.

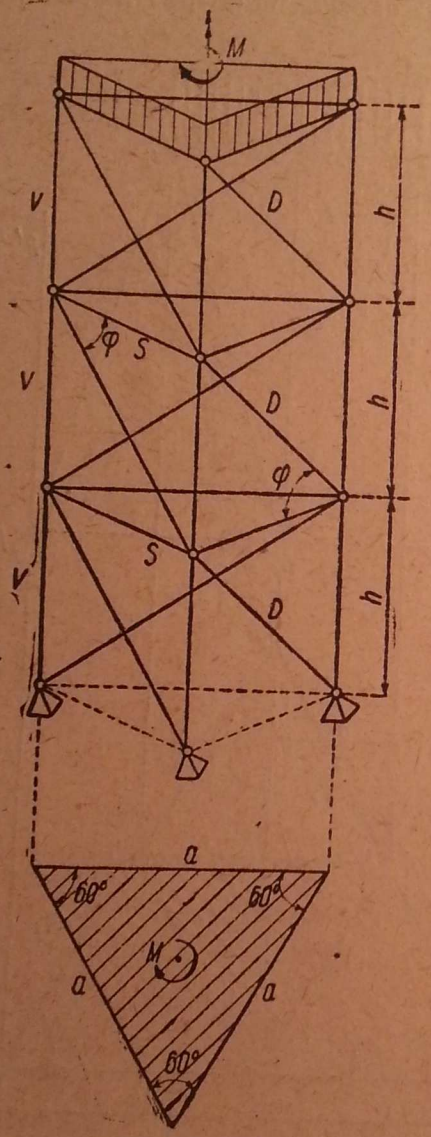


Fig. 405.

Aplicația 87. O dală în formă de triunghi echilateral este susținută de sistemul articulat din fig. 405. Dala este acționată de un cuplu al cărui moment M are axa verticală. Să se găsească eforturile în bare.

Răspuns. Toate diagonalele au același efort D, toți montanții — același efort V, și toate barele orizontale — același efort S. Din secțiuni și echilibru de noduri, ținînd seamă și de simetrie, rezultă:

$$D=\frac{2M}{a\sqrt{3}\cos\varphi};\quad V=-D\sin\varphi=-\frac{2M}{a\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi;$$

$$S=-D\cos\varphi=-\frac{2M}{a\sqrt{3}}.$$

Aplicația 88. Să se verifice dacă sistemul din fig. 406, *a* este strict nedeformabil (nu este o formă critică), cu ajutorul sarcinii zero [1]).

Răspuns. Sistemul satisface condiția $b+r=3n$. Pentru a nu fi o formă critică, trebuie ca pentru sarcini nule în noduri să existe eforturi nule în bare ca soluție unică.

Dacă se izolează triunghiul ABG (fig. 406, *c*), toate barele legate de acest triunghi în G sînt situate într-un plan care taie planul triunghiului după dreapta orizontală $A'B'$ care trece prin G. Rezultă de aici că acțiunea acestor bare asupra triunghiului trebuie să se exercite după această dreaptă de intersecție a celor două plane. De asemenea, toate barele legate de triunghiul ABG în A sînt situate într-un plan care taie planul triunghiului după AA', astfel încît rezultanta acțiunilor acestor bare asupra triunghiului trebuie să acționeze după AA'. La fel, orice acțiune asupra triunghiului ABG în B trebuie să fie dirijată după BB'. Deci, triunghiul ABG va fi supus la trei forțe coplanare după $A'B'$, AA' și BB'. Deoarece aceste forțe nu sînt concurente, ele nu pot fi în echilibru decît dacă sînt nule. Deci, pentru sarcini nule în noduri, triunghiul ABG nu primește nici o acțiune de la restul sistemului de bare, iar eforturile în barele AB, AG și BG ale lui sînt, de asemenea, nule. S-a obținut astfel certitudinea eforturilor nule în barele triunghiului ABG. În același mod se obțin concluzii asemănătoare și pentru celelalte triunghiuri analoge și, în ultimă instanță, deducem că pentru sarcini nule în noduri nu pot exista eforturi diferite de zero în sistem. Deci, sistemul nu este o formă critică.

Aplicația 89. Să se determine eforturile în barele sistemului din fig. 407, *a*, care constituie o prismă cu baza un exagon regulat. Forța P din nodul *1* se găsește în planul vertical care trece prin *1* și *5* și face 30° cu dreapta *1—5*.

[1]) Din *S. Timoșenko*, „Teoria Construcțiilor".

Indicații. Se descompune P după direcțiile $1-7$, $1-6$ și $1-2$ și se încarcă grinzile plane corespunzătoare din fig. 407, *b* și *c*.

Rezultă :

$$N_{1-7} = + \frac{1}{6} P; \quad N_{7-13} = + \frac{13}{6} P;$$

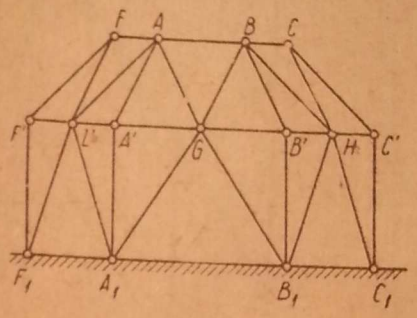
$$N_{8-14} = - \frac{2}{3} P; \quad N_{1-6} = - P; \quad N_{6-12} = - \frac{4}{3} P; \quad N_{12-18} = - \frac{8}{3} P;$$

$$N_{2-8} = 0; \quad N_{2-1} = 0; \quad N_{7-8} = +$$

$$+ \frac{1}{2} P; \quad N_{7-12} = - P; N_{1-8} = N_{7-14} = - \frac{5}{6} P;$$

$$N_{6-7} = N_{12-13} = + \frac{5}{3} P.$$

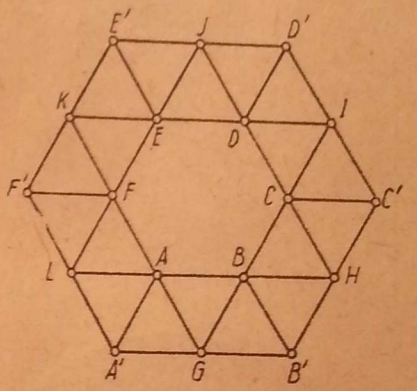
Restul barelor sînt inactive pentru o încărcare în nodul *1*.



Aplicația 90. Să se determine eforturile în barele sistemului din fig. 408, *a*. Sarcinile P sînt orizontale, perpendiculare pe coama $1-4$.[1])

Răspuns. Se descompune fiecare forță P în componentele din cele două plane (fig. 408, *b*) și apoi se încarcă grinzile plane cu forțele respective (fig. 408, *c*). Grinda din spate $1-4-9-12$ este identică cu grinda $1-4-5-8$, dar încărcările sînt de sens contrar.

Rezultă din suprapunere :



$$N_{1-2} = N_{2-3} = N_{3-4} = 0;$$

$$N_{9-6} = N_{10-7} = N_{11-8} = 0;$$

$$N_{5-6} = - N_{9-10} = - \frac{P}{1{,}6};$$

$$N_{6-7} = - N_{10-11} = - \frac{3P}{1{,}6};$$

$$N_{7-8} = - N_{11-12} = - \frac{6P}{1{,}6};$$

$$N_{1-5} = - N_{1-9} = - \frac{P}{1{,}2};$$

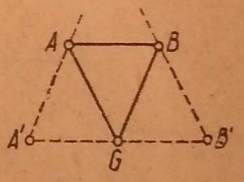


Fig. 406.

$$N_{2-6} = - N_{2-10} = - \frac{P}{0{,}6}; \quad N_{3-7} = - N_{3-11} = - \frac{P}{0{,}4};$$

$$N_{2-5} = - N_{2-9} = + \frac{P}{0{,}96}; \quad N_{3-6} = - N_{3-10} = + \frac{P}{0{,}48};$$

$$N_{4-7} = - N_{4-11} = + \frac{P}{0{,}32}. \quad N_{5-9} = N_{6-10} = N_{7-11} = 0.$$

[1]) *Darkov* și *Kuznețov*, „Statica Construcțiilor", Moscova, 1951.

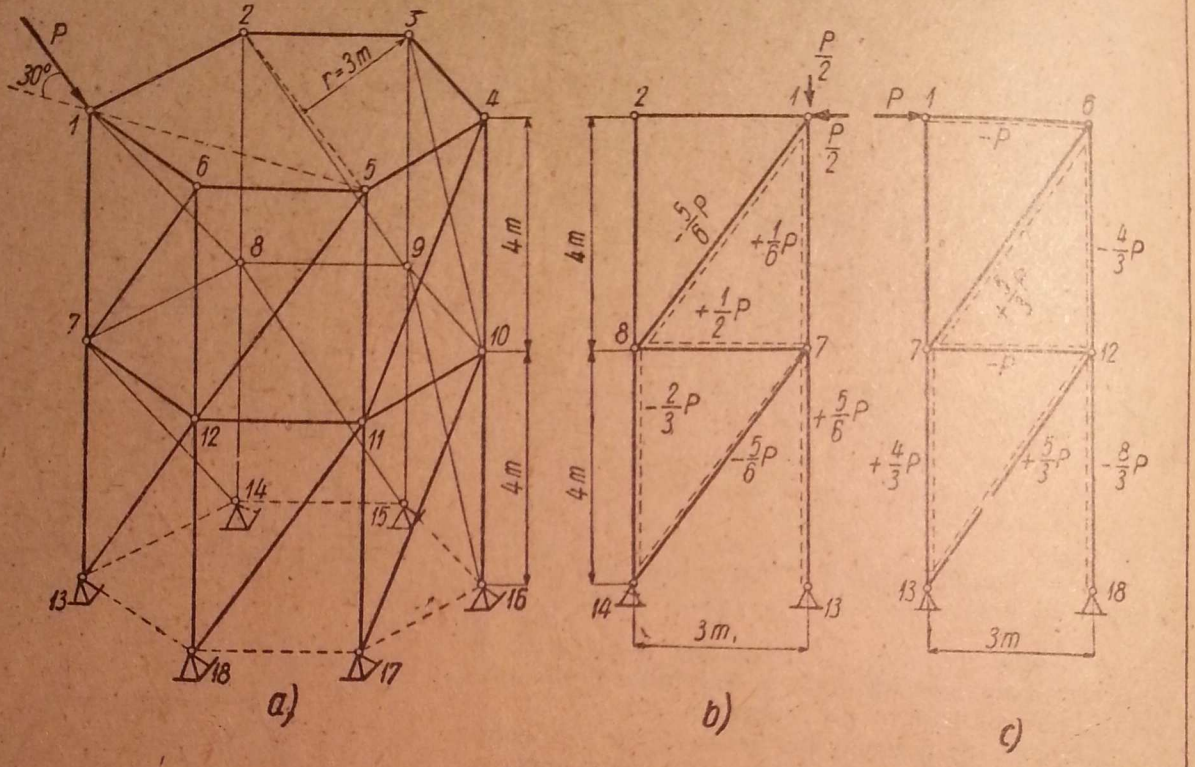


Fig. 407.

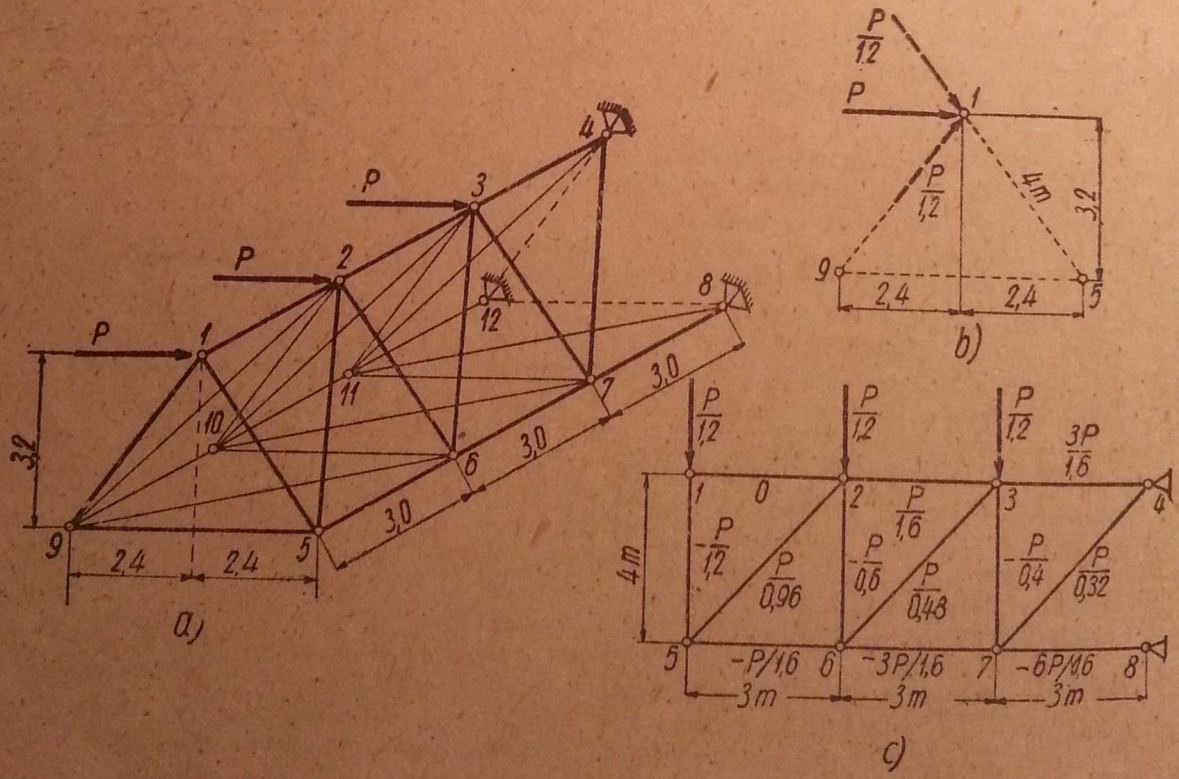


Fig. 408.

Aplicația 91. Să se determine eforturile în barele cupolei din fig. 409, *a*, care este simetrică în raport cu axa verticală $0-0$ și încărcată simetric cu sarcinile verticale P_1, P_2, P_3, în nodurile celor trei inele.

Răspuns. Sarcinile exterioare P_1, P_2, P_3 pe unul dintre cele șase meridiane, de exemplu : meridianul $A-B-C-E$, sînt cuprinse în planul meridianului. Dacă se izolează acest meridian — pentru echilibru — trebuie ca forțele de legătură din barele secționate, care sînt barele inelelor orizontale (I) și diagonalele (D), să admită o rezultantă în fiecare nod care să se găsească în planul meridianului. Această condiție este realizată dacă se admit eforturi nule în diagonale și eforturi egale în barele aceluiași inel orizontal.

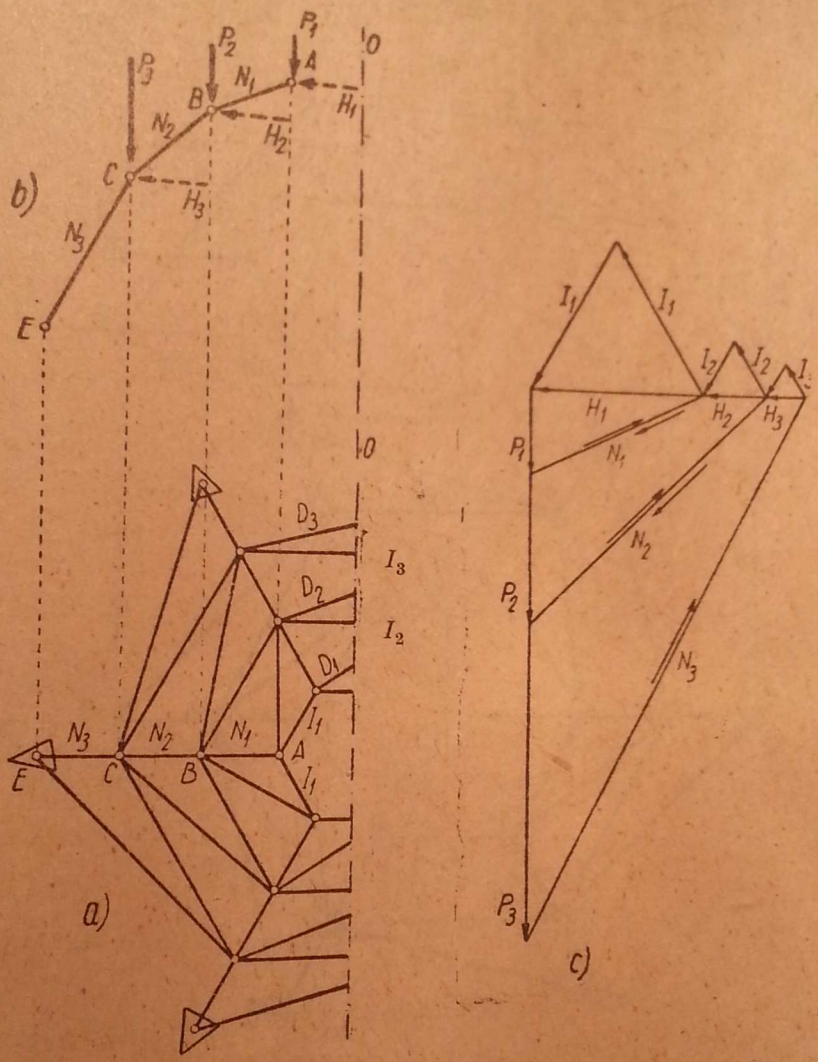


Fig. 409.

Cu aceste observații se izolează meridianul $A-B-C-E$ (fig. 409, *b*) și se proiectează toate forțele în planul său. În nodul A se aplică sarcina P_1, rezultanta H_1 a celor două eforturi I_1 din inelul superior și efortul N_1 din bara $A-B$. În fig. 409, *c* este construit poligonul forțelor din nodul A, de unde, P_1 fiind dat, se deduc valorile N_1 și H_1. Apoi se trece la poligonul forțelor din nodul B, unde, cunoscînd pe N_1 și P_2, se determină N_2 și H_2, și în nodul C, unde din N_2 și P_3, se deduc N_3 și H_3.

Construind apoi pe H_1, H_2, H_3 triunghiuri echilaterale în plane orizontale, se obțin valorile eforturilor I_1, I_2, I_3, din barele celor trei inele orizontale (fig. 409, *c*).

Soluția găsită satisface toate condițiile de echilibru al nodurilor, deci este justă și unică.

Aplicația 92. Să se determine eforturile în barele cupolei din fig. 410, acționată de sarcina orizontală radială F în nodul *1*.

Răspuns. Din separarea nodurilor *2*, *3*, *4*, *5* și *6* rezultă că : $N_{1-2} = N_{2-3} = N_{2-4} = N_{4-5} = N_{5-6} = 0$, deoarece în fiecare nod cîte trei bare sînt într-un plan, și a patra este în afara acestui plan. Apoi, în fiecare dintre aceste noduri au rămas cîte două bare care au deci eforturi nule :

$$N_{2-8} = N_{2-9} = N_{3-9} = N_{3-10} = N_{4-10} = N_{4-11} = N_{5-11} = N_{5-12} = 0.$$

Trecînd acum la etajul inferior, pe baza aceleași considerații se obține :

$$N_{8-9} = N_{9-10} = N_{10-11} = 0, \text{ și apoi,}$$

$$N_{9-15} = N_{9-16} = N_{10-16} = N_{10-17} = 0.$$

În fig. 410 în proiecție orizontală au rămas cu o singură linie barele inactive, și sînt dublate cu cîte o linie punctată barele cu eforturi.

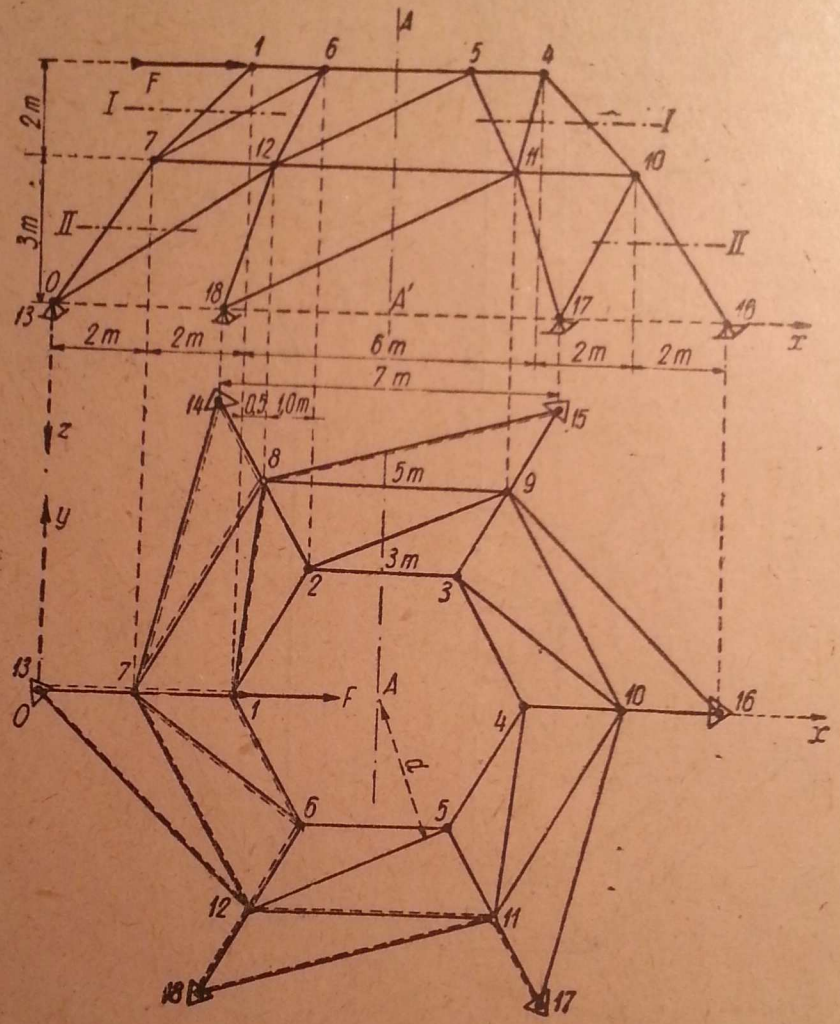


Fig. 410.

Eforturile în barele active se determină prin separarea nodurilor în ordinea *1*, *6*, *8*, *7*, *12*, *11*.

Echilibrul nodurilor se exprimă analitic prin proiecțiile pe trei axe Ox, Oy, Oz orientate ca în figură.

Pentru calculul elementelor geometrice și trigonometrice se alcătuiește tabela 9 unde lungimile barelor sînt date de expresia :

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2},$$

iar cosinușii directori, de expresiile :

$$\alpha_{ij} = \frac{x_{ij}}{l_{ij}} ; \quad \beta_{ij} = \frac{y_{ij}}{l_{ij}} ; \quad \gamma_{ij} = \frac{z_{ij}}{l_{ij}},$$

semnele lor fiind date de semnele proiecțiilor x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} pe axe.

Tabela 9

Bara	Proiecțiile pe axe							Cosinușii directori		
	x_{ij}	y_{ij}	z_{ij}	x_{ij}^2	y_{ij}^2	z_{ij}^2	l_{ij}	α_{ij}	β_{ij}	γ_{ij}
1—6	1,5	−2,60	0	2,25	6,75	0	3,00	0,500	−0,866	0
1—7	−2,0	0	2	4	0	4	2,83	−0,707	0	0,707
1—8	0,5	4,33	2	0,25	18,75	4	4,80	0,104	0,903	0,417
6—7	−3,5	2,60	2	12,25	6,75	4	4,80	−0,730	0,542	0,417
6—12	−1,0	−1,73	2	1	3	4	2,83	−0,354	−0,612	0,707
8—7	−2,5	−4,33	0	6,25	18,75	0	5,00	−0,500	−0,866	0
8—15	6,0	1,73	3	36	3	9	6,93	0,866	0,250	0,433
8—14	−1,0	1,73	3	1	3	9	3,60	−0,277	0,480	0,832
7—14	1,5	6,06	3	2,25	36,75	9	6,93	0,217	0,875	0,433
7—13	−2,0	0	3	4	0	9	3,60	−0,555	0	0,832
7—12	2,5	−4,33	0	6,25	18,75	0	5,00	0,500	−0,866	0
12—13	−4,5	4,33	3	20,25	18,75	9	6,93	−0,650	0,625	0,433
12—18	−1,0	−1,73	3	1	3	9	3,60	−0,277	−0,480	0,832
12—11	5,0	0	0	25	0	0	5,00	1,000	0	0
11—18	−6,0	−1,73	3	36	3	9	6,93	−0,866	−0,250	0,433
11—17	1,0	−1,73	3	1	3	9	3,60	0,277	−0,480	0,832

Echilibrul nodului *1*:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; \quad 0{,}5\, N_{1-6} - 0{,}707\, N_{1-7} + 0{,}104\, N_{1-8} + F = 0; \\ \Sigma Y &= 0; \quad -0{,}866\, N_{1-6} + 0 \cdot N_{1-7} + 0{,}903\, N_{1-8} = 0; \\ \Sigma Z &= 0; \quad 0 \cdot N_{1-6} + 0{,}707\, N_{1-7} + 0{,}417\, N_{1-8} = 0, \end{aligned} \tag{6.41}$$

de unde rezultă: $N_{1-6} = -F$; $N_{1-7} = +0{,}566\, F$; $N_{1-8} = -0{,}959\, F$.

Echilibrul nodului *6*:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; \quad -0{,}730\, N_{6-7} - 0{,}354\, N_{6-12} - 0{,}5\, N_{6-1} = 0; \\ \Sigma Y &= 0; \quad 0{,}542\, N_{6-7} - 0{,}612\, N_{6-12} + 0{,}866\, N_{6-1} = 0; \\ \Sigma Z &= 0; \quad 0{,}417\, N_{6-7} + 0{,}707\, N_{6-12} + 0 \cdot N_{6-1} = 0, \end{aligned} \tag{6.42}$$

unde $N_{6-1} = N_{1-6} = -F$ obținut la echilibrul nodului *1*.

Cosinușii directori ai lui *6—1* sînt egali și de sens contrar cu cei ai lui *1—6*, din tabela 9 ($\alpha_{6-1} = -\alpha_{1-6}$; $\beta_{6-1} = -\beta_{1-6}$; $\gamma_{6-1} = -\gamma_{1-6}$).

Din prima și a treia ecuație (6.42) se obține:

$$N_{6-7} = +0{,}959\, F \text{ și } N_{6-12} = -0{,}566\, F,$$

iar ecuația a doua servește pentru verificare.

Echilibrul nodului *8*:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; \quad -0{,}5\, N_{8-7} + 0{,}866\, N_{8-15} - 0{,}277\, N_{8-14} - 0{,}104\, N_{8-1} = 0; \\ \Sigma Y &= 0; \quad -0{,}866\, N_{8-7} + 0{,}250\, N_{8-15} + 0{,}480\, N_{8-14} - 0{,}903\, N_{8-1} = 0; \\ \Sigma Z &= 0; \quad 0 \cdot N_{8-7} + 0{,}433\, N_{8-15} + 0{,}832\, N_{8-14} - 0{,}417\, N_{8-1} = 0, \end{aligned} \tag{6.43}$$

unde $N_{8-1} = -0{,}959\, F$, iar cosinușii directori ai lui *8—1* sînt egali și de sens contrar cu ai lui *1—8*. Rezultă:

$$N_{8-7} = +0{,}733\, F; \quad N_{8-15} = +0{,}132\, F; \quad N_{8-14} = -0{,}549\, F.$$

Echilibrul nodului 7 :

$$\begin{aligned}
&\Sigma X = 0;\ 0{,}217\, N_{7-14} - 0{,}555\, N_{7-13} + 0{,}500\, N_{7-12} + 0{,}707\, N_{7-1} + \\
&\qquad + 0{,}730\, N_{7-6} + 0{,}500\, N_{7-8} = 0; \\
&\Sigma Y = 0;\ 0{,}875\, N_{7-14} + 0 \cdot N_{7-13} - 0{,}866\, N_{7-12} + 0 - 0{,}542\, N_{7-6} + \\
&\qquad + 0{,}866\, N_{7-8} = 0; \\
&\Sigma Z = 0;\ 0{,}433\, N_{7-14} + 0{,}832\, N_{7-13} + 0 - 0{,}707\, N_{7-1} - 0{,}417\, N_{7-6} + 0 = 0,
\end{aligned} \tag{6.44}$$

în care N_{7-1}, N_{7-6} și N_{7-8} au valorile determinate mai sus.

Rezultă :

$$N_{7-14} = -0{,}990\, F;\quad N_{7-13} = +1{,}476\, F;\quad N_{7-12} = -0{,}867\, F.$$

Echilibrul nodului 12 :

$$\begin{aligned}
&\Sigma X = 0;\ -0{,}650\, N_{12-13} - 0{,}277\, N_{12-18} + 1 \cdot N_{12-11} + 0{,}354\, N_{12-6} - 0{,}5\, N_{12-7} = 0; \\
&\Sigma Y = 0;\ +0{,}625\, N_{12-13} - 0{,}480\, N_{12-18} + 0 + 0{,}612\, N_{12-6} + 0{,}866\, N_{12-7} = 0; \\
&\Sigma Z = 0;\ +0{,}433\, N_{12-13} + 0{,}832\, N_{12-18} + 0 - 0{,}707\, N_{12-6} + 0 = 0,
\end{aligned} \tag{6.45}$$

în care N_{12-6} și N_{12-7} sînt determinate anterior.

Rezultă :

$$N_{12-13} = +0{,}990\, F;\quad N_{12-18} = -0{,}995\, F;\quad N_{12-11} = +0{,}133\, F.$$

Echilibrul nodului 11 :

$$\begin{aligned}
&\Sigma X = 0;\ -0{,}866\, N_{11-18} + 0{,}277\, N_{11-17} - 1 \cdot N_{11-12} = 0; \\
&\Sigma Y = 0;\ -0{,}250\, N_{11-18} - 0{,}480\, N_{11-17} + 0 = 0; \\
&\Sigma Z = 0;\ +0{,}433\, N_{11-18} + 0{,}832\, N_{11-17} + 0 = 0,
\end{aligned} \tag{6.46}$$

în care $N_{11-12} = 0{,}133\, F$.

Ultimele două ecuații sînt identice, coeficienții necunoscutelor fiind proporționali.

Din primele două rezultă :

$$N_{11-18} = -0{,}132\, F;\qquad N_{11-17} = +0{,}069\, F.$$

Au fost astfel determinate eforturile în toate barele active pentru sarcina orizontală radială F în nodul 1.

În metoda separării nodurilor, eforturile determinîndu-se unele din altele, este necesar să se caute și ecuații generale de verificare, pentru a putea repera eventualele erori de calcul.

În cazul de față, dacă se face o secțiune orizontală generală prin fiecare etaj al cupolei, ecuațiile de proiecții pe cele trei axe trebuie să fie satisfăcute. Din secțiunea orizontală $I-I$ a etajului superior rezultă :

$$\begin{aligned}
&\Sigma X = 0;\ N_{1-8}\,\alpha_{1-8} + N_{6-7}\,\alpha_{6-7} + N_{1-7}\,\alpha_{1-7} + N_{6-12}\,\alpha_{6-12} + F = 0; \\
&\Sigma Y = 0;\ N_{1-8}\,\beta_{1-8} + N_{6-7}\,\beta_{6-7} + N_{1-7}\,\beta_{1-7} + N_{6-12}\,\beta_{6-12} = 0; \\
&\Sigma Z = 0;\ N_{1-8}\,\gamma_{1-8} + N_{6-7}\,\gamma_{6-7} + N_{1-7}\,\gamma_{1-7} + N_{6-12}\,\gamma_{6-12} = 0.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

De asemenea, se poate lua ecuația de momente a eforturilor din barele secționate prin $I-I$ față de axa verticală de simetrie AA'. Forța F și eforturile din barele meridianelor $1-7$ și $6-12$ întîlnesc această axă. Deci, în ecuația de momente apar numai eforturile din diagonale :

$$\Sigma \mathfrak{M}_{AA'} = 0;\ \frac{l'_{1-8}}{l_{1-8}} \cdot d \cdot (N_{1-8} + N_{6-7}) = 0, \tag{6.48}$$

în care s-a notat cu l'_{1-8} proiecția pe planul orizontal xOy a lungimii l_{1-8}, ținînd seamă că $l'_{1-8} = l'_{6-7}$ și $l_{1-8} = l_{6-7}$, iar cu d, distanța în planul orizontal de la centrul A la diagonalele etajului superior.

Din (6.48) rezultă :

$$N_{1-8} + N_{6-7} = 0 \quad \text{sau} \quad N_{1-8} = -N_{6-7}. \tag{6.48'}$$

Dacă se ține seamă de (6.48′) în a treia ecuație din (6.47), unde $\gamma_{1-8} = \gamma_{6-7}$ și $\gamma_{1-7} = \gamma_{6-12}$, rezultă :

$$N_{1-7} + N_{6-12} = 0 \quad \text{sau} \quad N_{1-7} = -N_{6-12}. \tag{6.49}$$

Dacă se ține seamă de (6.48′) și de faptul că $\beta_{1-7} = 0$, a doua ecuație din (6.47) devine :

$$N_{1-8}(\beta_{1-8} - \beta_{6-7}) + N_{6-12}\beta_{6-12} = 0,$$

care, în cifre, înseamnă :

$$-0,959\ (5,903 - 0,542) - 0,566\ (-0,612) = -0,346 + 0,346 = 0.$$

Prima ecuație din (6.47) devine :

$$N_{1-8}(\alpha_{1-8} - \alpha_{6-7}) + N_{1-7}(\alpha_{1-7} - \alpha_{6-12}) + F = 0$$

sau :

$$-0,959\ (0,104 + 0,730) + 0,566\ (-0,707 + 0,354) + 1 = -0,959 \cdot 0,834 - -0,566 \cdot 0,353 + 1 = -0,800 - 0,200 + 1 = 0.$$

La o secțiune orizontală generală $II-II$ prin barele etajului inferior, din aceleași considerente de mai sus, rezultă din ecuația de momente în raport cu axa verticală AA' :

$$\Sigma \mathfrak{M}_{AA'} = 0; \quad N_{8-15} + N_{7-14} + N_{12-13} + N_{11-18} = 0, \tag{6.50}$$

care este verificată de valorile eforturilor calculate mai sus.

Iar dacă în ecuația de proiecție pe Oz se ține seamă de (6.50), se obține :

$$N_{8-14} + N_{7-13} + N_{12-18} + N_{11-17} = 0, \tag{6.51}$$

verificată de valorile eforturilor aflate.

Celelalte două ecuații de proiecție pe axele Ox și Oy duc la :

$$\Sigma X = 0; \quad 0,866\,(N_{8-15} - N_{11-18}) + 0,217\,N_{7-14} - 0,650\,N_{12-13} - -0,277\,(N_{8-14} + N_{12-18} - N_{11-17}) - 0,555\,N_{7-13} + F = 0.$$

În cifre :

$$0,866 \cdot 0,264 - 0,217 \cdot 0,990 - 0,650 \cdot 0,990 + 0,277 \cdot 1,613 - 0,555 \cdot 1,477 + 1 = -0,002 \cong 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 0,250\,(N_{8-15} - N_{11-18}) + 0,875 \cdot N_{7-14} + 0,625\,N_{12-13} + + 0,480\,(N_{8-14} - N_{12-18} - N_{11-17}) = 0.$$

În cifre :

$$0,250 \cdot 0,264 - 0,875 \cdot 0,990 + 0,625 \cdot 0,990 + 0,480 \cdot 0,377 = -0,0005 \cong 0.$$

Observație. Se propune ca acest exercițiu să fie refăcut prin descompunere în sisteme plane.

Se vor regăsi rezultatele :

$$N_{1-6} = -F; \quad N_{6-7} = -N_{1-8} = 0,2\sqrt{23}\,F = 0,959\,F;$$

$$N_{1-7} = -N_{6-12} = 0,4\sqrt{2}F = 0,566\,F;$$

$$N_{7-12} = -\frac{2,6}{3}F = -0,867\,F; \quad N_{11-12} = \frac{0,4}{3}F = 0,133\,F; \quad N_{8-15} = -N_{11-18} = \frac{1,6\sqrt{3}}{21}F = 0,132\,F;$$

$$N_{12-18} = -\frac{5,8\sqrt{13}}{21}F = -0,995\,F; \quad N_{12-13} = -N_{7-14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}F = 0,990\,F; \tag{6.52}$$

$$N_{7-8} = \frac{2,2}{3}F = 0,733\,F; \quad N_{7-13} = \frac{8,6\sqrt{13}}{21}F = 1,476\,F;$$

$$N_{8-14} = -\frac{3,2\sqrt{13}}{21}F = -0,549\,F; \quad N_{11-17} = \frac{0,4\sqrt{13}}{21}F = 0,069\,F.$$

Aplicația 93. Să se determine eforturile în barele cupolei din aplicația precedentă (fig. 410) pentru o sarcină verticală P aplicată în nodul *1*.

Răspuns. Se utilizează tabela 9 cu datele geometrice din aplicația precedentă și se scriu ecuațiile de echilibru din noduri în aceeași ordine : *1*, *6*, *8*, *7*, *12*, *11*, deoarece barele active sînt tot cele din aplicația precedentă.

Echilibrul nodului *1* duce la ecuațiile :

$$\Sigma X = 0; \quad 0{,}5\, N_{1-6} - 0{,}707\, N_{1-7} + 0{,}104\, N_{1-8} = 0;$$
$$\Sigma Y = 0; \quad -0{,}866\, N_{1-6} + 0 \cdot N_{1-7} + 0{,}903\, N_{1-8} = 0;$$
$$\Sigma Z = 0; \quad 0 + 0{,}707\, N_{1-7} + 0{,}417\, N_{1-8} + P = 0,$$

de unde rezultă : $N_{1-6} = -P$; $N_{1-8} = -0{,}959\, P$; $N_{1-7} = -0{,}849\, P$.

Trecînd apoi la celelalte noduri exact ca în aplicația 92, se obține succesiv :

$$\begin{aligned}
&\text{în nodul } 6: \ N_{6-7} = 0{,}959\, P; \ N_{6-12} = -0{,}566\, P;\\
&\text{în nodul } 8: \ N_{8-7} = 0{,}733\, P; \ N_{8-15} = 0{,}132\, P; \ N_{8-14} = -0{,}549\, P;\\
&\text{în nodul } 7: \ N_{7-14} = -0{,}660\, P; \ N_{7-13} = 0{,}103\, P; \ N_{7-12} = -0{,}533\, P; \qquad (6.53)\\
&\text{în nodul } 12: \ N_{12-13} = 0{,}660\, P; \ N_{12-18} = -0{,}824\, P; \ N_{12-11} = 0{,}133\, P;\\
&\text{în nodul } 11: \ N_{11-18} = -0{,}132\, P; \ N_{11-17} = 0{,}069\, P.
\end{aligned}$$

Prin descompunerea în sisteme plane s-ar fi obținut aceleași rezultate sub forma :

$$N_{1-6} = -P; \quad N_{6-7} = -N_{1-8} = 0{,}2\sqrt{23}\, P; \quad N_{1-7} = -0{,}6\sqrt{2}\, P; \quad N_{7-8} = \frac{2{,}2}{3} P;$$

$$N_{8-14} = -\frac{3{,}2\sqrt{13}}{21} P; \quad N_{8-15} = -N_{11-18} = \frac{1{,}6\sqrt{3}}{21} P; \quad N_{11-17} = \frac{0{,}4\sqrt{13}}{21} P;$$

$$N_{11-12} = \frac{0{,}4}{3} P; \quad N_{7-12} = -\frac{1{,}6}{3} P; \quad N_{7-13} = \frac{0{,}6\sqrt{13}}{21} P;$$

$$N_{12-13} = -N_{7-14} = \frac{8\sqrt{3}}{21} P; \quad N_{12-18} = -\frac{4{,}8\sqrt{13}}{21} P; \quad N_{12-6} = -0{,}4\sqrt{2}\, P.$$

Aplicația 94. Să se determine eforturile în barele cupolei din aplicația 92 (fig. 410), întîi pentru o încărcare orizontală radială F' în nodul *7*, și apoi, pentru o încărcare verticală P' în nodul *7*.

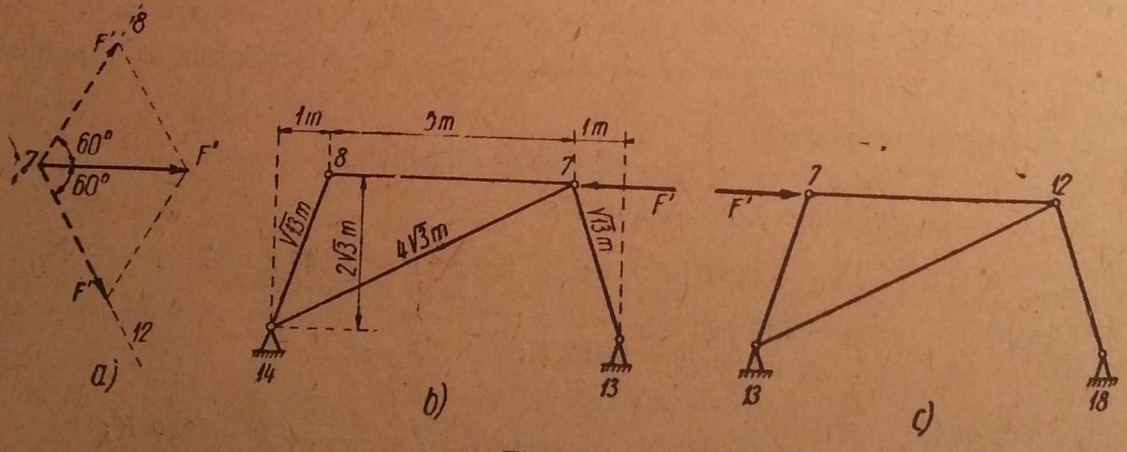


Fig. 411.

Răspuns. Rezultă că pentru o încărcare oarecare în nodul *7* se obțin eforturi numai în barele *7—13*, *7—12*, *13—12*, *12—18* și *7—14*. Restul barelor sînt inactive.

Pentru aflarea eforturilor se poate exprima echilibrul nodului *7*, și apoi al nodului *12*, cu ajutorul elementelor de la aplicația 92, sau se poate descompune sistemul în grinzi cu zăbrele plane.

Se va face mai jos descompunerea în sisteme plane.

Sarcina orizontală radială F' se descompune după direcțiile $7-8$ și $7-12$ (fig. 411, a) și cu componentele respective care au, de asemenea, valoarea F', se încarcă grinzile cu zăbrele plane din fig. 411, b și c ale căror elemente geometrice sînt trecute direct în figură. Rezultă :

$$N_{7-12} = -F'; \quad N_{7-13} = -N_{12-18} = \frac{\sqrt{13}}{7} F' = 0{,}515\, F';$$

$$N_{12-13} = -N_{7-14} = \frac{4\sqrt{3}}{7} F' = 0{,}990\, F'; \quad N_{7-8} = N_{8-14} = 0. \tag{6.54}$$

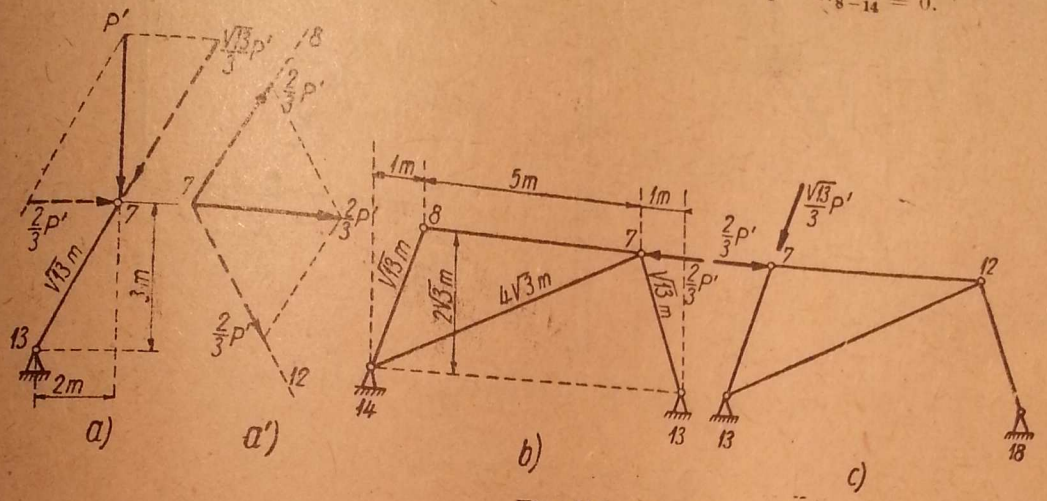


Fig. 412.

Încărcarea verticală P' se descompune întîi după direcția radială orizontală și direcția $7-13$ (fig. 412, a). Apoi componenta după orizontală se descompune după direcțiile $7-12$ și $7-8$ (fig. 412, a') și cu valorile respective se încarcă grinzile cu zăbrele plane ca în fig. 412, b și c. Rezultă :

$$N_{7-12} = -\frac{2}{3} P'; \quad N_{7-13} = -\frac{5\sqrt{13}}{21} P' = -0{,}858\, P'; \quad N_{12-18} = -\frac{2\sqrt{13}}{21} P' =$$

$$= -0{,}343\, P'; \tag{6.55}$$

$$N_{12-13} = -N_{7-14} = \frac{8\sqrt{3}}{21} P' = 0{,}660\, P'; \quad N_{7-8} = N_{8-14} = 0.$$

Aplicația 95. Pe baza rezultatelor obținute în aplicațiile 92, 93 și 94, să se determine eforturile în barele cupolei din fig. 410, pentru acțiunea vîntului presupusă ca o sarcină normală pe suprafața învelitorii cu valoarea q_i în kg/m² după legea :

$$q_i = p_v \cdot \alpha_{in}, \tag{6.56}$$

unde $p_v = 100$ kg/m², iar α_{in} este cosinusul director al normalei la suprafață în punctul considerat i, cu direcția vîntului.

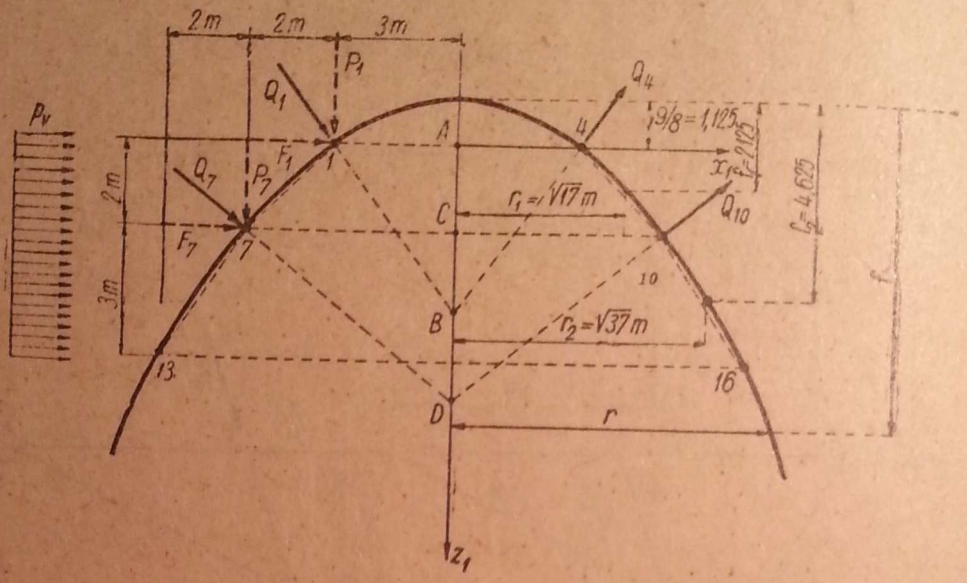
Apoi să se calculeze eforturile din greutatea permanentă $g = 150$ kg/m², uniform repartizată pe suprafața învelitorii.

Răspuns. Nodurile unei secțiuni meridiane se găsesc pe parabola :

$$z_1 = -\frac{9}{8} + \frac{1}{8} x_1^2 \tag{6.57}$$

față de axele Ax_1 și Az_1 (fig. 413), astfel că toate nodurile cupolei se găsesc pe un paraboloid de revoluție cu axa Az_1.

Învelitoarea are forma acestui paraboloid și transmite presiunea vîntului sub formă de sarcini concentrate la nodurile cupolei. Evaluarea acestor sarcini concentrate Q_i se face aproximativ, multiplicînd suprafața de învelitoare aferentă unui nod i, (Ω_i), cu presiunea



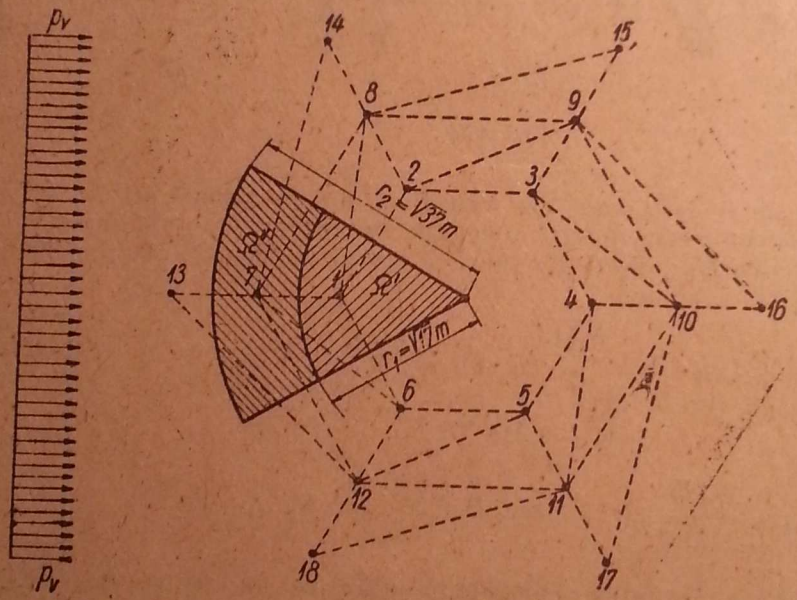


Fig. 413.

vîntului p_v și cu cosinusul director α_{in} al unghiului dintre normala la paraboloid în nodul i și direcția vîntului :

$$Q_i = \Omega_i \cdot p_v \cdot \alpha_{in} = W_i \alpha_{in}, \tag{6.58}$$

în care s-a notat :

$$W_i = \Omega_i \cdot p_v. \tag{6.59}$$

Forța Q_i are direcția normalei pe paraboloid în nodul i, Din expresiile (6.58) sau (6.59) rezultă că s-a admis că pe jum tatea de cupolă din fața vîntului sarcinile Q_i sînt presiuni dirijate spre interior, iar pe jumătatea cealaltă sînt depresiuni (sucțiuni) dirijate dinspre interior, spre exteriorul cupolei.

Pentru evaluarea suprafețelor Ω_i se utilizează expresia aproximativă a suprafeței laterale a paraboloidului de revoluție:

$$\Omega = \pi r^2 \left[1 + \left(\frac{f}{r}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{f}{r}\right)^4\right], \tag{6.60}$$

în care r și f au semnificațiile din fig. 413.

Suprafața aferentă a nodurilor unui același inel se limitează până la jumătatea înălțimii între noduri (fig. 413). Rezultă pentru nodurile inelului superior suprafața aferentă Ω' din elementele:

$$f_1 = \frac{9}{8} + 1 = 2{,}125 \text{ și apoi din ecuația (6.57):}$$

$$1 = -\frac{9}{8} + \frac{1}{8} r_1^2 \quad \text{sau} \quad r_1^2 = 17.$$

Cu expresia (6.60) se obține:

$$\Omega' = \frac{1}{6}\pi r_1^2 \left[1 + \left(\frac{f}{r_1}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{f_1}{r_1}\right)^4\right] = \frac{3{,}14 \cdot 17}{6}\left[1 + \frac{2{,}125^2}{17} + \frac{2}{3}\left(\frac{2{,}125^2}{17}\right)^2\right] = 10{,}80 \text{ m}^2$$

Suprafața aferentă Ω'' a nodurilor inelului inferior se deduce la fel:

$$f_2 = \frac{9}{8} + 3{,}5 = 4{,}625 \text{ m}; \quad r_2^2 = 37 \text{ și apoi cu (6.60):}$$

$$\Omega' + \Omega'' = \frac{1}{6}\pi r_2^2 \left[1 + \left(\frac{f_2}{r_2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{f_2}{r_2}\right)^4\right] = \frac{3{,}14 \cdot 37}{6}\left[1 + \frac{4{,}625^2}{37} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\left(\frac{4{,}625^2}{37}\right)^2\right] = 26{,}20 \text{ m}^2,$$

de unde:

$$\Omega'' = 26{,}20 - 10{,}80 = 15{,}40 \text{ m}^2.$$

Cu expresiile (6.59) se obține:
Pentru nodurile inelului superior $W' = p_v \Omega' = 100 \cdot 10{,}80 = 1\,080$ kg.
Pentru nodurile inelului inferior $W'' = p_v \Omega'' = 100 \cdot 15{,}40 = 1\,540$ kg.
Prin derivarea expresiei (6.57) se obține lungimea constantă a subnormalei din fig. 413:

$$AB = CD = \frac{x_1}{z_1'} = \frac{x_1}{\frac{1}{4} x_1} = 4 \text{ m},$$

și apoi lungimea normalelor:

$$l_{1B} = 5 \text{ m} \quad \text{și} \quad l_{7-D} = \sqrt{41} \text{ m}.$$

Cu aceste elemente se pot calcula cosinușii directori α_{in} în nodurile *1* și *2* ale inelului superior și *7* și *8* ale inelului inferior. Vîntul are direcția *1—4*:

$$\alpha_{1B} = \frac{x_{1B}}{l_{1B}} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \alpha_{2B} = \frac{x_{2B}}{l_{2B}} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3;$$

$$\alpha_{7D} = \frac{x_{7D}}{l_{7D}} = \frac{5}{\sqrt{41}}; \quad \alpha_{8D} = \frac{x_{8D}}{l_{8D}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{41}}.$$

Cu expresia (6.58) se deduc sarcinile provenite din presiunea vîntului pe jumătatea din stînga a cupolei. Sarcinile Q au direcția normalei la paraboloid în nodul respectiv:

$$Q_1 = W' \cdot \alpha_{1B} = 0{,}6\ W';\ Q_2 = Q_6 = W' \alpha_{2B} = 0{,}3\ W';$$

$$Q_7 = W'' \cdot \alpha_{7D} = \frac{5}{\sqrt{41}}\ W'';\ Q_8 = Q_{12} = \alpha_{8D} \cdot W'' = \frac{2{,}5}{\sqrt{41}}\ W''.$$

Pe jumătatea din dreapta sînt aceleași sarcini, dar dirijate spre exteriorul paraboloidului.

Aceste sarcini Q se descompun în două componente, una verticală P, și alta orizontală cu direcția radială F (fig. 413), astfel că se vor putea folosi rezultatele aplicațiilor 92, 93, 94.

Ținînd seamă de elementele geometrice din figură, valorile acestor proiecții ale forțelor Q sînt:

Pe inelul superior:

$$F_1 = -F_4 = Q_1 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot W' = 0{,}36\ W';$$

$$P_1 = -P_4 = Q_1 \cdot \frac{4}{5} = 0.6 \cdot 0{,}8\ W' = 0{,}48\ W';$$

$$F_2 = F_6 = -F_3 = -F_5 = Q_2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}3 \cdot 0{,}6\ W' = 0{,}18\ W' = \frac{1}{2} F_1;$$

$$P_2 = P_6 = -P_3 = -P_5 = Q_2 \frac{4}{5} = 0{,}3 \cdot 0{,}8\ W' = 0{,}24\ W' = \frac{1}{2} P_1.$$

Pe inelul inferior:

$$F_7 = -F_{10} = Q_7 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{25}{41}\ W'' = 0{,}610\ W'';$$

$$P_7 = -P_{10} = Q_7 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{20}{41}\ W'' = 0{,}488\ W'';$$

$$F_8 = F_{12} = -F_9 = -F_{11} = Q_8 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{12{,}5}{41}\ W'' = 0{,}305\ W'' = \frac{1}{2} F_7;$$

$$P_8 = P_{12} = -P_9 = -P_{11} = Q_8 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{10}{41}\ W'' = 0{,}244\ W'' = \frac{1}{2} P_7.$$

Determinarea eforturilor în bare se face prin suprapunere, aplicînd pe rînd cîte o forță orizontală radială F și apoi o forță verticală P în fiecare nod al cupolei, deoarece pentru fiecare dintre aceste cazuri avem eforturile calculate în aplicațiile 92, 93, 94 date de formulele: (6.52), (6.53), (6.54), (6.55).

La barele inelului superior suprapunerea efectelor este ușor de urmărit:

$$N_{3-4} = -N_{1-6} = F_1 + P_1 = 0{,}36\ W' + 0{,}48\ W' = 0{,}84\ W' = 0{,}84 \cdot 1\,080 = 907\ \text{kg};$$

$$N_{2-3} = N_{4-5} = -N_{1-2} = -N_{5-6} = F_2 + P_2 = (0{,}18 + 0{,}24)\ W' = 0{,}42\ W' =$$

$$= 0{,}42 \cdot 1\,080 = 454\ \text{kg} = \frac{1}{2} N_{3-4}.$$

Pentru celelalte bare se fac tabele de suprapunere și eforturile se obțin prin însumarea coloanelor verticale așa cum se arată în paginile următoare:

Eforturile în diagonalele etajului superior sînt deduse din tabela 10 :

Tabela 10

Bara / Sarcina	1—8	2—9	3—10	4—11	5—12	6—7
F_1 P_1	$-0{,}959\ F_1$ $-0{,}959\ P_1$	0 0	0 0	0 0	0 0	$0{,}959\ F_1$ $0{,}959\ P_1$
F_2 P_2	$0{,}959\ F_2$ $0{,}959\ P_2$	$-0{,}959\ F_2$ $-0{,}959\ P_2$	0 0	0 0	0 0	0 0
$F_3=-F_2$ $P_3=-P_2$	0 0	$-0{,}959\ F_2$ $-0{,}959\ P_2$	$0{,}959\ F_2$ $0{,}959\ P_2$	0 0	0 0	0 0
$F_4=-F_1$ $P_4=-P_1$	0 0	0 0	$-0{,}959\ F_1$ $-0{,}959\ P_1$	$0{,}959\ F_1$ $0{,}959\ P_1$	0 0	0 0
$F_5=-F_2$ $P_5=-P_2$	0 0	0 0	0 0	$-0{,}959\ F_2$ $-0{,}959\ P_2$	$0{,}959\ F_2$ $0{,}959\ P_2$	0 0
$F_6=F_2$ $P_6=P_2$	0 0	0 0	0 0	0 0	$0{,}959\ F_2$ $0{,}959\ P_2$	$-0{,}959\ F_2$ $-0{,}959\ P_2$

Făcînd adunările pe coloane, se obține :

$N_{6-7} = N_{4-11} = -N_{1-8} = -N_{3-10} = 0{,}959\,(F_1 + P_1 - F_2 - P_2) = 0{,}959\,(0{,}36 + 0{,}48 - 0{,}18 - 0{,}24) \cdot W' = 0{,}959 \cdot 0{,}42\ W' = 0{,}403\ W' = 0{,}403 \cdot 1\,080 = 435$ kg ;

$N_{5-12} = -N_{2-9} = 2 \cdot 0{,}959\,(F_2 + P_2) = 2 \cdot 0{,}959\,(0{,}18 + 0{,}24)\ W' = 2 \cdot 0{,}959 \cdot 0{,}42\ W' = 0{,}806\ W' = 0{,}806 \cdot 1\,080 = 870$ kg $= 2\frac{1}{4} \cdot N_{6-7}$.

Eforturi în meridianele etajului superior :

Tabela 11

Bara / Sarcina	1—7	2—8	3—9	4—10	5—11	6—12
F_1 P_1	$0{,}566\ F_1$ $-0{,}849\ P_1$	0 0	0 0	0 0	0 0	$-0{,}566\ F$ $-0{,}566\ P$
F_2 P_2	$-0{,}566\ F_2$ $-0{,}566\ P_2$	$0{,}566\ F_2$ $-0{,}849\ P_2$	0 0	0 0	0 0	0 0
$F_3=-F_2$ $P_3=-P_2$	0 0	$0{,}566\ F_2$ $0{,}566\ P_2$	$-0{,}566\ F_2$ $0{,}849\ P_2$	0 0	0 0	0 0
$F_4=-F_1$ $P_4=-P_1$	0 0	0 0	$0{,}566\ F_1$ $0{,}566\ P_1$	$-0{,}566\ F_1$ $+0{,}849\ P_1$	0 0	0 0
$F_5=-F_2$ $P_5=-P_2$	0 0	0 0	0 0	$0{,}566\ F_2$ $0{,}566\ P_2$	$-0{,}566\ F_2$ $+0{,}849\ P_2$	0 0
$F_6=F_2$ $P_6=P_2$	0 0	0 0	0 0	0 0	$-0{,}566\ F_2$ $-0{,}566\ P_2$	$0{,}566\ F_2$ $-0{,}849\ P_2$

Adunînd coloanele se obține :

$$N_{2-8} = -N_{5-11} = 1{,}132\,F_2 - 0{,}283\,P_2 = (1{,}132 \cdot 0{,}18 - 0{,}283 \cdot 0{,}24)\,W' = 0{,}136\,W' = 0{,}136 \cdot 1\,080 = 147 \text{ kg};$$

$$N_{3-9} = -N_{6-12} = 0{,}566\,(F_1 + P_1) - 0{,}566\,F_2 + 0{,}849\,P_2 = (0{,}566 \cdot 0{,}84 - 0{,}566 \cdot 0{,}18 + 0{,}849 \cdot 0{,}24)\,W' = 0{,}577\,W' = 0{,}577 \cdot 1\,080 = 624 \text{ kg};$$

$$N_{4-10} = -N_{1-7} = 0{,}566\,(F_2 + P_2) - 0{,}566\,F_1 + 0{,}849\,P_1 = (0{,}566 \cdot 0{,}42 - 0{,}566 \cdot 0{,}36 + 0{,}849 \cdot 0{,}48)\,W' = 0{,}441\,W' = 0{,}441 \cdot 1\,080 = 476 \text{ kg}.$$

Tabele asemănătoare se fac pentru barele etajului inferior, dar aici vor interveni sarcinile din nodurile ambelor inele.

Eforturi în barele inelului inferior :

Tabela 12

Sarcina \ Bara	7—8	8—9	9—10	10—11	11—12	12—7
F_1 P_1 F_7 P_7	$0{,}733\,F_1$ $0{,}733\,P_1$ 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	$0{,}133\,F_1$ $0{,}133\,P_1$ 0 0	$-0{,}867\,F_1$ $-0{,}533\,P_1$ $-F_7$ $-0{,}667\,P_7$
F_2 P_2 F_8 P_8	$-0{,}867\,F_2$ $-0{,}533\,P_2$ $-F_8$ $-0{,}667\,P_8$	$0{,}733\,F_2$ $0{,}733\,P_2$ 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	$0{,}133\,F_2$ $0{,}133\,P_2$ 0 0
$F_3 = -F_2$ $P_3 = -P_2$ $F_9 = -F_8$ $P_9 = -P_8$	$-0{,}133\,F_2$ $-0{,}133\,P_2$ 0 0	$0{,}867\,F_2$ $0{,}533\,P_2$ F_8 $0{,}667\,P_8$	$-0{,}733\,F_2$ $-0{,}733\,P_2$ 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
$F_4 = -F_1$ $P_4 = -P_1$ $F_{10} = -F_7$ $P_{10} = -P_7$	0 0 0 0	$-0{,}133\,F_1$ $-0{,}133\,P_1$ 0 0	$0{,}867\,F_1$ $0{,}533\,P_1$ F_7 $0{,}667\,P_7$	$-0{,}733\,F_2$ $-0{,}733\,P_1$ 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
$F_5 = -F_2$ $P_5 = -P_2$ $F_{11} = -F_8$ $P_{11} = -P_8$	0 0 0 0	0 0 0 0	$-0{,}133\,F_2$ $-0{,}133\,P_2$ 0 0	$0{,}867\,F_2$ $0{,}533\,P_2$ F_8 $0{,}667\,P_8$	$-0{,}733\,F_2$ $-0{,}733\,P_2$ 0 0	0 0 0 0
$F_6 = F_2$ $P_6 = P_2$ $F_{12} = F_8$ $P_{12} = P_8$	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	$0{,}133\,F_2$ $0{,}133\,P_2$ 0 0	$-0{,}867\,F_2$ $-0{,}533\,P_2$ $-F_8$ $-0{,}667\,P_8$	$0{,}733\,F_2$ $0{,}733\,P_2$ 0 0

Prin însumare rezultă :

$$N_{8-9} = -N_{11-12} = -0{,}133\,(F_1 + P_1) + 1{,}6\,F_2 + 1{,}266\,P_2 + F_8 + 0{,}667\,P_8 = (-0{,}133 \cdot 0{,}84 + 1{,}6 \cdot 0{,}18 + 1{,}266 \cdot 0{,}24)\,W' + (0{,}305 + 0{,}667 \cdot 0{,}244)\,W'' = 0{,}480\,W' + 0{,}468\,W'' = 0{,}480 \cdot 1\,080 + 0{,}468 \cdot 1\,540 = 518 + 720 = 1\,238 \text{ kg};$$

$N_{9-10} = -N_{12-7} = 0{,}867\,F_1 + 0{,}533\,P_1 - 0{,}866\,(F_2 + P_2) + F_7 + 0{,}667\,P_7 =$
$= (0{,}867 \cdot 0{,}36 + 0{,}533 \cdot 0{,}48 - 0{,}866 \cdot 0{,}42)\,W' + (0{,}610 + 0{,}667 \cdot 0{,}488)\,W'' =$
$= 0{,}204\,W' + 0{,}936\,W'' = 0{,}204 \cdot 1\,080 + 0{,}936 \cdot 1\,540 = 220 + 1\,440 = 1\,660$ kg;

$N_{10-11} = -N_{7-8} = -0{,}733\,(F_1 + P_1) + F_2 + 0{,}666\,P_2 + F_8 + 0{,}667\,P_8 = (-0{,}733 \cdot$
$\cdot 0{,}84 + 0{,}18 + 0{,}666 \cdot 0{,}24)\,W' + (0{,}305 + 0{,}667 \cdot 0{,}244)\,W'' = -0{,}276\,W' +$
$+ 0{,}468\,W'' = -0{,}276 \cdot 1\,080 + 0{,}468 \cdot 1\,540 = -298 + 720 = 422$ kg.

Eforturile în diagonalele etajului inferior:

Tabela 13

Bara / Sarcina	7—14	8—15	9—16	10—17	11—18	12—13
F_1	$-0{,}990\,F_1$	$0{,}132\,F_1$	0	0	$-0{,}132\,F_1$	$0{,}990\,F_1$
P_1	$-0{,}660\,P_1$	$0{,}132\,P_1$	0	0	$-0{,}132\,P_1$	$0{,}660\,P_1$
F_7	$-0{,}990\,F_7$	0	0	0	0	$0{,}990\,F_7$
P_7	$-0{,}660\,P_7$	0	0	0	0	$0{,}660\,P_7$
F_2	$0{,}990\,F_2$	$-0{,}990\,F_2$	$0{,}132\,F_2$	0	0	$-0{,}132\,F_2$
P_2	$0{,}660\,P_2$	$-0{,}660\,P_2$	$0{,}132\,P_2$	0	0	$-0{,}132\,P_2$
F_8	$0{,}990\,F_8$	$-0{,}990\,F_8$	0	0	0	0
P_8	$0{,}660\,P_8$	$-0{,}660\,P_8$	0	0	0	0
$F_3 = -F_2$	$0{,}132\,F_2$	$-0{,}990\,F_2$	$0{,}990\,F_2$	$-0{,}132\,F_2$	0	0
$P_3 = -P_2$	$0{,}132\,P_2$	$-0{,}660\,P_2$	$0{,}660\,P_2$	$-0{,}132\,P_2$	0	0
$F_9 = -F_8$	0	$-0{,}990\,F_8$	$0{,}990\,F_8$	0	0	0
$P_9 = -P_8$	0	$-0{,}660\,P_8$	$0{,}660\,P_8$	0	0	0
$F_4 = -F_1$	0	$0{,}132\,F_1$	$-0{,}990\,F_1$	$0{,}990\,F_1$	$-0{,}132\,F_1$	0
$P_4 = -P_1$	0	$0{,}132\,P_1$	$-0{,}660\,P_1$	$0{,}660\,P_1$	$-0{,}132\,P_1$	0
$F_{10} = -F_7$	0	0	$-0{,}990\,F_7$	$0{,}990\,F_7$	0	0
$P_{10} = -P_7$	0	0	$-0{,}660\,P_7$	$0{,}660\,P_7$	0	0
$F_5 = -F_2$	0	0	$0{,}132\,F_2$	$-0{,}990\,F_2$	$0{,}990\,F_2$	$-0{,}132\,F_2$
$P_5 = -P_2$	0	0	$0{,}132\,P_2$	$-0{,}660\,P_2$	$0{,}660\,P_2$	$-0{,}132\,P_2$
$F_{11} = -F_8$	0	0	0	$-0{,}990\,F_8$	$0{,}990\,F_8$	0
$P_{11} = -P_8$	0	0	0	$-0{,}660\,P_8$	$0{,}660\,P_8$	0
$F_6 = F_2$	$0{,}132\,F_2$	0	0	$-0{,}132\,F_2$	$0{,}990\,F_2$	$-0{,}990\,F_2$
$P_6 = P_2$	$0{,}132\,P_2$	0	0	$-0{,}132\,P_2$	$0{,}660\,P_2$	$-0{,}660\,P_2$
$F_{12} = F_8$	0	0	0	0	$0{,}990\,F_8$	$-0{,}990\,F_8$
$P_{12} = P_8$	0	0	0	0	$0{,}660\,P_8$	$-0{,}660\,P_8$

Din însumarea coloanelor se obține:

$N_{10-17} = N_{12-13} = -N_{7-14} = -N_{9-16} = 0{,}990\,F_1 + 0{,}660\,P_1 - 1{,}254 \cdot F_2 -$
$- 0{,}924\,P_2 + 0{,}990\,(F_7 - F_8) + 0{,}660\,(P_7 - P_8) = (0{,}990 \cdot 0{,}36 + 0{,}660 \cdot 0{,}48 -$
$- 1{,}254 \cdot 0{,}18 - 0{,}924 \cdot 0{,}24)\,W' + (0{,}990 \cdot 0{,}305 + 0{,}660 \cdot 0{,}244)\,W'' =$
$= 0{,}226\,W' + 0{,}463\,W'' = 0{,}226 \cdot 1\,080 + 0{,}463 \cdot 1\,540 = 244 + 712 = 956$ kg;

$N_{11-18} = -N_{8-15} = -0{,}264\,(F_1 + P_1) + 1{,}980\,F_2 + 1{,}320\,P_2 + 1{,}980\,F_8 +$
$+ 1{,}320\,P_8 = (-0{,}264 \cdot 0{,}84 + 1{,}980 \cdot 0{,}18 + 1{,}320 \cdot 0{,}24)\,W' + (1{,}980 \cdot 0{,}305 +$
$+ 1{,}320 \cdot 0{,}244)\,W'' = 0{,}451\,W' + 0{,}926\,W'' = 0{,}451 \cdot 1\,080 + 0{,}926 \cdot 1\,540 = 486 +$
$+ 1\,426 = 1\,912$ kg.

Eforturile în meridianele etajului inferior :

Tabela 14

Bara / Sarcina	7—13	8—14	9—15	10—16	11—17	12—18
F_1	$1{,}476\,F_1$	$-0{,}549\,F_1$	0	0	$0{,}069\,F_1$	$-0{,}995\,F_1$
P_1	$0{,}103\,P_1$	$-0{,}549\,P_1$	0	0	$0{,}069\,P_1$	$-0{,}824\,P_1$
F_7	$0{,}515\,F_7$	0	0	0	0	$-0{,}515\,F_7$
P_7	$-0{,}858\,P_7$	0	0	0	0	$-0{,}343\,P_7$
F_2	$-0{,}995\,F_2$	$1{,}476\,F_2$	$-0{,}549\,F_2$	0	0	$0{,}069\,F_2$
P_2	$-0{,}824\,P_2$	$0{,}103\,P_2$	$-0{,}549\,P_2$	0	0	$0{,}069\,P_2$
F_8	$-0{,}515\,F_8$	$0{,}515\,F_8$	0	0	0	0
P_8	$-0{,}343\,P_8$	$-0{,}858\,P_8$	0	0	0	0
$F_3=-F_2$	$-0{,}069\,F_2$	$0{,}995\,F_2$	$-1{,}476\,F_2$	$0{,}549\,F_2$	0	0
$P_3=-P_2$	$-0{,}069\,P_2$	$0{,}824\,P_2$	$-0{,}103\,P_2$	$0{,}549\,P_2$	0	0
$F_9=-F_8$	0	$0{,}515\,F_8$	$-0{,}515\,F_8$	0	0	0
$P_9=-P_8$	0	$0{,}343\,P_8$	$+0{,}858\,P_8$	0	0	0
$F_4=-F_1$	0	$-0{,}069\,F_1$	$0{,}995\,F_1$	$-1{,}476\,F_1$	$0{,}549\,F_1$	0
$P_4=-P_1$	0	$-0{,}069\,P_1$	$0{,}824\,P_1$	$-0{,}103\,P_1$	$0{,}549\,P_1$	0
$F_{10}=-F_7$	0	0	$0{,}515\,F_7$	$-0{,}515\,F_7$	0	0
$P_{10}=-P_7$	0	0	$0{,}343\,P_7$	$+0{,}858\,P_7$	0	0
$F_5=-F_2$	0	0	$-0{,}069\,F_2$	$0{,}995\,F_2$	$-1{,}476\,F_2$	$0{,}549\,F_2$
$P_5=-P_2$	0	0	$-0{,}069\,P_2$	$0{,}824\,P_2$	$-0{,}103\,P_2$	$0{,}549\,P_2$
$F_{11}=-F_8$	0	0	0	$0{,}515\,F_8$	$-0{,}515\,F_8$	0
$P_{11}=-P_8$	0	0	0	$0{,}343\,P_8$	$+0{,}858\,P_8$	0
$F_6=F_2$	$-0{,}549\,F_2$	0	0	$0{,}069\,F_2$	$-0{,}995\,F_2$	$1{,}476\,F_2$
$P_6=P_2$	$-0{,}549\,P_2$	0	0	$0{,}069\,P_2$	$-0{,}824\,P_2$	$0{,}103\,P_2$
$F_{12}=F_8$	0	0	0	0	$-0{,}515\,F_8$	$0{,}515\,F_8$
$P_{12}=P_8$	0	0	0	0	$-0{,}343\,P_8$	$-0{,}858\,P_8$

Prin însumarea coloanelor se obține :

$$N_{8-14} = -N_{11-17} = -0{,}618\,(F_1 + P_1) + 2{,}471\,F_2 + 0{,}927\,P_2 + 1{,}03\,F_8 - 0{,}515\,P_8 =$$
$$= (-0{,}618 \cdot 0{,}84 + 2{,}471 \cdot 0{,}18 + 0{,}927 \cdot 0{,}24)\,W' + (1{,}03 \cdot 0{,}305 - 0{,}515 \cdot 0{,}244)\,W'' =$$
$$= 0{,}149 \cdot W' + 0{,}188\,W'' = 0{,}149 \cdot 1\,080 + 0{,}188 \cdot 1\,540 = 161 + 289 = 450 \text{ kg};$$

$$N_{9-15} = -N_{12-18} = 0{,}995\,F_1 + 0{,}824\,P_1 - 2{,}094\,F_2 - 0{,}721\,P_2 + 0{,}515\,(F_7 - F_8) +$$
$$+ 0{,}343\,P_7 + 0{,}858\,P_8 = (0{,}995 \cdot 0{,}36 + 0{,}824 \cdot 0{,}48 - 2{,}094 \cdot 0{,}18 - 0{,}721 \cdot 0{,}24)\,W' +$$
$$+ (0{,}515 \cdot 0{,}305 + 0{,}343 \cdot 0{,}488 + 0{,}858 \cdot 0{,}244)\,W'' = 0{,}204 \cdot W' + 0{,}534\,W'' =$$
$$= +0{,}204 \cdot 1\,080 + 0{,}534 \cdot 1\,540 = 220 + 822 = 1\,042 \text{ kg};$$

$$N_{10-16} = -N_{7-13} = -1{,}476\,F_1 - 0{,}103\,P_1 + 1{,}613\,F_2 + 1{,}442\,P_2 - 0{,}515\,(F_7 - F_8) +$$
$$+ 0{,}858\,P_7 + 0{,}343\,P_8 = (-1{,}476 \cdot 0{,}36 - 0{,}103 \cdot 0{,}48 + 1{,}613 \cdot 0{,}18 + 1{,}442 \cdot 0{,}24)\,W' +$$
$$+ (-0{,}515 \cdot 0{,}305 + 0{,}858 \cdot 0{,}488 + 0{,}343 \cdot 0{,}244)\,W'' = 0{,}056\,W' +$$
$$+ 0{,}345\,W'' = 0{,}056 \cdot 1\,080 + 0{,}345 \cdot 1\,540 = 60 + 532 = 592 \text{ kg}.$$

În fig. 414 sînt trecute valorile eforturilor pe fiecare bară.

Pentru eforturile din încărcarea permanentă $g = 150$ kg/m² se poate folosi tot suprapunerea efectelor, dar este mai ușor să se țină seamă de concluziile aplicației 91. Rezultă că eforturile în diagonale sînt nule, iar eforturile în barele meridianelor și ale inelelor se determină ca în fig. 415, *a* și *b*. Sarcinile verticale din nodurile inelului superior G' și ale inelului inferior G'' sînt :

$$G' = g \cdot \Omega' = 150 \cdot 10{,}80 = 1\,620 \text{ kg};$$

$$G'' = g \cdot \Omega'' = 150 \cdot 15{,}40 = 2\,310 \text{ kg}.$$

Din fig. 415, *b* rezultă :

$$N_{1-7} = -\frac{G'}{\sin \gamma} = -1\,620 \cdot \sqrt{2} = -2\,290 \text{ kg};$$

$$H' = G' \operatorname{ctg} \gamma = G' = 1\,620 \text{ kg}.$$

$$N_{7-13} = -\frac{G' + G''}{\sin \delta} = -3\,930 \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = -4\,720 \text{ kg};$$

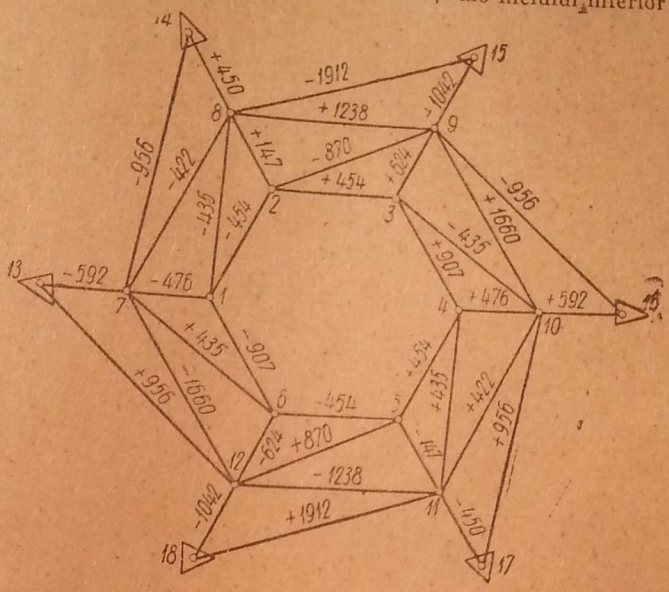


Fig. 414.

$$H'' = (G' + G'') \operatorname{ctg} \delta - G' \operatorname{ctg} \gamma = \frac{2}{3} G'' - \frac{1}{3} G' = \frac{2}{3} 2\,310 - \frac{1}{3} 1\,620 = 1\,000 \text{ kg}.$$

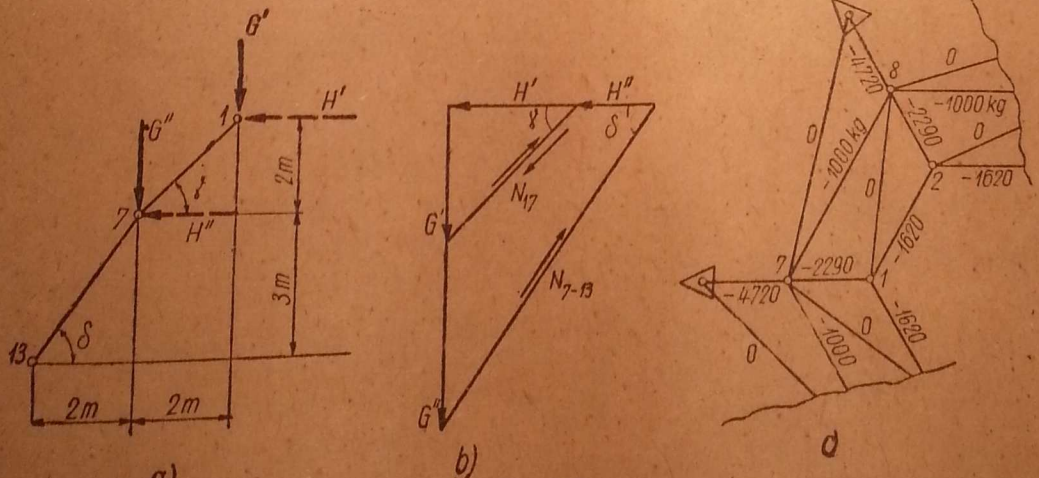


Fig. 415.

Din descompunerea lui H' și H'' în plan orizontal după direcțiile barelor din inel se obține :

$$N_{1-2} = N_{1-6} = \ldots = -H' = -1\,620 \text{ kg};$$

$$N_{7-8} = N_{7-12} = \ldots = -H'' = -1\,000 \text{ kg}.$$

Eforturile sînt trecute în fig. 415, *c*.

Aplicația 96. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele cu elementele geometrice din fig. 416, *a*, încărcată cu sarcina orizontală $P = 6$ t în nodul $1'$, normală pe grinzile plane principale.

Răspuns. Sistemul este static determinat și geometric nedeformabil, cum se poate verifica ușor cu sarcina zero. Se aplică teoria de la calculul „biconstrucțiilor" (§ 43—B).

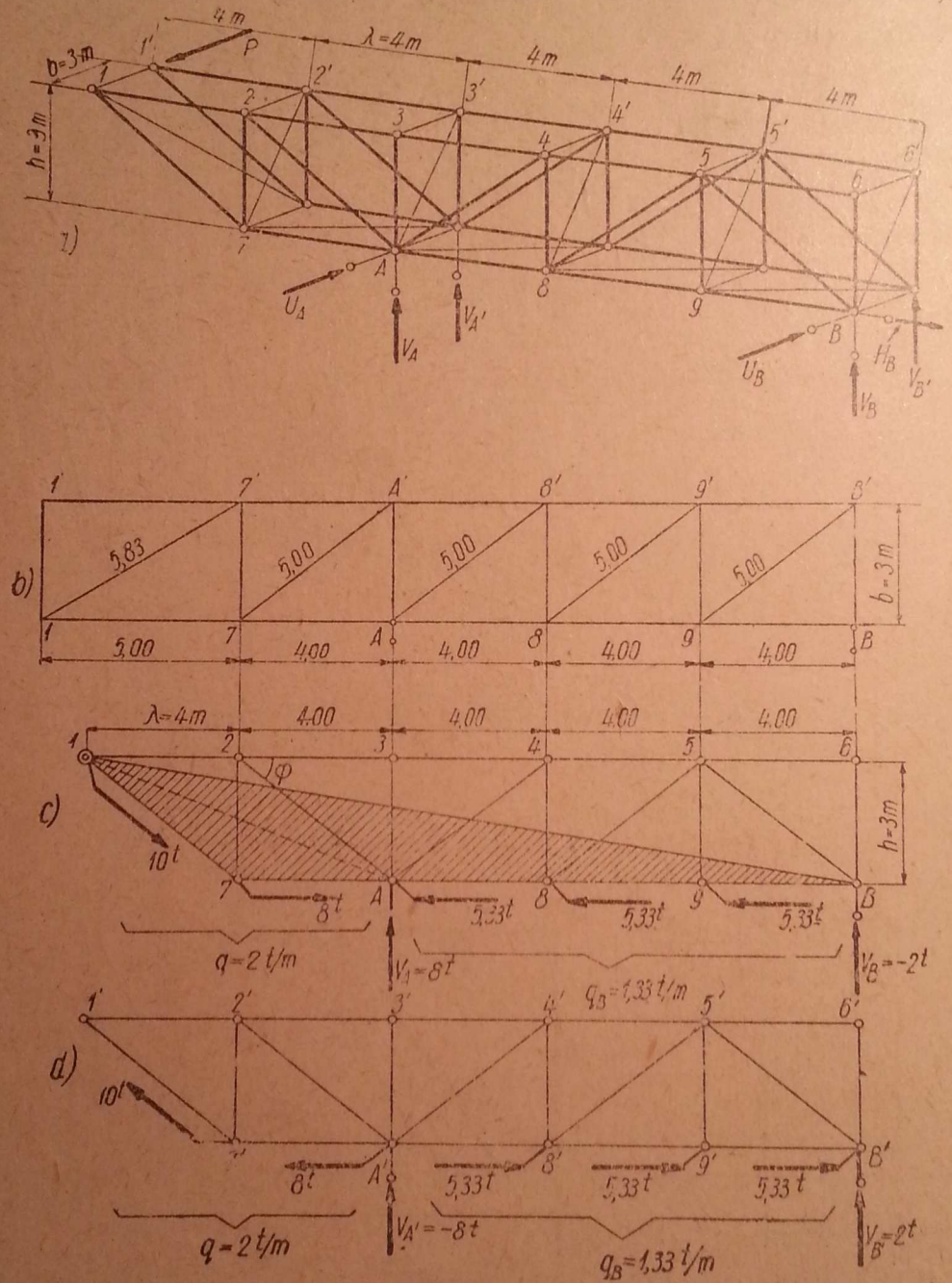


Fig. 416.

Din ecuația de proiecție după direcția lui H_B și ecuațiile de momente în raport cu verticalele din B și A, se obține:

$$H_B = 0;$$

$$U_A \cdot 3\lambda - P \cdot 5\lambda = 0;\ U_A = \frac{5}{3} P = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10 \text{ t};$$

$$U_B \cdot 3\lambda + P \cdot 2\lambda = 0;\quad U_B = -\frac{2}{3} P = -\frac{2}{3} \cdot 6 = -4 \text{ t}.$$

În direcția perpendiculară pe planul grinzilor principale sistemul este acționat de forța tăietoare $T_I = -P$ pe intervalul din stînga lui A, și de forța tăietoare $T_{II} = -P + U_A = -U_B$ pe intervalul $A-B$.

Același lucru se obține dacă $T_I = -P$ acționează pe toată grinda și apoi $T'_{II} = U_A$ acționează între A și B. Important este să se obțină suprafețele Ω cît mai ușor de evaluat. În cazul de față se ia $T_I = -P$ pe intervalul $1-A$ și $T_{II} = -U_B$ pe intervalul $A-B$.

Cele două poligoane de forță vor avea intensitățile următoare:

pe intervalul $1-A$ (în consolă):

$$q = \frac{P}{b} = \frac{6}{3} = 2 \text{ t/m}$$ avînd sensul de la 1 spre A pe grinda din față ($T_I < 0$);

pe intervalul $A-B$:

$$q_B = \frac{|U_B|}{b} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \text{ t/m}$$ avînd sensul de la B spre A pe grinda din față ($T_{II} > 0$).

Reacțiunile verticale V_A și V_B ale grinzii plane din față (fig. 416, *c*) încărcată cu cele două poligoane de forțe se determină din ecuațiile de momente în raport cu B și A:

$$\mathfrak{M}_B \qquad V_A \cdot l - q \cdot \Omega^B_{1-7-A} = 0,$$

$$\mathfrak{M}_A \qquad -V_B \cdot l - q \cdot \Omega^A_{1-7-A} = 0, \tag{6.61}$$

deoarece q_B are suprafața nulă atît în raport cu B, cît și cu A. Din fig. 416, *c* se deduce:

$$\Omega^B_{1-7-A} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\lambda \cdot h = 4\lambda h = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \text{ m}^2;$$

$$\Omega^A_{1-7-A} = 2 \cdot \frac{1}{2} \lambda h = \lambda h = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2.$$

Se deduce din (6.61):

$$V_A = \frac{q \cdot \Omega^B_{1-7-A}}{l} = \frac{2 \cdot 48}{12} = 8 \text{ t};$$

$$V_B = -\frac{q \cdot \Omega^A_{1-7-A}}{l} = -\frac{2 \cdot 12}{12} = -2 \text{ t}.$$

Verificarea reacțiunilor V_A și V_B se face prin ecuația de proiecție pe verticală: $V_A + V_B - q\,h = 0$, care este satisfăcută: $8 - 2 - 2 \cdot 3 = 0$.

Reacțiunile $V_{A'}$ și $V_{B'}$ pe grinda din spate (fig. 416, *d*) sînt egale, dar de sens contrar cu V_A și V_B ale grinzii din față.

Acum se pot calcula eforturile în toate barele.

În barele contravîntuirii longitudinale desenate desfășurat în fig. 416, *b*, din ecuația de proiecție pe direcția lui U_A [expresia (6.31)] se obține:

$$N_{1-1'} = N_{7-7'} = N_{A-A'} = -qb = -P = -6 \text{ t};$$
$$N_{8-8'} = N_{9-9'} = N_{B-B} = q_B \cdot b = -U_B = +4 \text{ t},$$
$$D_{1-7'} = q \cdot l_{1-7'} = 2 \cdot 5{,}83 = 11{,}66 \text{ t};$$
$$D_{7-A'} = q l_{7-A'} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ t};$$
$$D_{A-8'} = D_{8-9'} = D_{9-B'} = -q_B \cdot l_{A8'} = -1{,}33 \cdot 5 = -6{,}67 \text{ t}.$$

În barele contravîntuirilor transversale,

$$N_{2-2'} = N_{2'-7} = N_{3-3'} = N_{3'-A} = N_{4-4'} = N_{4'-8} = N_{5-5'} = N_{5'-9} = N_{6-6'} = N_{6'-B} = 0$$

Eforturile din barele grinzilor cu zăbrele plane verticale din față (fig. 416, *c*) și din spate (fig. 416, *d*) se pot determina ușor pe cale grafică sau analitică, fiind cunoscute atît sarcinile care acționează la noduri, cît și reacțiunile.

Sarcinile din noduri se obțin din expresia : $F_{ij} = q \cdot l_{ij}$, unde l_{ij} este lungimea barei ij și q — intensitatea poligonului de forțe corespunzător.

Astfel :

$$F_{1-7} = q \cdot l_{1-7} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ t}; \; F_{7-A} = q \cdot \lambda = 2 \cdot 4 = 8 \text{ t și}$$

$$F_{A-8} = F_{8-9} = F_{9-B} = q_B \cdot \lambda = 1{,}33 \cdot 4 = 5{,}33 \text{ t}.$$

Așa cum se știe, forțele F_{ij} determinate pe grinda din față se aplică cu sensurile schimbate și punctul de aplicație în celălalt nod al barei pe grinda din spate (fig. 416, *c* și *d*).

De aici rezultă că eforturile din barele grinzii din spate vor fi egale și de sens contrar cu cele ale grinzii din față ($N_{i'j'} = - N_{ij}$), cu excepția barelor pe care se aplică forțele F_{ij} unde $N_{i'j'} = - N_{ij} - F_{ij}$ (F_{ij} este pozitiv de la stînga spre dreapta pe grinda din față).

Folosind metoda secțiunilor se obține :

$S_{1-2} = S_{1'-2'} = 0$; $S_{2-3} = S_{3-4} = - S_{2'-3'} = - S_{3'-4'} = + 8$ t;
$S_{4-5} = - S_{4'-5'} = + 5{,}33$ t; $S_{5-6} = - S_{5'-6'} = 0$;
$D_{2-A} = - D_{2'-A'} = - 10$ t; $D_{A-4} = D_{8-5} = - D_{A'-4'} = - D_{8'-5'} = - 3{,}33$ t;
$D_{5-B} = - D_{5'-B'} = + 3{,}33$ t;
$N_{2-7} = - N_{2'-7'} = 6$ t; $N_{A-3} = N_{5-9} = N_{6-B} = N_{A'-3'} = N_{5'-9'} = N_{6'-B'} = 0$;
$N_{4-8} = - N_{4'-8'} = 2$ t;
$I_{1-7} = - 10$ t; $I_{7-A} = -16$ t; $I_{A-8} = - 16$ t; $I_{8-9} = - 8$ t;
$I_{9-B} = - 2{,}67$ t; $I_{1'-7'} = 0$; $I_{7'-A'} = - I_{7-A} - 8$ t$= + 16 - 8 = + 8$ t;
$I_{A'-8'} = - I_{A-8} + 5{,}33 = + 16 + 5{,}33 = + 21{,}33$ t;
$I_{8'-9'} = - I_{8-9} + 5{,}33 = + 8 + 5{,}33 = + 13{,}33$ t; $I_{9'-B'} = - I_{9-B} + 5{,}33 = + 2{,}67 + 5{,}33 = + 8$ t.

Observație. Această aplicație se poate rezolva și prin descompunerea în grinzi cu zăbrele plane (fig. 417). Forța P acționează în planul grinzii $1-1'-7-7'$ și provoacă eforturile și reacțiunile din fig. 417, *a*, care se transmit mai departe restului sistemului în felul următor : forța orizontală P se transmite direct grinzii cu zăbrele plane $7-7'-B-B'$, iar cele două forțe din 7 și $7'$, după direcțiile barelor $7-1$ și $7'-1'$, se descompun în componente după verticală și orizontală (fig. 417, *b*).

Componentele orizontale se aplică grinzii orizontale $7-7'-B-B'$ (fig. 417, *c*), iar componentele verticale se aplică celor două grinzi verticale $7-2-B-6$ (fig. 417, *d*) și $7'-2'-B'-6'$ (fig. 417, *e*).

Rezolvînd aceste grinzi cu zăbrele plane și suprapunînd efectele, se obțin eforturile în barele grinzii cu zăbrele în spațiu. Efectiv, numai în barele tălpilor inferioare $7-A-8-9-B$ și $7'-A'-8'-9'-B'$ există eforturi din cîte două sisteme plane care trebuie suprapuse.

Rezultă :

$$I_{1'-7'} = 0; \; I_{1-7} = - \frac{P \cdot 5}{3} = - \frac{6 \cdot 5}{3} = - 10 \text{ t};$$

$$D_{1-7'} = P \cdot \frac{5{,}83}{3} = 6 \cdot \frac{5{,}83}{3} = + 11{,}66 \text{ t};$$

$$N_{1-1'} = - P = - 6 \text{ t}; \; N_{7-7'} = 0 - P = - P = - 6 \text{ t};$$

$$S_{2-3} = P \cdot \frac{4}{3} = 8 \text{ t} = - N_{2'-3'}; \; N_{2-7} = + P = + 6 \text{ t} = - N_{2'-7'};$$

$$D_{2-A} = - P \cdot \frac{5}{3} = - 10 \text{ t}; \; I_{7-A} = - \frac{4}{3} P - P \cdot \frac{4}{3} + 0 = - \frac{8}{3} P = - 16 \text{ t};$$

$$I_{7'-A'} = + \frac{4}{3} P + 0 = + 8 \text{ t}; \text{ etc.}$$

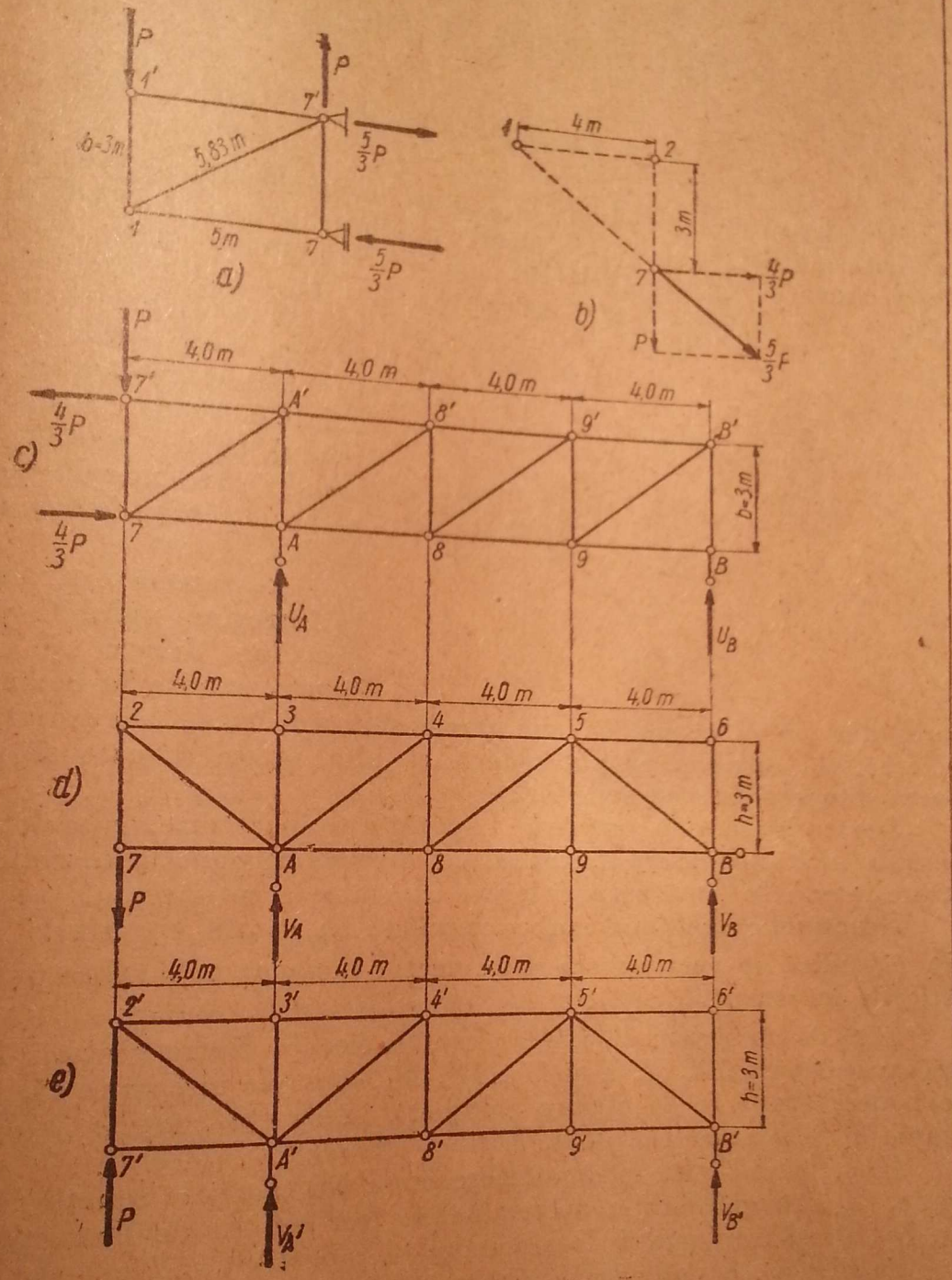

P
1'
7'
P
h=3m
5,83 m
5/3 P
1'
5m
7'
5/3 P
a)
1
4m
2
3m
7'
4/3 P
P
5/3 P
b)
P
4,0 m
4,0 m
4,0 m
4,0 m
7'
A'
8'
9'
B'
4/3 P
c)
4/3 P
7
A
8
9
B
h=3m
U_A
U_B
4,0 m
4,0 m
4,0 m
4,0 m
2
3
4
5
6
d)
h=3m
7
A
8
9
B
P
V_A
V_B
4,0 m
4,0 m
4,0 m
4,0 m
2'
3'
4'
5'
6'
e)
h=3m
7'
A'
8'
9'
B'
P
V_A'
V_B'

Fig. 417.

CAPITOLUL VII

GRINZI DREPTE ȘI CURBE ÎN SPAȚIU

§ 44. CONDIȚII DE REZEMARE

Un sistem de bare în spațiu, geometric nedeformabil, supus la încărcări oarecare are nevoie de șase legături simple pentru a fi fixat față de teren. Dacă numărul de legături este mai mic, rămîn anumite posibilități de mișcare, iar dacă este mai mare, sistemul este static nedeterminat. În capitolul VI (grinzi cu zăbrele în spațiu) s-au analizat reazemele care se pot realiza cu bare articulate (reazem simplu, dublu și triplu), cum și condițiile pe care trebuie să le îndeplinească aceste reazeme pentru evitarea formelor critice.

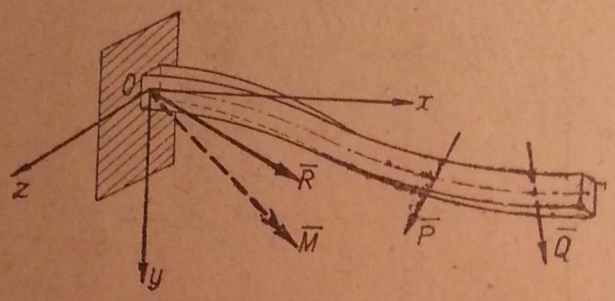


Fig. 418.

Reazemele articulate rămîn în întregime valabile și în cazul grinzilor drepte și curbe în spațiu, supuse la încărcări oarecare, dar ținînd seamă că aici barele sînt solicitate, în general, la încovoiere și la torsiune, se pot realiza și alte rezemări care să poată suporta direct asemenea solicitări.

Legătura cea mai completă în spațiu este încastrarea completă care nu permite nici o deplasare liniară și nici o rotire în punctul teoretic de încastrare între cele două corpuri legate sau între corp și teren.

Reacțiunile din încastrarea completă în spațiu constituie un torsor $(\overline{R}, \overline{M})$ adică un vector forță și un vector moment aplicați în punctul teoretic de încastrare.

Față de un sistem de axe Ox, Oy, Oz fiecare dintre vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}$ au trei componente : X, Y, Z și M_x, M_y, M_z, ceea ce înseamnă că, din punct de vedere static, o încastrare completă în spațiu conține șase elemente simple de rezemare (fig. 418).

Aceste șase elemente se pot determina din cele șase ecuații de echilibru static, la sistemele static determinate : trei ecuații de proiecții pe axele Ox, Oy, Oz și trei ecuații de momente în raport cu aceleași axe.

În spațiu, se pot realiza și o serie de legături reduse teoretic la un singur punct care să conțină un număr de elemente simple — cuple și forțe — mai mic decît șase. Vom denumi rezemări mixte legăturile care conțin cel puțin o legătură simplă exprimată printr-un moment.

În fig. 419 sînt reprezentate cîteva rezemări mixte cu cinci legături simple. Astfel, fig. 419, *a* reprezintă trei elemente simple de forță și două elemente simple de cuplu. Sistemul se poate roti în jurul axei Ox. Din punct de vedere static aceasta înseamnă că $M_x = 0$. Pentru fixarea acestui corp mai trebuie o legătură simplă, care se poate realiza printr-un pendul în orice punct al corpului, dar cu condiția ca dreapta sa de suport să nu întîlnească pe Ox, și să nu fie paralelă cu ea, adică să nu fie coplanară cu Ox.

În fig. 419, *b* rezemarea mixtă are, de asemenea, trei elemente de forță și două de moment. Corpul se poate roti față de *Oy*, adică $M_y = 0$. Pentru fixare mai trebuie un pendul necoplanar cu *Oy*.

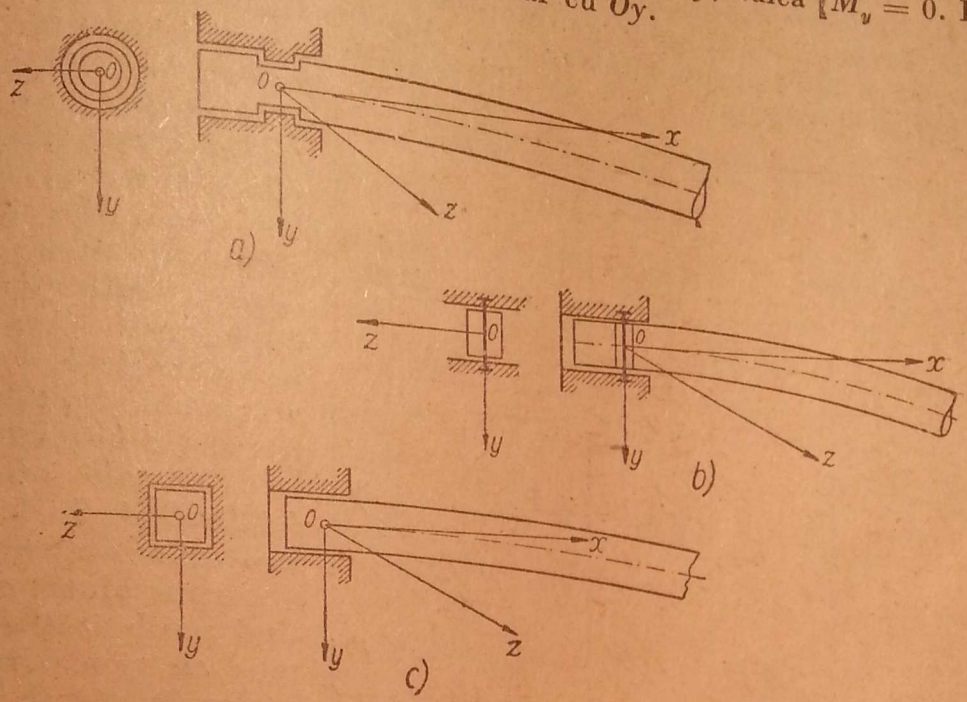


Fig. 419.

Fig. 419, *c* reprezintă o rezemare mixtă cu două elemente de forță și trei elemente de moment. Există posibilitate de deplasare după direcția *Ox*, adică $X = 0$.

Pentru fixarea completă a corpului este necesar un pendul care să nu fie perpendicular pe *Ox*.

În mod analog se pot realiza rezemări mixte cu trei și patru legături simple (fig. 420).

Fig. 420, *a* arată o rezemare cu un element de forță și două de moment. Corpul se poate roti față de *Oy* și se poate deplasa după direcțiile *Ox* și *Oz*, deci $M_y = 0$, $X = 0$ și $Z = 0$.

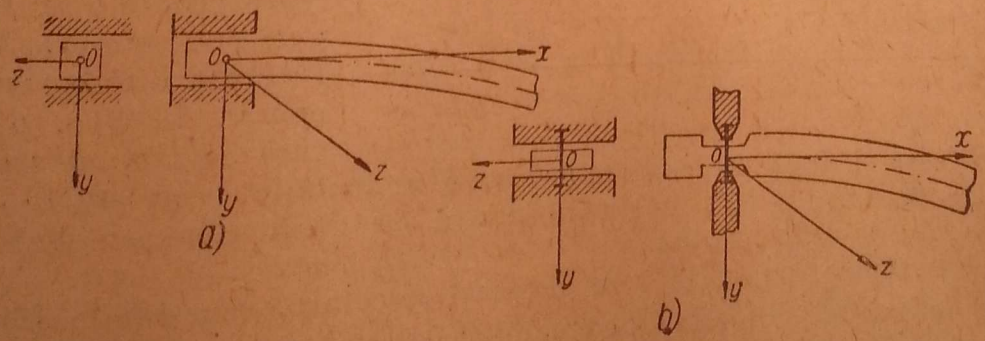


Fig. 420.

Fig. 420, *b* are trei elemente de forță și o legătură de moment. Corpul se poate roti în jurul axelor *Oy* și *Oz*, deci $M_y = M_z = 0$. În aceste cazuri, pentru completarea rezemării mai sînt necesare trei, respectiv două legături

simple, care să asigure efectiv stricta nedeformabilitate geometrică a sistemului de rezemare.

În fig. 421 este reprezentată o tabelă care cuprinde diferite sisteme de rezemare. Între grindă și teren s-a interpus un corp ajutător (desenat haşurat) pentru a se da o imagine mai sugestivă tipurilor de rezemare [1]). În coloanele *a*, *b*, *c*, *d* sînt arătate legăturile dintre teren și corpul ajutător. Astfel, coloana *a* cuprinde legăturile în care corpul ajutător este fixat complet de teren; coloana *b* — legăturile în care corpul ajutător se poate deplasa față de teren după axa *Ox*; adică în coloanele *b*, *c*, *d* sînt arătate posibilitățile de translație în planul *xOy*. În rîndurile orizontale *1*, *2*, *3*, *4*, *5* sînt date legăturile dintre grindă și corpul ajutător, indicînd posibilitățile de rotație ale grinzii în jurul axelor *Ox*, *Oy*, *Oz*. Astfel, în rîndul *1* grinda este fixată complet de corpul ajutător, în rîndul *2* grinda se poate roti în jurul axei *Ox* față de corpul ajutător, în rîndul *3* grinda se poate roti în jurul axei *Oy* etc.

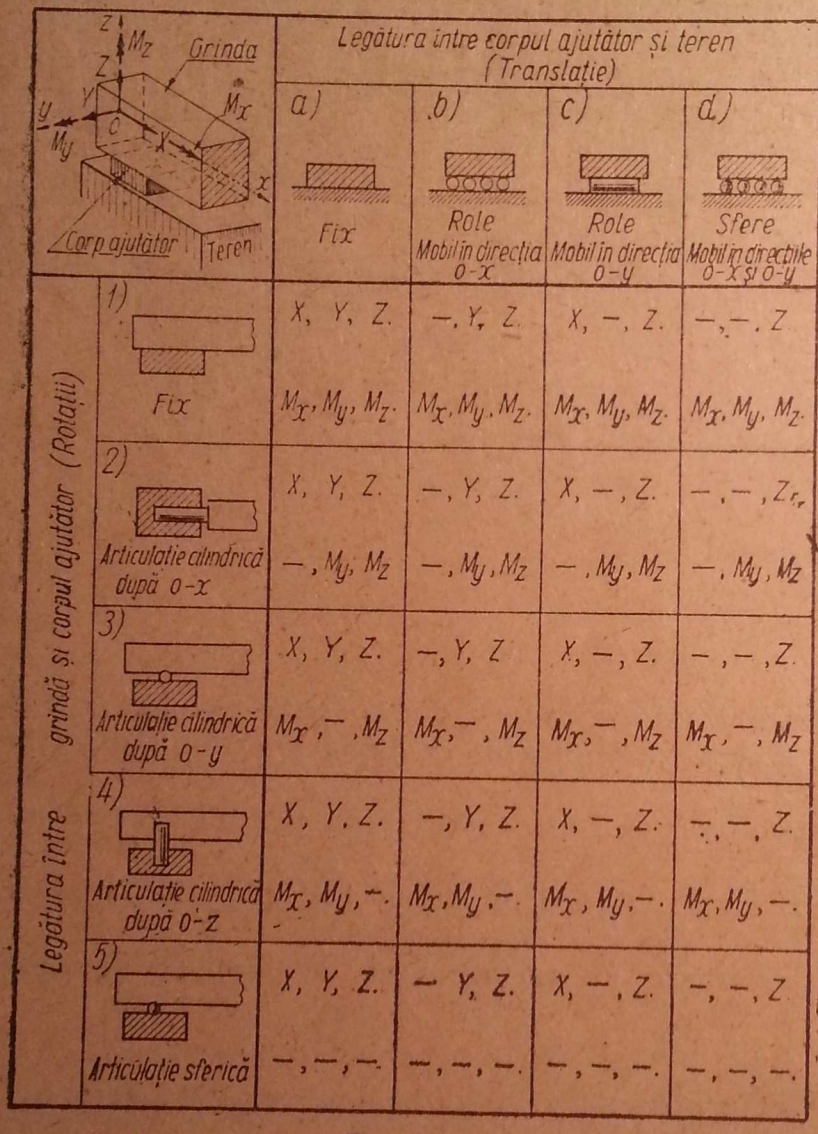


Fig. 421.

La intersecția dintre rînduri și coloane sînt reprezentate diferitele tipuri de rezemare. Astfel, *1 a* reprezintă încastrarea completă; *3 a*, o legătură mixtă cu trei elemente de forță și două de moment; *5 a*, o articulație completă în spațiu (articulație sferică); *4 b*, o legătură mixtă cu două elemente de forță și două elemente de moment, etc.

După completarea celor șase legături necesare, reacțiunile (forțe și cuple) se determină din cele două condiții vectoriale $\overline{R} = 0$, $\overline{M} = 0$, sau cele șase ecuații analitice de echilibru al solidului geometric nedeformabil, care se pot exprima sub diferite aspecte, cum s-a arătat la grinzile cu zăbrele în spațiu (Cap. VI).

Dacă sistemul de bare în spațiu este alcătuit din mai multe sisteme geometric nedeformabile, dar care în ansamblu constituie un sistem geo-

[1]) După W. Schlink „Statica Tehnică" Berlin 1939.

metric deformabil, trebuie ca rezemarea față de teren să se facă prin mai mult decît șase legături simple. Numărul minim de legături între corpuri și față de teren se poate deduce din condițiile de echilibru static. Dacă ansamblul este alcătuit din n solide, numărul de legături simple trebuie să fie $6n$ pentru sistemele static determinate. Forțele și cuplele de legătură se determină din cele $6n$ ecuații de echilibru static (cîte șase ecuații pentru fiecare solid geometric nedeformabil).

Deoarece ne vom ocupa mai de aproape de grinzile curbe plane supuse la încărcări oarecare în spațiu, este util să analizăm în particular condițiile de rezemare ale acestor grinzi.

Toate forțele și cuplele provenind din sarcini date sau din reacțiuni care acționează asupra unei grinzi curbe plane se pot descompune în cîte două componente dintre care una să fie normală pe plan, și cealaltă — cuprinsă în planul grinzii. Componentele care acționează în planul grinzii constituie o problemă plană care a fost studiată la sistemele plane. Ceea ce rămîne să fie cercetat aici este numai acțiunea componentelor normale pe planul grinzii.

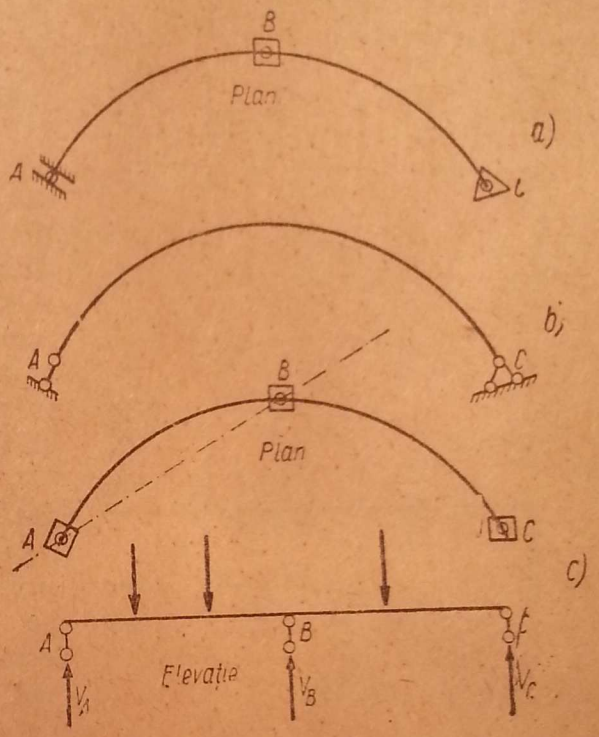


Fig. 422.

Dintre cele șase condiții simple de rezemare ale grinzii plane în spațiu, trei legături care se găsesc în planul grinzii sînt utilizate pentru problema plană, astfel încît pentru sarcinile normale pe planul grinzii rămîn trei legături ale căror reacțiuni sînt normale pe plan. În fig. 422, *a* grinda curbă plană A, B, C are cele șase legături simple distribuite astfel: un reazem dublu în A, al cărui plan este perpendicular pe planul grinzii, un reazem simplu normal pe planul grinzii în B și un reazem triplu în C. Componentele reazemului dublu din A se aleg: una în planul grinzii, și alta — normală pe planul grinzii; iar componentele reazemului triplu din C se aleg în felul următor: una normală pe planul grinzii, și celelalte două — în planul grinzii.

În felul acesta, schema grinzii din fig. 422, *a* s-a descompus în schemele din fig. 422, *b* și *c*. În fig. 422, *b* reazemele se găsesc în planul grinzii: un reazem simplu în A și un reazem dublu (articulație plană) în C, ceea ce asigură fixarea grinzii în planul ei, pentru sarcinile din acest plan.

În fig. 422, *c* cele trei reazeme simple din A, B și C sînt toate perpendiculare pe planul grinzii și asigură fixarea grinzii după normala la planul său, pentru sarcinile normale pe planul grinzii.

În concluzie, fixarea unei grinzi curbe plane pentru sarcini normale pe planul ei se realizează prin trei condiții simple de rezemare normale pe planul grinzii.

F. 371

Sub forma clasică, aceste trei condiții simple de rezemare se realizează prin trei reazeme simple A, B, C (fig. 422, c) normale pe planul ei, cu condiția ca cele trei puncte A, B, C să nu fie coliniare.

Reacțiunile din aceste trei reazeme se pot obține din ecuații de momente cu cîte o singură necunoscută. Astfel, reacțiunea V_C se determină din ecuația de momente față de axa AB; reacțiunea V_B, din ecuația de momente față de dreapta AC, etc. Aceste trei condiții de rezemare normală pe planul grinzii se pot realiza și altfel decît în fig. 422, c.

Astfel, dacă cele trei pendule A, B, C sînt apropiate foarte mult între ele, dar fără să fie în linie dreaptă, se obține rezemarea din fig. 423, a, care se compune dintr-o încastrare cu trei elemente simple : un element de forță V, normală pe planul grinzii, și două componente de moment M_1 și M_2 cu vectorii în planul grinzii.

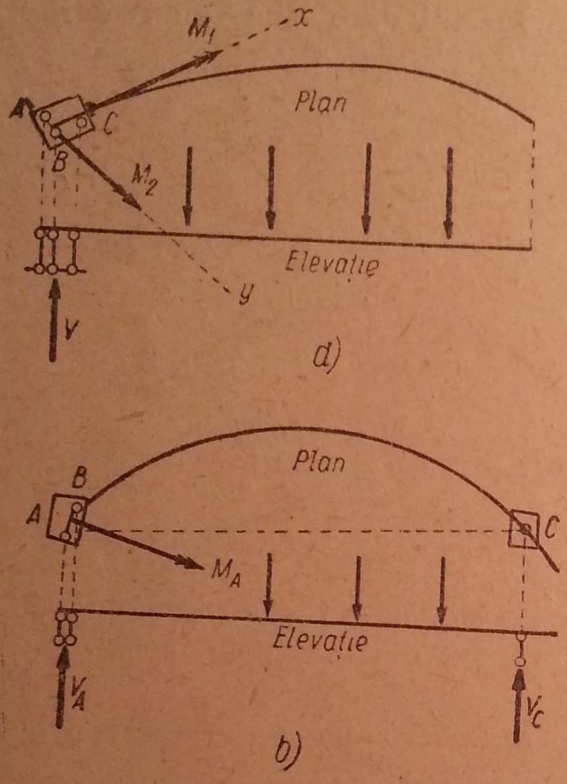


Fig. 423.

De asemenea, cele trei pendule pot fi grupate ca în fig. 423, b, unde două dintre ele A și B s-au apropiat foarte mult între ele. În acest caz, reacțiunile sînt compuse din reacțiunile normale pe planul grinzii V_A și V_C și un cuplu cu momentul M_A avînd axa în planul grinzii, axă care nu trebuie să fie perpendiculară pe AC.

Reacțiunile se pot determina astfel :

În fig. 423, a, din ecuația de proiecție pe normala la planul grinzii se determină reacțiunea V, iar din ecuațiile de momente în raport cu normalele la axele Ay și Ax se găsesc cele două momente M_1 și M_2.

În fig. 423, b din ecuația de momente față de dreapta AC se determină M_A, apoi, printr-o ecuație de momente în raport cu axa din planul grinzii care trece prin A și este perpendiculară pe M_A, se determină V_C, etc.

Dacă în loc de o singură grindă curbă plană, avem un sistem de grinzi cu axele în același plan, dar alcătuind în ansamblu un sistem geometric deformabil, trebuie introduse mai multe reazeme față de teren. Pentru un ansamblu plan, alcătuit din n grinzi plane cu forțe normale pe plan, trebuie să existe $3n$ legături simple între grinzi și față de teren. Astfel, în fig. 424 sistemul este format din trei grinzi (I, II, III), deci, vor fi necesare nouă legături între ele și față de teren.

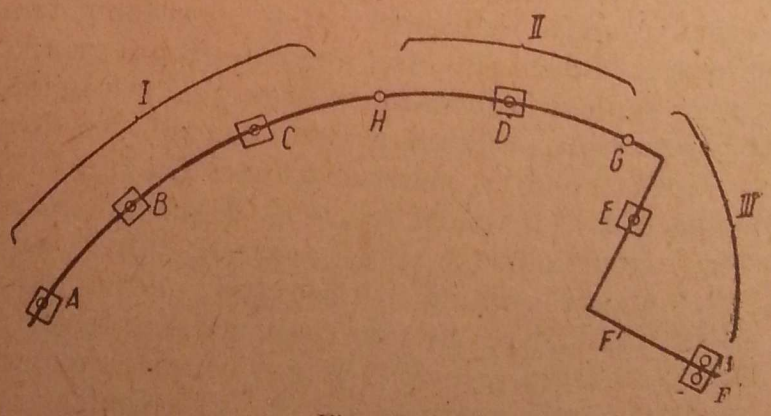


Fig. 424.

Se observă că articulațiile din H și G constituie cîte o legătură simplă pentru forțe normale pe plan, deoarece grinda I se poate roti față de grinda II în jurul oricărei axe din plan care trece prin H, singura mișcare nepermisă fiind deplasarea relativă din H, după normala la plan (celelalte două legături ale articulației spațiale servesc numai pentru forțele din planul grinzii care nu interesează aici).

Vor fi deci necesare încă șapte legături simple care sînt realizate prin cele cinci reazeme simple din A, B, C, D, E și reazemul din F (în F avem o reacțiune-forță verticală și o reacțiune-moment cu axa după FF').

Toate reacțiunile se pot determina din ecuațiile de echilibru static exprimate pentru fiecare dintre grinzile I, II, III (în total nouă ecuații).

Evident, dacă este convenabil, se pot folosi și ecuații de echilibru static pentru grupuri de grinzi sau pentru ansamblul întreg și apoi se vor completa cu ecuații de echilibru al grinzilor separate.

§ 45. GRINZI DREPTE ÎN SPAȚIU

A. RELAȚII DIFERENȚIALE

Dacă se separă o porțiune $O\,O' = dx$ (fig. 425, *a*), dintr-o grindă dreaptă în spațiu, cu sensul de parcurgere de la O spre O', potrivit convenției inițiale

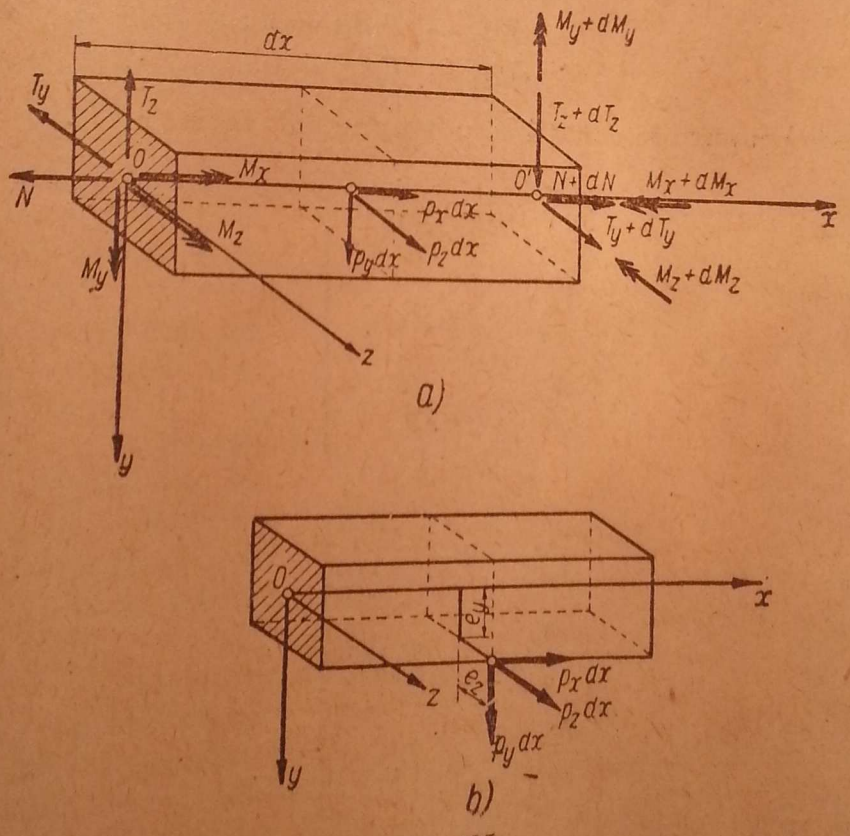


Fig. 425.

(Cap. II, § 7 — b), sistemul de axe Ox, Oy, Oz se orientează ca în figură, cu axa Ox care intră în bară. Pe fața din O eforturile N, T_y și T_z pozitive sînt dirijate în sensul negativ al axelor, iar M_x, M_y și M_z pozitive sînt dirijate după sensul pozitiv al axelor. Se reamintește că T_y este perpendiculară pe Oy, și T_z — perpendiculară pe Oz. Deși această convenție pentru T_y și T_z provoacă o oarecare dificultate de urmărire în ecuațiile statice, deoarece

T_y este dirijat după axa Oz și T_z după axa Oy, totuși se păstrează această notație care își are justificarea în „Rezistența Materialelor" și „Teoria Elasticității" pentru tensiunile tangențiale, datorită dualității tensiunilor „τ" : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Această tensiune se mai notează cu τ_z, deoarece este perpendiculară pe axa Oz în fiecare dintre planele xOz și yOz de unde apare și notația asemănătoare T_z pentru forța tăietoare perpendiculară pe Oz.

Pe fața din O' eforturile N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z cu creșterile respective sînt pozitive cînd au sensuri contrare celor de pe fața O.

Încărcarea se presupune uniform distribuită pe intervalul dx și aplicată pe axa piesei, iar componentele încărcării pe cele trei axe sînt : $p_x dx$, $p_y dx$, $p_z dx$, pozitive după direcțiile pozitive ale axelor.

Din ecuațiile de proiecții pe cele trei axe rezultă :

$$\begin{aligned} p_x dx + dN &= 0 ; \\ p_y dx + dT_z &= 0 ; \\ p_z dx + dT_y &= 0. \end{aligned}$$

Din ecuațiile de momente, — față de axele care trec prin O', dacă se ține seamă că momentele date de încărcările $p_x dx$, $p_y dx$, $p_z dx$ sînt infiniți mici de ordinul doi și se pot neglija — rezultă :

$$\begin{aligned} - dM_x &= 0 ; \\ - dM_y - T_y dx &= 0 ; \\ - dM_z + T_z dx &= 0. \end{aligned}$$

Cele două grupuri de ecuații se pot pune sub forma :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= - p_x ; \\ \frac{dT_z}{dx} &= - p_y ; \\ \frac{dT_y}{dx} &= - p_z \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

și

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM_x}{dx} &= 0 ; \\ \frac{dM_y}{dx} &= - T_y ; \\ \frac{dM_z}{dx} &= + T_z. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

Relațiile (7.1) și (7.2) nu sînt decît relațiile de la grinzile drepte în plan (3.1), completate cu a treia ecuație din (7.1) și primele două din (7.2). Interpretarea lor se face la fel ca la grinzile drepte în plan. Prima ecuație din (7.2) arată că la o grindă dreaptă în spațiu, în care forțele se aplică în axa grinzii, momentul de torsiune este constant.

Dacă sarcinile se aplică cu excentricitățile e_y și e_z față de axa grinzii (fig. 425, *b*), ecuațiile (7.1) rămîn neschimbate, dar în ecuațiile de momente

față de axele din O' intervin și momentele provocate de excentricitățile forțelor :

$$\begin{aligned} -dM_x - P_y\,dx\,e_z + P_z\,dx\,e_y &= 0\,; \\ -dM_y - T_y\,dx + P_x\,dx\,e_z &= 0\,; \\ -dM_z + T_z\,dx - P_x\,dx\,e_y &= 0, \end{aligned}$$

de unde se obține în locul ecuațiilor (7.2) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM_x}{dx} &= -P_y e_z + P_z e_y\,; \\ \frac{dM_y}{dx} &= -T_y + P_x e_z\,; \\ \frac{dM_z}{dx} &= T_z - P_x e_y. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

A treia ecuație din (7.3) este identică cu ecuația corespunzătoare de la grinda dreaptă în plan (3.1'), unde $e = -e_y$.

B. DIAGRAMELE EFORTURILOR

Eforturile într-o secțiune oarecare O a unei bare în spațiu se obțin din proiecțiile pe cele trei axe Ox, Oy, Oz ale torsorului $(\overline{R}, \overline{M})$ tuturor forțelor exterioare (forțe date și reacțiuni) din stînga secțiunii, în raport cu O. Aceeași operație se poate face și cu forțele de la dreapta secțiunii dar, în acest caz, trebuie schimbate semnele, pentru respectarea convenției adoptate.

Proiecția vectorului forță al torsorului pe axa Ox (axa barei) determină forța axială N, iar proiecțiile pe axele Oy și Oz — forțele tăietoare T_z și T_y.

Proiecția vectorului moment al torsorului pe axa Ox determină momentul de torsiune $M_x = M^t$, iar proiecțiile pe axele Oy și Oz — momentele încovoietoare M_y și M_z.

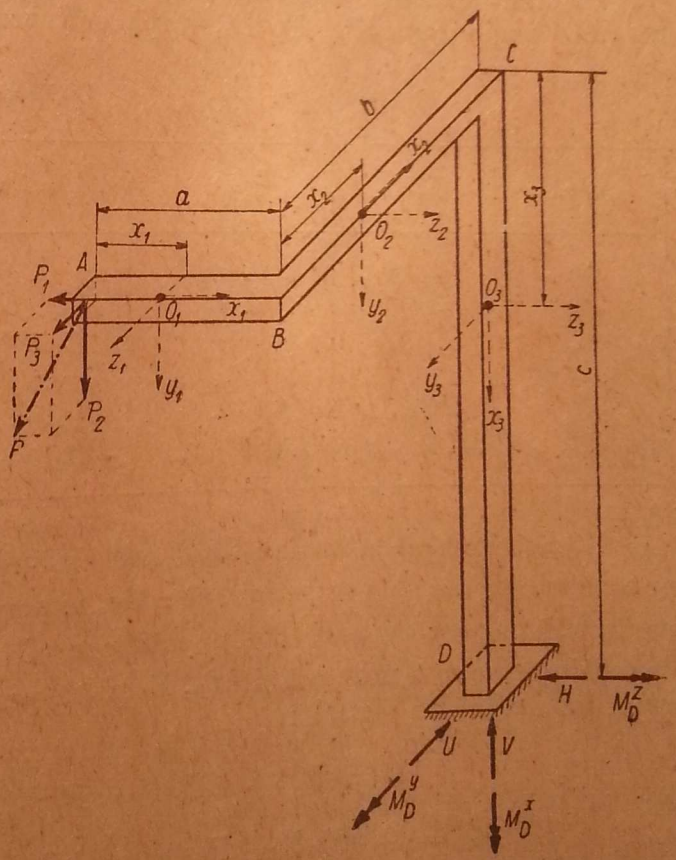


Fig. 426.

Grinda $A-B-C-D$ din spațiu (fig. 426) încastrată complet în D și încărcată cu o forță oarecare P, în capătul liber A, constituie un exemplu foarte simplu, pe care se

poate urmări cu ușurință determinarea eforturilor în orice secțiune. Stîlpul CD este vertical, și barele AB și BC se găsesc într-un plan orizontal. AB este perpendiculară în planul orizontal ABC pe BC, și BC este perpendiculară în planul vertical BCD pe CD.

Se alege ca sens de parcurgere sensul $A - B - C - D$, ceea ce determină orientarea axei Ox în fiecare secțiune a grinzii.

După cum s-a stabilit anterior (Cap. II, § 7 — b), într-o secțiune O, axa Ox aplicată pe fața din dreapta secțiunii are direcția axei grinzii și este dirijată în sensul de parcurgere al grinzii, adică intră în corp.

Celelalte două axe Oy și Oz din planul secțiunii la grinzile drepte se aleg în mod obișnuit după direcțiile principale din centrul de greutate al secțiunii. Dacă planul secțiunii este vertical, axa Oy se ia dirijată în jos (fig. 426), pe intervalele AB și BC. În acest caz, axa Oz rezultă din sistemul stîng de axe adoptat inițial, adică un observator așezat după axa Oz pozitivă vede pe Ox pozitiv rotind către Oy pozitiv de la stînga la dreapta (sensul orar).

După aceste criterii au fost desenate axele în secțiunile O_1, O_2, O_3 pe cele trei intervale distincte AB, BC, respectiv CD ale grinzii din fig. 426.

Eforturile, în orice secțiune, se pot scrie în cazul de față fără a mai fi nevoie să se determine reacțiunile din secțiunea de încastrare, deoarece se poate face reducerea forțelor exterioare în raport cu centrul de greutate al oricărei secțiuni pornind de la capătul liber A al grinzii.

Pentru ușurința calculelor se descompune forța oarecare P din A, în trei componente P_1, P_2 P_3, după cele trei direcții corespunzătoare sistemului de axe O_1x, O_1y, O_1z, cum este arătat în figură.

Tabela 15

Efortul	$A - B$	$B - C$	$C - D$
N	$+ P_1$	$+ P_3$	$- P_2$
T_z	$- P_2$	$- P_2$	$- P_3$
T_y	$- P_3$	$+ P_1$	$+ P_1$
$M_x = M^t$	0	$+ P_2 \cdot a$	$- P_1 \cdot b + P_3 \cdot a$
M_y	$+ P_3 \cdot x_1$	$+ P_3 \cdot a - P_1 \cdot x_2$	$- P_2 \cdot a - P_1 \cdot x_3$
M_z	$- P_2 \cdot x_1$	$- P_2 \cdot x_2$	$- P_2 \cdot b - P_3 \cdot x_3$

Expresiile eforturilor pe cele trei intervale AB, BC, CD sînt trecute în tabela 15. Componentele torsorului $(\overline{R}_D, \overline{M}_D)$ din secțiunea de încastrare D, adică reacțiunile, se determină, de asemenea, din proiecțiile pe cele trei axe.

O chestiune de notație : Cînd se scriu indicii secțiunii jos, indicii corespunzători axelor se vor scrie sus : de exemplu, $M_D^x = M_D^t$ reprezintă momentul în raport cu axa Ox în secțiunea D (M_D^x), care, fiind un moment de torsiune, se mai notează și M_D^t. Rezultă pentru secțiunea de încastrare, după notațiile din figură :

$$V = P_2; \quad H = - P_1; \quad U = P_3;$$

$$M_D^x = + P_1 \cdot b - P_3 \cdot a; \quad M_D^y = + P_1 \cdot c + P_2 \cdot a;$$

$$M_D^z = + P_2 \cdot b + P_3 \cdot c.$$

Pentru construcția diagramelor se ia $b = 2a$ și $c = 3a$.

De asemenea, cosinușii directori ai forței P:

$\cos(P,P_1) = 0{,}36$; $\cos(P,P_2) = 0{,}80$; $\cos(P,P_3) = 0{,}48$ cu relația necesară

de unde: $0{,}36^2 + 0{,}80^2 + 0{,}48^2 = 1$,

$$P_1 = 0{,}36\ P;\quad P_2 = 0{,}80\ P;\quad P_3 = 0{,}48\ P.$$

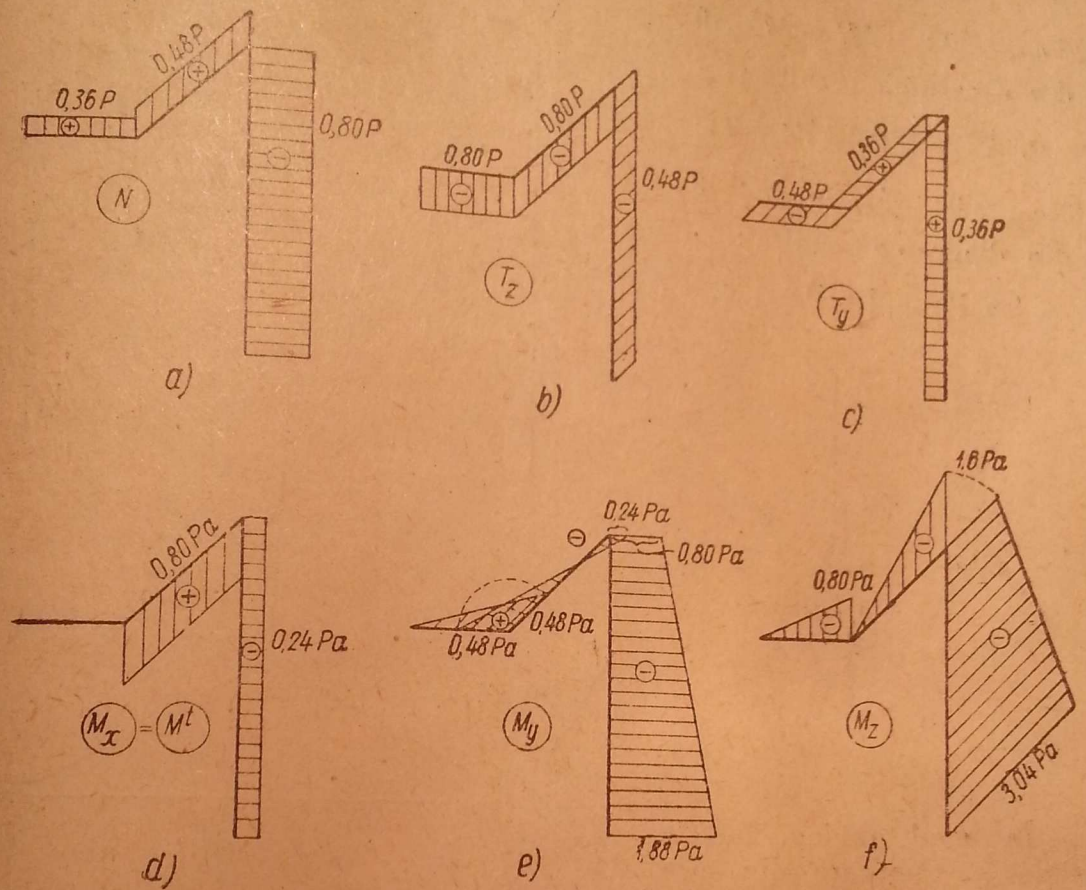


Fig. 427.

Înlocuind aceste valori în tabela 15 se obțin diagramele din fig. 427, *a*—*f*.

Trebuie remarcată corespondența dintre aceste diagrame și relațiile diferențiale (7.1) și (7.2), în special, faptul că pe fiecare bară dreaptă momentul de torsiune ($M_x = M^t$) este constant.

Pentru verificarea diagramelor, este bine să se verifice nodurile ca la problemele plane, dar în acest caz va trebui să se țină seamă de caracterul vectorial al momentelor încovoietoare și de torsiune. Dacă secțiunile unei bare se fac infinit apropiate de nod, atunci la verificarea unui nod, la fel ca în plan, în ecuațiile de momente nu intervin forțele.

Să verificăm astfel momentele din nodul *C*. Pe cele două secțiuni (*1*) și (*2*) se introduc eforturile-momente, pozitive (fig. 428). Pe fața (*1*) momentele pozitive sînt dirijate după direcțiile pozitive ale axelor de pe zona *BC* a grinzii din fig. 426, iar pe fața (*2*) momentele pozitive au sensul contrar axelor de pe porțiunea *CD*, întrucît fața (*2*) din fig. 428 reprezintă fața din stînga secțiunii (*2*), prin grinda *CD*.

Din ecuațiile de momente în raport cu trei axe rezultă :

$\sum \mathfrak{M}_{O_2x_2} = 0$; $M^x_{c1} + M^y_{c2} = 0$;

și din diagramă rezultă :

$$+ 0{,}80\,Pa - 0{,}80\,Pa = 0 ;$$

$\sum \mathfrak{M}_{O_2y_2} = 0$; $M^y_{c1} - M^x_{c2} = 0$;

și din diagramă rezultă :

$$- 0{,}24\,Pa + 0{,}24\,Pa = 0 ;$$

$\sum \mathfrak{M}_{O_2z_2} = 0$; $M^z_{c1} - M^z_{c2} = 0$;

și din diagramă rezultă :

$$- 1{,}6\,Pa + 1{,}6\,Pa = 0.$$

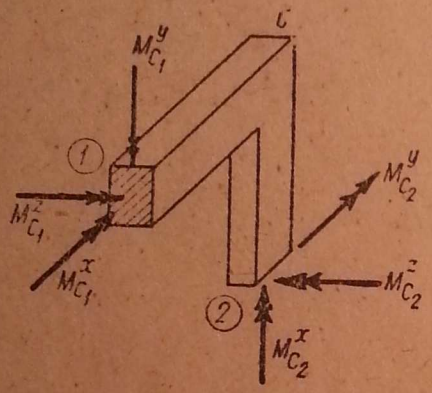


Fig. 428.

În mod analog, forțele axiale și tăietoare din cele două secțiuni (*1*) și (*2*) în jurul nodului *C* se pot verifica din ecuațiile de proiecție pe cele trei axe.

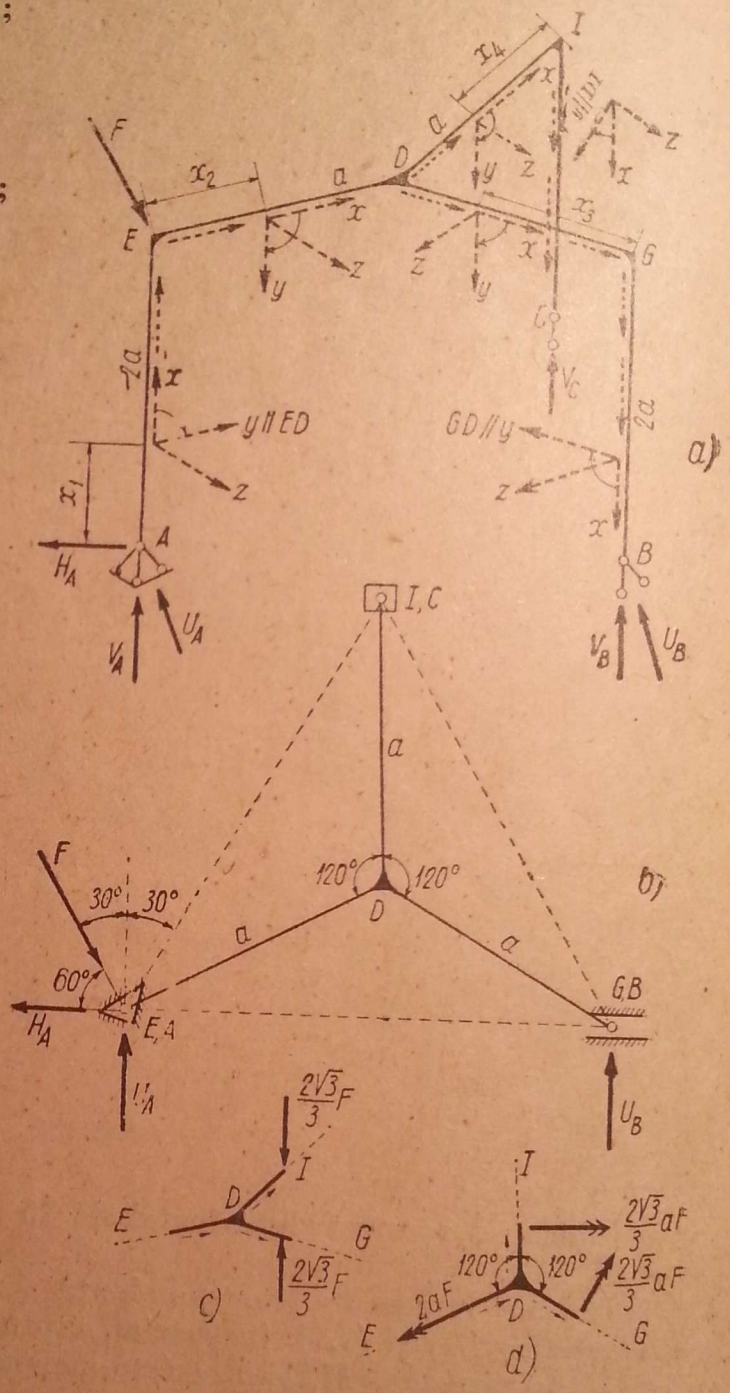


Fig. 429.

Aplicația 97. Să se determine diagramele eforturilor în grinda din fig. 429. Barele *ED*, *DI*, *DG* se găsesc într-un plan orizontal, iar stîlpii *AE*, *BG*, *CI* sînt verticali. Nodurile *D*, *E*, *G*, *I* sînt rigide. Forța *F* este paralelă cu *IG*, iar reazemul dublu din *B* are libertatea de mișcare după direcția *BA*.

Răspuns. Se determină întîi reacțiunile care sînt : reacțiunile verticale V_A, V_B, V_C ; reacțiunile orizontale perpendiculare pe *AB* : U_A și U_B și reacțiunea orizontală H_A, după direcția *AB*. Valorile lor se determină astfel :

$$\sum \mathfrak{M}_{AB} = 0 ; \quad + F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 2a + V_C \cdot \frac{3}{2} a = 0 ; \quad V_C = - \frac{2\sqrt{3}}{3} F ;$$

$$\sum \mathfrak{M}_{BC} = 0 ; \quad V_A = 0 ;$$

$$\Sigma \mathfrak{M}_{AC} = 0;\ +F\frac{\sqrt{3}}{2}2a - V_B\cdot\frac{3}{2}a = 0;\ V_B = +\frac{2\sqrt{3}}{3}F;$$

$$\Sigma \mathfrak{M}_{AE} = 0;\ U_B = 0;$$

$$\Sigma \mathfrak{M}_{BG} = 0;\ -F\frac{3}{2}a + U_A\cdot a\sqrt{3} = 0;\ U_A = +\frac{\sqrt{3}}{2}F;$$

$$\Sigma pr.(AB) = 0;\ F\cdot\frac{1}{2} - H_A = 0;\ H_A = +\frac{1}{2}F.$$

Expresiile eforturilor sînt trecute în tabela 16, în funcție de sensurile de parcurgere și de sistemul de axe indicat în fig. 429, *a*.

Tabela 16

Bara	$A-E$	$E-D$	$B-G$	$G-D$	$C-I$	$I-D$
N	0	$T^z_{AE} = 0$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}F$	0	$+\frac{2\sqrt{3}}{3}F$	0
T_z	$H_A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - U_A\cdot\frac{1}{2} = 0$	$V_A = 0$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}F$	0	$+\frac{2\sqrt{3}}{3}F$
T_y	$H_A\cdot\frac{1}{2} + U_A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = F$	$T^y_{AE} - F = 0$	0	0	0	0
$M_x = M^t$	0	$-T^y_{AE}\cdot 2a = -2aF$	0	0	0	0
M_y	$-T^y_A\cdot x_1 = -F\cdot x_1$	$(-T^y_{AE} + F)\,x_2 = 0$	0	0	0	0
M_z	$T^z_A\cdot x_1 = 0$	$T^z_{AE}\cdot 2a = 0$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}F\cdot x_3$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}F\cdot x_4$

Diagramele nu au mai fost desenate. În fig. 429, *c* și *d*, este separat nodul *D* pentru verificarea echilibrului de forțe și de momente.

§ 46. GRINZI CURBE PLANE CU FORȚE NORMALE PE PLANUL LOR

A. CHESTIUNI GENERALE

Așa cum s-a văzut de la calculul reacțiunilor (§ 44) o grindă curbă plană supusă la încărcări oarecare în spațiu se descompune în două scheme de calcul independente între ele, dacă toate forțele exterioare se descompun

în punctele lor de aplicație după normala la planul grinzii și componentele în planul grinzii.

Componentele din planul grinzii duc la o schemă de calcul în plan care a fost studiată la sistemele plane ; aici se va analiza acțiunea componentelor normale pe plan.

Într-o secțiune O a unei asemenea grinzi plane (fig. 430, *a*) se introduc axele Ox, Oy, Oz în raport cu care se fixează semnele eforturilor. Axa Ox se

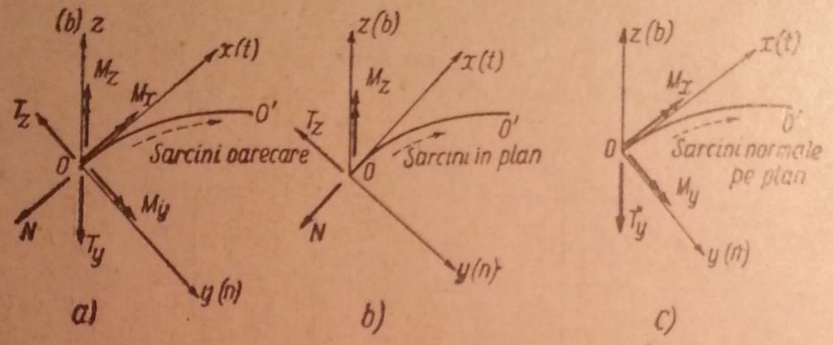


Fig. 430.

orientează după tangentă, axa Oy, după normala la curbă în planul ei care este normala principală, cu sensul pozitiv spre centrul de curbură, și axa Oz, după normala la planul curbei (binormala).

În raport cu aceste axe, eforturile pozitive în secțiunea O sînt arătate în fig. 430, *a*, după convenția de pînă acum.

Se recunoaște ușor că eforturile produse de forțele din planul grinzii sînt N, T_z și M_z (fig. 430, *b*), care au mai fost studiate la arce plane, unde însă nu s-a mai pus indicele z, deoarece nu era nevoie. Afară de N, T_z, M_z, forțele din planul grinzii nu pot produce alte eforturi.

Forțele normale pe planul grinzii vor produce atunci restul eforturilor din secțiunea O, adică T_y, M_x și M_y cu semnele pozitive după convenția admisă (fig. 430, *c*).

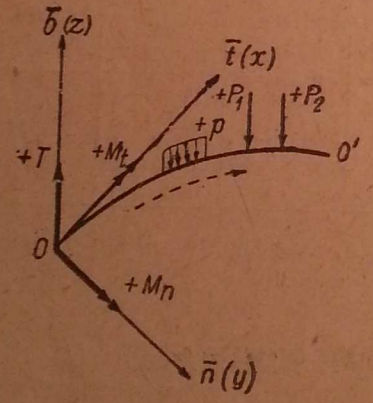


Fig. 431.

Pentru grinzile curbe plane, așezate într-un plan orizontal, sarcinile normale pe plan sînt verticale, și după convenția metodei generale, unde sarcinile date sînt pozitive cînd sînt dirijate după axele pozitive, ar rezulta că sarcinile din greutatea corpurilor sînt pozitive cînd sînt dirijate de jos în sus, ceea ce nu se obișnuiește în tehnică.

De aceea, practica a consacrat în acest caz semnele următoare : pentru încărcări verticale de sus în jos, semnul pozitiv și, în consecință, pentru forțe tăietoare, semnul pozitiv de jos în sus, ca în fig. 431 unde :

$$+T = -T_y. \tag{7.4}$$

Totodată, în fig. 431 axele Ox, Oy, Oz au fost notate cu indicii după tangentă, normala principală și binormală : Ot, On, Ob și momentele la fel : $M_t = M_x$ și $M_n = M_y$.

La grinzile curbe plane cu forțe normale pe plan calculele vor fi conduse mai departe cu eforturile T, M_n, M_t (fig. 431).

B. RELAȚII DIFERENȚIALE

Dintr-o grindă curbă plană se separă un element de lungime ds (fig. 432, a), încărcat cu sarcina continuă normală pe planul grinzii, care, pe intervalul ds, poate fi considerată uniform distribuită. În cele două secțiuni O și O' se introduc eforturile pozitive (fig. 432, a).

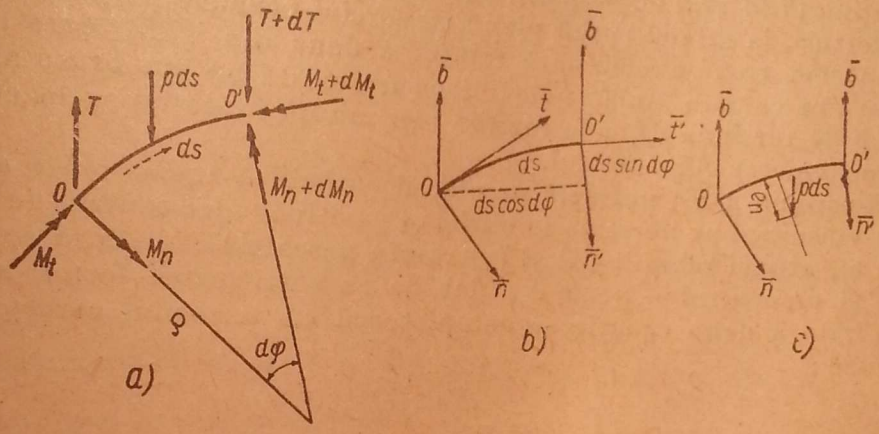


Fig. 432.

Din ecuația de proiecție pe normala la planul grinzii (axa $\bar{b}$) se deduce :

$$+ T - T - dT - pds = 0, \qquad (\alpha)$$

iar din ecuațiile de momente în raport cu axele $\overline{O't'}$ și $\overline{O'n'}$ (fig. 432, b) din planul grinzii, dacă se ține seamă că momentele încărcării pds sînt infiniți mici, de ordin superior, se deduce :

$$\sum M_{O't'} = 0 ; \qquad - M_t - dM_t + M_t \cos d\varphi + M_n \sin d\varphi + Tds \sin d\varphi = 0 ; \qquad (\beta)$$

$$\sum M_{O'n'} = 0 ; \qquad - M_n - dM_n + M_n \cos d\varphi - M_t \sin d\varphi + Tds \cos d\varphi = 0. \qquad (\gamma)$$

Dacă se ține seamă că $d\varphi$ fiind foarte mic, se poate scrie :

$$\sin d\varphi \simeq d\varphi \text{ și } \cos d\varphi = 1,$$

că, în raport cu raza de curbură ρ a grinzii se poate scrie curbura sub forma :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

și că în aceste condiții produsul $Tds \sin d\varphi$ din ecuația (β) devine un infinit mic de ordinul 2, care se poate neglija în comparație cu ceilalți ter-

meni ce rămîn, care sînt infiniţi mici de ordinul 1, relaţiile (α), (β), (γ) de mai sus se pot pune sub forma :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= -p; \\ \frac{dM_t}{ds} &= \frac{M_n}{\rho}; \\ \frac{dM_n}{ds} &= T - \frac{M_t}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Relaţiile (7.5) arată corespondenţa dintre elementele geometrice, încărcare şi eforturi, la grinda curbă plană cu sarcini normale pe planul ei.

În special, trebuie remarcată relaţia a doua din (7.5), care arată că dacă ρ nu are valoare nulă, adică dacă nu există un cot brusc al curbei, momentul de torsiune M_t este maxim sau minim în secţiunea în care momentul încovoietor M_n este nul.

Dacă sarcina $p \cdot ds$, normală pe planul curbei, se aplică cu o excentricitate e_n, măsurată pe normala la curbă şi pozitivă spre centrul de curbură (fig. 432, c), atunci relaţiile (α) şi (γ) rămîn neschimbate, iar în ecuaţia (β) intervine şi momentul $-p \cdot ds \cdot e_n$, dat de excentricitatea forţei, aşa că în relaţiile (7.5) a doua ecuaţie se completează cu termenul corespunzător, obţinîndu-se :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= -p; \\ \frac{dM_t}{ds} &= \frac{M_n}{\rho} - p \cdot e_n; \\ \frac{dM_n}{ds} &= T - \frac{M_t}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Ecuaţiile diferenţiale (7.5) pot fi rezolvate cu uşurinţă în cazul cînd grinda plană este circulară : $\rho = r = const.$ şi cînd încărcarea $p = p(\varphi)$ — care, în general, este variabilă pe grindă — este constantă : $p(\varphi) = q = const.$

În acest caz :

$ds = r\, d\varphi$, şi ecuaţiile (7.5) se pot pune sub forma :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{d\varphi} &= -q \cdot r; \\ \frac{dM_t}{d\varphi} &= M_n; \\ \frac{dM_n}{d\varphi} &= T \cdot r - M_t. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Se integrează prima ecuaţie : $T = -q \cdot r\ \varphi + C_1$.

Derivînd ultima ecuație din (7.7) în raport cu φ și ținînd seamă de celelalte două, se obține :

$$\frac{d^2M_n}{d\varphi^2} = r\frac{dT}{d\varphi} - \frac{dM_t}{d\varphi} = -qr^2 - M_n,$$

care se pune sub forma :

$$\frac{d^2M_n}{d\varphi^2} + M_n = -q\,r^2,$$

ecuație diferențială liniară de ordinul 2, a cărei soluție generală este :

$$M_n = C_2 \sin\varphi + C_3\cos\varphi - q\,r^2.$$

Derivata acestei ecuații este :

$$\frac{dM_n}{d\varphi} = C_2\cos\varphi - C_3\sin\varphi.$$

Introducînd valoarea lui $\frac{dM_n}{d\varphi}$ în a treia ecuație din (7.7), se obține :

$$M_t = T\cdot r - C_2\cos\varphi + C_3\sin\varphi = -qr^2\varphi + C_1 r - C_2\cos\varphi + C_3\sin\varphi.$$

În concluzie, eforturile într-o grindă circulară încărcată cu sarcină uniform repartizată normală pe planul ei sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} T &= -q\,r\,\varphi + C_1;\\ M_n &= -qr^2 + C_2\sin\varphi + C_3\cos\varphi;\\ M_t &= -qr^2\varphi + C_1\,r - C_2\cos\varphi + C_3\sin\varphi. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Cele trei constante de integrare C_1, C_2, C_3 din (7.8) urmează a fi determinate din condițiile de rezemare. La sistemele static determinate, aceste condiții se obțin din cunoașterea valorilor particulare ale unor eforturi în anumite puncte, cum sînt pe axele de simetrie, sau în dreptul reazemelor.

Ecuațiile (7.8), cu constantele de integrare determinate, se pot aplica, evident, numai pe porțiunile în care nu intervin alte forțe afară de sarcina uniform repartizată.

C. DIAGRAMELE EFORTURILOR

Diagramele eforturilor T, M_n și M_t se construiesc după criteriile generale : se determină întîi reacțiunile și apoi se face reducerea tuturor forțelor exterioare (forțe date și reacțiuni) de la stînga secțiunii, în raport cu centrul de greutate al secțiunii. Astfel, într-o secțiune oarecare i, forța tăietoare T_i se determină din ecuația de proiecție pe normala la planul grinzii, momentul încovoietor M_i^n — din ecuația de momente în raport cu normala în i și momentul de torsiune M_i^t — din ecuația de momente în raport cu tangenta la curbă în i.

Diagramele care se obțin din expresiile analitice ale eforturilor se desenează uneori pe grinda desfășurată.

Conducerea calculelor este arătată direct la aplicaţii. Aici se vor da numai două indicaţii, în două cazuri particulare. Astfel, la grinda circulară din fig. 433 se cunosc eforturile în secţiunea (1): T_1, M_1^n, M_1^t. Să se găsească eforturile în secţiunea (2): T_2, M_2^n, M_2^t, dacă între secţiunile (1) şi (2) grinda este încărcată cu o sarcină uniform repartizată q şi cu o forţă concentrată P. Raza cercului este r, iar unghiul la centru între (1) şi (2) este φ. Poziţia forţei P este determinată de unghiul la centru γ faţă se secţiunea (2).

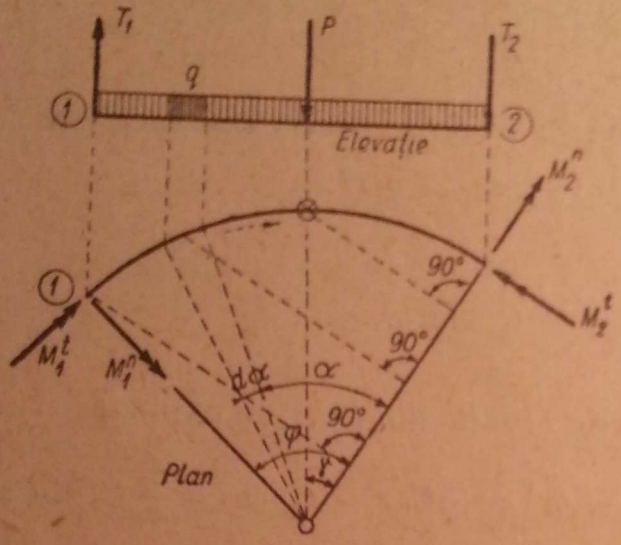


Fig. 433.

Se introduc în secţiunile (1) şi (2) eforturile pozitive după convenţia stabilită, sensul de parcurgere fiind de la (1) spre (2). Din ecuaţia de proiecţie faţă de normala la grindă rezultă:

$$T_1 - q\,r\,\varphi - P - T_2 = 0.$$

Din ecuaţia de momente faţă de tangentă în (2) se obţine

$$-M_2^t + M_1^t \cos\varphi + M_1^n \sin\varphi + T_1\,r\,(1-\cos\varphi) - \int_0^\varphi qr\,d\alpha\,r\,(1-\cos\alpha) - Pr\,(1-\cos\gamma) = 0.$$

Din ecuaţia de momente faţă de normala în (2) rezultă:

$$-M_2^n + M_1^n\cos\varphi - M_1^t\sin\varphi + T_1 r\sin\varphi - \int_0^\varphi qr\,d\alpha\,r\sin\alpha - Pr\sin\gamma = 0.$$

Dacă se ţine seamă că:

$$\int_0^\varphi qr\,d\alpha\,r\,(1-\cos\alpha) = qr^2\int_0^\varphi (1-\cos\alpha)\,d\alpha = qr^2\,(\varphi-\sin\varphi);$$

$$\int_0^\varphi qr\,d\alpha\,r\sin\alpha = qr^2\int_0^\varphi \sin\alpha\,d\alpha = qr^2\,(1-\cos\varphi),$$

ecuaţiile de mai sus devin:

$$T_2 = T_1 - q\,r\,\varphi - P; \qquad (7.9)$$

$$M_2^t = M_1^n\sin\varphi + M_1^t\cos\varphi + T_1\cdot r\,(1-\cos\varphi) - qr^2\,(\varphi-\sin\varphi) - Pr\,(1-\cos\gamma);$$

$$M_2^n = M_1^n\cos\varphi - M_1^t\sin\varphi + T_1\,r\sin\varphi - qr^2\,(1-\cos\varphi) - Pr\cdot\sin\gamma.$$

Relaţiile (7.9) dau indicaţii concrete asupra modului cum se deduc expresiile eforturilor pentru construirea diagramelor.

Pentru verificare, ele trebuie să satisfacă ecuaţiile (7.7); în special trebuie verificată relaţia $\frac{dM^t}{d\varphi} = M^n$.

Al doilea caz pentru care se dau indicații este verificarea momentelor în dreptul unui cot, ca în fig. 434.

Dacă se separă nodul D și se iau ecuațiile de momente față de axele lui M_2^t și M_2^n (fig. 434, *b*), se obține :

$$M_1^n \cos\varphi - M_2^n - M_1^t \sin\varphi = 0;$$

$$M_1^t \cos\varphi - M_2^t + M_1^n \sin\varphi = 0$$

sau

$$M_2^n = M_1^n \cos\varphi - M_1^t \sin\varphi; \quad (7.10)$$

$$M_2^t = M_1^n \sin\varphi + M_1^t \cos\varphi.$$

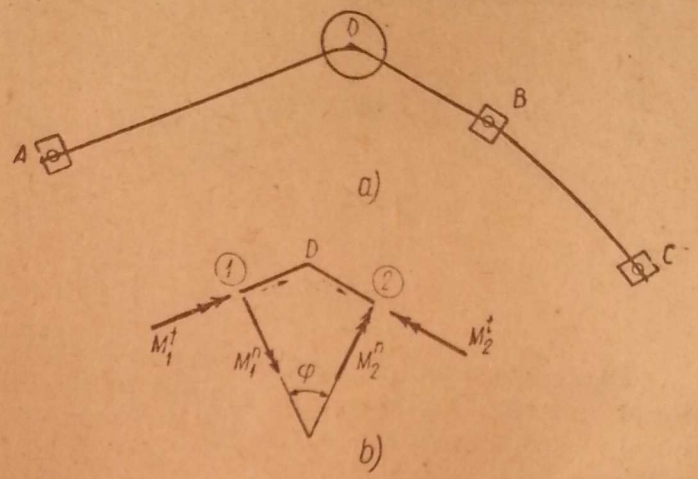


Fig. 434.

D. SARCINI MOBILE ȘI LINII DE INFLUENȚĂ

Eforturile provocate de un convoi mobil de sarcini normale pe planul grinzii se studiază cu ajutorul liniilor de influență ca și la sistemele plane, deoarece reacțiunile și eforturile sînt funcțiuni liniare de sarcini. Se va considera o grindă curbă orizontală și sarcina $P = 1$ verticală, care se deplasează pe grindă, și se vor determina liniile de influență pentru reacțiuni și eforturi. Acestea se pot determina pe cale analitică, sau cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Pentru aplicarea principiului deplasărilor virtuale, trebuie să se observe că prin suprimarea unei legături corespunzătoare reacțiunilor normale pe plan sau eforturilor T, M^t, M^n dintr-o secțiune oarecare, grinda se transformă într-un mecanism cu un grad de libertate,care permite numai deplasări normale pe planul grinzii, astfel încît va trebui să se țină seamă de cele studiate la Cap. II, § 9—B-b „Cinematica sistemelor plane cu grade de libertate ce permit deplasări normale pe plan".

Grinda curbă plană ABC din fig. 435 cu trei reazeme simple normale pe plan în A, B și C constituie un exemplu pe care vom arăta cum se determină liniile de influență ale reacțiunilor și ale eforturilor pentru sarcina mobilă normală pe plan $P = 1$.

a) Liniile de influență ale reacțiunilor

Linia V_A. Din ecuația de momente față de axa BC rezultă :

$$V_A \cdot a - P \cdot z = 0, \quad P = 1$$

de unde :

$$V_A = \frac{1}{a} \cdot z. \quad (7.11)$$

Expresia (7.11) arată că linia de influență V_A este reprezentată de variația distanțelor z, de la punctul de aplicație al forței mobile $P = 1$ la axa BC, împărțită cu distanța a de la reazemul A la aceeași axă. Linia de influență este hașurată în fig. 435. Valorile pe cale grafică se obțin dacă se măsoară ordonatele z la scara $a = 1$.

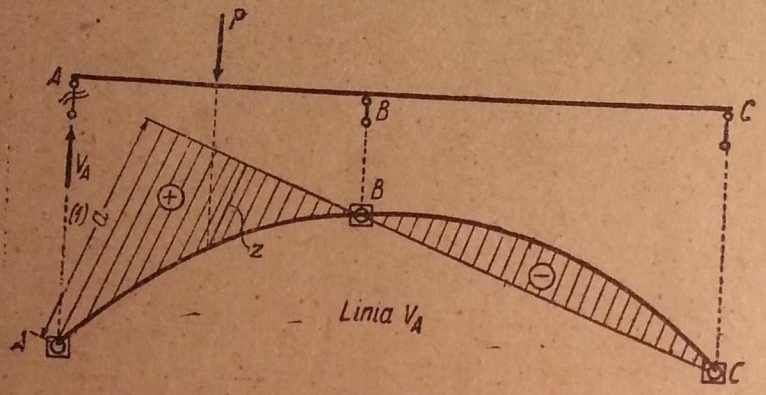


Fig. 435.

La același rezultat se ajunge prin deplasări virtuale. Se suprimă pendulul reazemului din A și se introduce reacțiunea V_A. În aceste condiții, grinda se poate roti în jurul axei BC situată în planul grinzii. Deplasarea v a unui punct oarecare al grinzii, normală pe planul ei, are expresia $v = z\,\theta$, unde θ este unghiul infinit mic cu care s-a rotit bara față de axa BC.

Dacă se ia sensul deplasării lui A astfel, încît V_A să producă lucru mecanic negativ, rezultă:

$$-V_A \cdot v_A + P \cdot v = 0,$$

unde $v_A = a\,\theta$; $v = z\,\theta$;

$P = 1$

și deci:

$$V_A = \frac{1 \cdot z \cdot \theta}{a\,\theta} = \frac{1}{a} \cdot z, \quad (7.11)$$

aceeași expresie de mai sus.

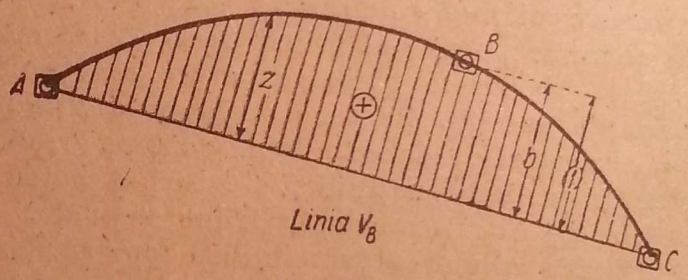


Fig. 436.

În fig. 436 este reprezentată linia de influență a reacțiunii V_B dedusă pe aceeași cale: $V_B = \frac{1}{b} z$.

b) Linia de influență a forței tăietoare

Forța tăietoare în secțiunea i, cînd $P = 1$ se deplasează pe grinda $A-B-C$ (fig. 437) are valoarea dată de expresiile:

$T_i = V_A$, cînd $P = 1$ se găsește pe intervalul $i - B - C$;
$T_i = V_A - 1$, cînd $P = 1$ se găsește pe intervalul $A - i$.

Deci, pe intervalul $i - B - C$, linia T_i coincide cu linia V_A, iar pe intervalul $A - i$ din ordonatele lui V_A trebuie să se scadă ordonata constantă 1, ceea ce se obține ducînd din A paralela AD la BC (fig. 437).

Același rezultat se obține prin deplasări virtuale. Se suprimă în i, legătura corespunzătoare forței tăietoare, adică se introduce în i un mecanism care permite celor două fețe ale secțiunii să se depărteze între ele după

direcția normalei la planul grinzii, dar astfel ca nici o rotație relativă a celor două fețe să nu fie îngăduită. În aceste condiții, porțiunea $i - B - C$, care are două puncte fixe B și C, se va roti în jurul axei BC, iar porțiunea $A - i$ cu un punct fix în A se va roti în jurul axei AD paralelă cu BC, cu același unghi ca și porțiunea $i-B-C$, din condițiile impuse de legătura din i. Ecuația lucrului mecanic virtual se scrie:

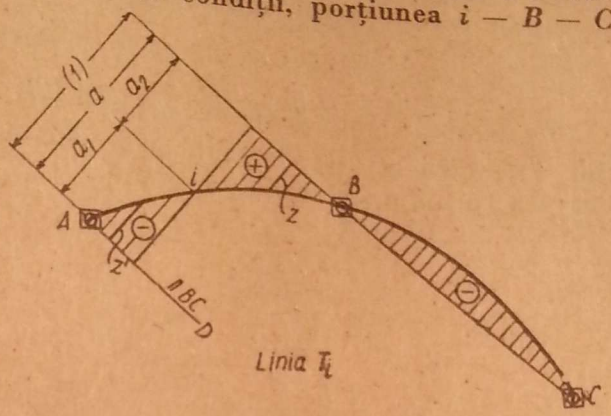


Fig. 437.

$$-T_i v_i + 1 \cdot v = 0.$$

Dar, $v = z\ \theta_{BC}$ și $v_i = a_1\ \theta_{AD} + a_2 \theta_{BC} = (a_1 + a_2)\ \theta_{BC} = a\ \theta_{BC}$, deoarece $\theta_{BC} = \theta_{AD}$.

Rezultă $T_i = \frac{z}{a} = V_A$, pentru $P=1$ pe regiunea $i-B-C$. Pentru $P = 1$, pe intervalul $A - i$ avem $v = -z'\ \theta_{AB}$ și $T_i = -\frac{z'}{a}$, expresie echivalentă cu $T_i = V_A - 1$ (fig. 437).

c) Linia de influență a momentului încovoietor M_i^n

Aceasta se obține direct prin deplasări virtuale ca în fig. 438. În secțiunea i se introduce o articulație care să permită rotirea celor două corpuri $A-i$ și $i-B-C$ între ele, numai în jurul axei momentului M^n, adică a normalei la curbă în secțiunea i. Sistemul s-a transformat într-un mecanism, cu un singur grad de libertate, care permite deplasări normale pe planul grinzii [1]).

Se notează partea $A - i$ cu (1) și $i - B - C$ cu (2). Corpul (2) are două puncte fixe B și C și se rotește față de teren în jurul axei BC cu unghiul $\bar{\theta}_2$, al cărui vector este dirijat după axa BC. Corpul (2) se rotește față de corpul (1) în jurul normalei in cu un unghi $\bar{\theta}_{21}$, al cărui vector este dirijat după in. Axele vectorilor $\bar{\theta}_2$ și $\bar{\theta}_{21}$ sînt situate în planul grinzii și se întîlnesc în punctul I. Corpul (1) are punctul fix A și se va roti față de teren în jurul unei axe din planul grinzii care trece prin A cu un unghi $\bar{\theta}_1$. Pentru ca mișcarea să poată avea loc, trebuie ca axele celor trei rotații coplanare $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, $\bar{\theta}_{21}$ să fie concurente. Dar punctul de concurență I al lui $\bar{\theta}_2$ și $\bar{\theta}_{21}$ a fost determinat. Deci corpul (1) se va roti cu $\bar{\theta}_1$ în jurul dreptei AI.

[1]) Să se revadă Cap. II, § 9 — B — b, privitor la Cinematica sistemelor plane cu grade de libertate, care permit deplasări normale pe plan.

Între cele trei rotații trebuie să existe relația vectorială (2.14), care reprezintă relația compunerii rotațiilor concurente în mișcarea relativă :

$$\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_{21}, \tag{7.12}$$

[$\bar{\theta}_2$ este rotația absolută a corpului (*2*), $\bar{\theta}_1$ este rotația absolută a corpului (*1*), adică rotația de transport pentru corpul (*2*), și $\bar{\theta}_{21}$ este rotația relativă a corpului (*2*) față de corpul (*1*).]

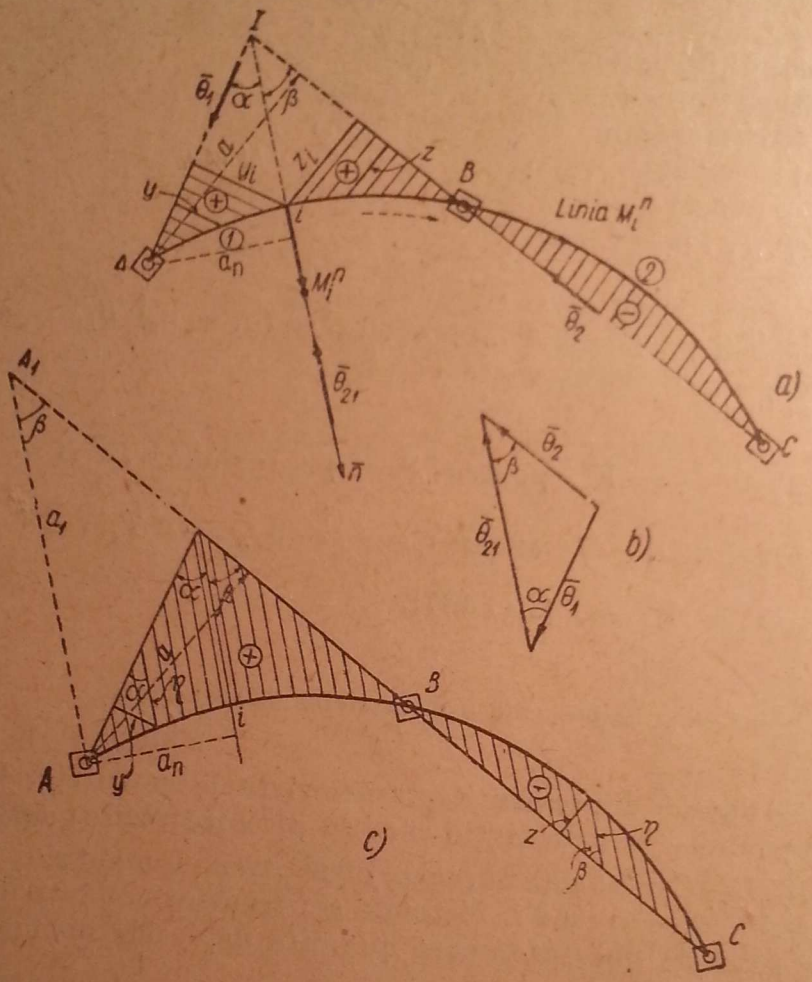


Fig. 438.

M_i^n pe fața din dreapta secțiunii *i*, adică aplicat pe corpul (*2*), este pozitiv cînd este dirijat spre centrul de curbură (fig. 438).

Pentru ușurința interpretării semnelor ordonatelor liniei de influență, se va da rotația $\bar{\theta}_{21}$ de sens contrar lui M_i^n. Mărimile și sensurile rotațiilor θ_1 și θ_2 se deduc din construirea triunghiului vectorilor ce intervin în relația (7.12) în funcție de valoarea arbitrară dată și sensul fixat pentru θ_{21} ca în fig. 438, *b*, de unde se pot determina sensurile vectorilor θ_1 și θ_2 dirijați după dreptele *AI* și *BC* astfel ca relația (7.12) să fie satisfăcută.

Ecuația de lucru mecanic virtual devine :

$$-M_i^n\,\theta_{21} + 1 \cdot v = 0, \text{ de unde } M_i^n = \frac{1}{\theta_{21}}\,v.$$

Pentru deplasarea verticală v a punctului de aplicație al forței mobile $P = 1$, avem următoarele expresii în valoare absolută :

$v = |\theta_1 \cdot y|$ cînd $P = 1$ se găsește pe intervalul $A - i$;

$v = |\theta_2 \cdot z|$ cînd $P = 1$ se găsește pe intervalul $i - B - C$.

Deci :

$$M_i^n = \frac{\theta_1}{\theta_{21}} \cdot y, \quad \text{pentru } P = 1 \text{ între } A \text{ și } i;$$

$$M_i^n = \frac{\theta_2}{\theta_{21}} \cdot z \quad \text{pentru } P = 1 \text{ pe zona } i - B - C. \tag{7.13}$$

Ordonatele liniei de influență sînt proporționale cu distanțele y, respectiv z, la axele $A\,I$ și $B\,C$, măsurate la scara lungimilor, dar trebuie observat că multiplicatorii distanțelor y și z sînt diferiți, deoarece, în general, $|\theta_1| \neq |\theta_2|$.

Semnele se deduc după convenția generală. Părțile care coboară au deplasarea în sensul lui $P = 1$, deci sînt pozitive, și părțile care se ridică au semnul minus. Astfel, corpul $A - i$ coboară din rotația față de $\overline{\theta}_1$, deci ordonatele y sînt pozitive, iar în rotația corpului (2) față de $\overline{\theta}_2$, partea $i - B$ coboară, deci are semnul plus, și $B - C$ se ridică, deci are semnul minus.

Pentru măsurarea ordonatelor liniei de influență trebuie calculate rapoartele $\frac{\theta_1}{\theta_{21}}$ și $\frac{\theta_2}{\theta_{21}}$ din (7.13). Ele se obțin din triunghiul vectorilor reprezentat în fig. 438, *b* în funcție de unghiurile α și β din fig. 438, *a*. Astfel :

$$\frac{\theta_{21}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\theta_1}{\sin \beta} = \frac{\theta_2}{\sin \alpha},$$

de unde :

$$\frac{\theta_1}{\theta_{21}} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{și} \quad \frac{\theta_2}{\theta_{21}} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Relațiile (7.13) devin :

$$M_i^n = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot y \quad \text{pentru } A - i;$$

$$M_i^n = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot z \quad \text{pentru } i - B - C. \tag{7.14}$$

Uneori este util ca multiplicatorii distanțelor y și z, care se mai numesc și multiplicatorii liniei de influență, să se pună sub formă de rapoarte între distanțe care se pot măsura direct în figură. Dacă se notează cu a distanța de la A la dreapta BC și cu a_n distanța de la A la Ii, rezultă :

$$AI = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}, \text{ de unde : } \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a_n}{a};$$

apoi

$$Ii = \frac{y_i}{\sin\alpha} = \frac{z_i}{\sin\beta}, \text{ de unde : } \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{z_i}{y_i}$$

și

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{z_i}{y_i} \cdot \frac{a_n}{a}.$$

Ecuațiile (7.14) devin în acest caz :

$$M_i^n = \frac{z_i}{y_i} \cdot \frac{a_n}{a} \cdot y \qquad \text{pentru } A - i ;$$

$$M_i^n = \frac{a_n}{a} \cdot z \qquad \text{pentru } i - B - C. \tag{7.15}$$

Ordonatele liniei de influență M_i^n din fig. 438, *a*, date de ecuațiile (7.14) și (7.15), au inconvenientul că se măsoară la două scări diferite, cînd $\alpha \neq \beta$ sau $z \neq y_i$, ceea ce nu permite să se tragă repede concluzii asupra valorilor relative ale ordonatelor pe întreaga grindă.

Acest inconvenient se poate remedia, dacă în locul distanțelor y și z, perpendiculare pe $\bar{\theta}_1$ și $\bar{\theta}_2$ se vor duce din aceleași puncte ale grinzii, paralele la $\bar{\theta}_{12}$, și se vor considera ordonatele η pînă la $\bar{\theta}_1$ și $\bar{\theta}_2$ ca în fig. 438, *c* (ordonatele η se vor măsura tot la scara lungimilor ca și y și z).

În adevăr, pe porțiunea $A - i$ vom avea :

$$y = \eta \sin\alpha \quad \text{și deci} \quad M_i^n = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \eta,$$

iar pe porțiunea $i - B - C$:

$$z = \eta \sin\beta \quad \text{și deci} \quad M_i^n = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \eta,$$

astfel că pe toată grinda $A-B-C$ este valabilă expresia :

$$M_i^n = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \eta \tag{7.16}$$

și aici multiplicatorul lui η se poate exprima în funcție de distanțele măsurate în figură. Dacă din A se duce paralela la θ_{21} și se notează cu a distanța AA_1 (fig. 438, *c*), rezultă :

$$a_1 = \frac{a}{\sin\beta} \text{ și deci } \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a_n}{a_1 \sin\beta} \quad \text{sau} \quad \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a_n}{a_1}.$$

Expresia (7.16) devine :

$$M_i^n = \frac{a_n}{a_1} \cdot \eta \tag{7.17}$$

valabilă pe toată grinda $A - B - C$.
Linia M_i^n este hașurată în fig. 438, *a* și 438, *c*.

d) **Linia de influență a momentului de torsiune M^t**

Se determină pe aceeași cale ca M_i^n prin deplasările virtuale. În i (fig. 439, a) se introduce o articulație, care permite celor două corpuri (1) și

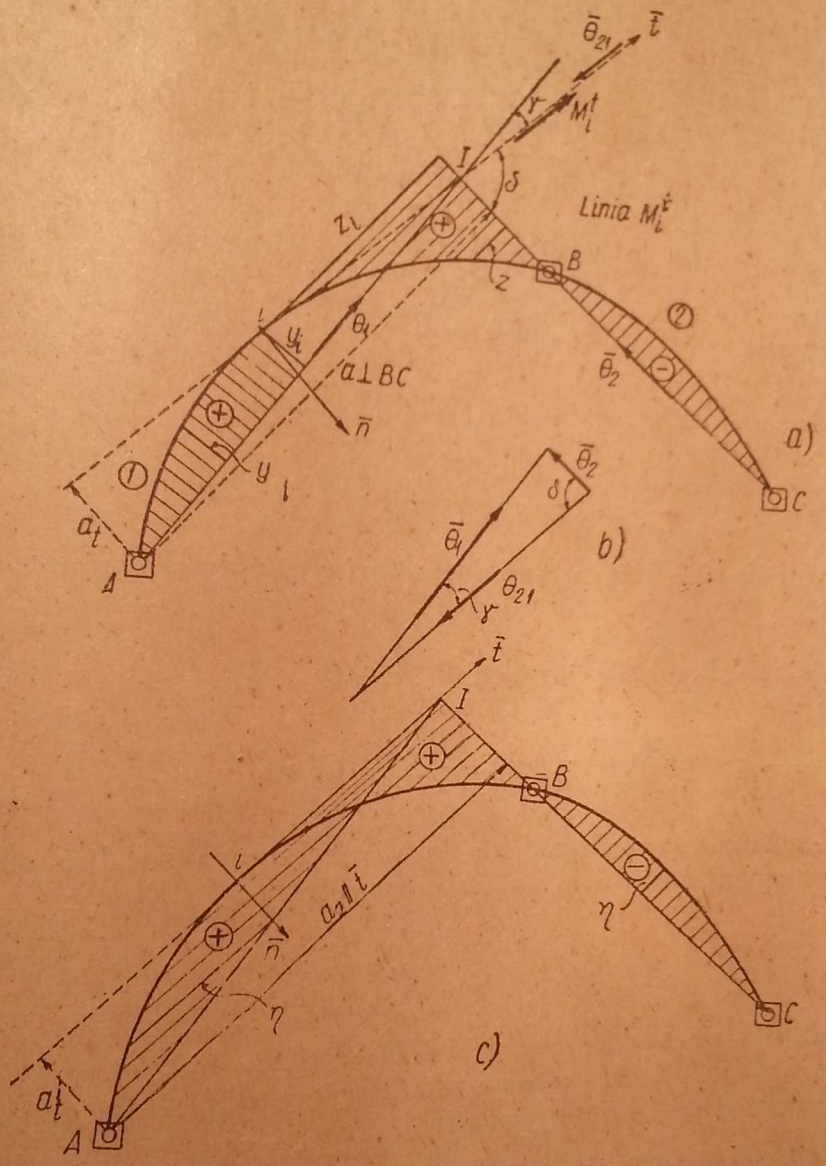


Fig. 439.

(2) să se rotească între ele, numai în jurul tangentei din i. Corpul (2) (iBC) se rotește față de teren cu $\bar{\theta}_2$ în jurul axei BC, și cu $\bar{\theta}_{21}$ după direcția tangentei în i, față de corpul (1) (Ai).

Corpul (1) se rotește față de teren cu $\bar{\theta}_1$ în jurul axei AI, unde I este intersecția dreptei BC cu tangenta în i la curbă.

Rezultă :

$$\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_{21};$$

M_i^t pe fața din dreapta secțiunii este pozitiv, cînd intră în corp, ca în figură. Se alege pentru $\bar{\theta}_{21}$ sensul opus, și din triunghiul vectorilor (fig. 439, *b*) se determină mărimile vectorilor $\bar{\theta}_1$ și $\bar{\theta}_2$ în funcție de valoarea arbitrară dată lui $\bar{\theta}_{21}$:

$$\frac{\theta_1}{\sin\delta} = \frac{\theta_2}{\sin\gamma} = \frac{\theta_{21}}{\sin(\gamma+\delta)}.$$

Totodată, rezultă și distanțele y și z, care servesc pentru linia de influență, cum și semnele.

Din ecuația de lucru mecanic rezultă :

$-M_i^t\,\bar{\theta}_{21} + 1\cdot v = 0$, de unde rezultă :

$M_i^t = \frac{\theta_1}{\theta_{21}}\cdot y$ pe intervalul $A - i$;

$M_i^t = \frac{\theta_2}{\theta_{21}}\cdot z$ pe intervalul $i - B - C$;

apoi : $M_i^t = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}\cdot y$ pe intervalul $A - i$;

$M_i^t = \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}\cdot z$ pe intervalul $i - B - C$. (7.18)

Cu notațiile din figură se obține prin calcule asemănătoare cu cel de la M_i^n :

$M_i^t = \frac{z_i}{y_i}\cdot\frac{a_t}{a}\cdot y$ pe intervalul $A - i$;

$M_i^t = \frac{a_t}{a}\,z$ pe intervalul $i - B - C$. (7.19)

Pentru măsurarea ordonatelor la aceeași scară se duc ordonatele η paralele cu tangenta din i și se obține expresia :

$$M_i^t = \frac{\sin\gamma\,\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}\cdot\eta = \frac{a_t}{a_2}\cdot\eta, \qquad (7.20)$$

care este valabilă pe toată grinda $A-B-C$ (fig. 439, *c*).

În expresia (7.20), a_t este perpendiculara din A pe tangenta din i, și a_2 este paralela din A la tangenta în i.

Aplicația 98. Să se construiască diagramele eforturilor grinzii plane orizontale $ABCDE$ din fig. 440, rezemată vertical în A, B, E și încărcată cu sarcina verticală uniform distribuită p în intervalul CD.

Răspuns. Reacțiunea V_E se determină din ecuația de momente față de $A - B$:

$$\Sigma\,\mathfrak{M}_{AB} = 0\,;\ -V_E\cdot 4a + 5\,ap\cdot 2a = 0\,;\ V_E = 2{,}5\,pa.$$

Reacțiunile V_A și V_B se determină din ecuațiile de momente față de axele BB' și AA' făcînd uz de V_E, deoarece folosirea axelor BE și AE necesită elemente trigonometrice d determinat.

$\Sigma\,\mathfrak{M}_{BB'} = 0\,;\ V_A\cdot 2a + 5\,ap\cdot 2{,}5\,a - V_E\cdot 6a = 0\,;$ de unde : $V_A = 1{,}25\,pa\,;$

$\Sigma\,\mathfrak{M}_{AA'} = 0\,;\ -V_B\cdot 2a + 5\,ap\cdot 4{,}5a - V_E\cdot 8a = 0\,;$ de unde : $V_B = 1{,}25\,pa.$

Eforturile se determină ușor:

$$T_{AB} = V_A = 1{,}25\,pa;$$

$$T_{BC} = V_A + V_B = 2{,}5\,pa; \quad T_{CD} = V_A + V_B - p \cdot x = p\,(2{,}5\,a - x); \quad T_{DE} = -V_E$$

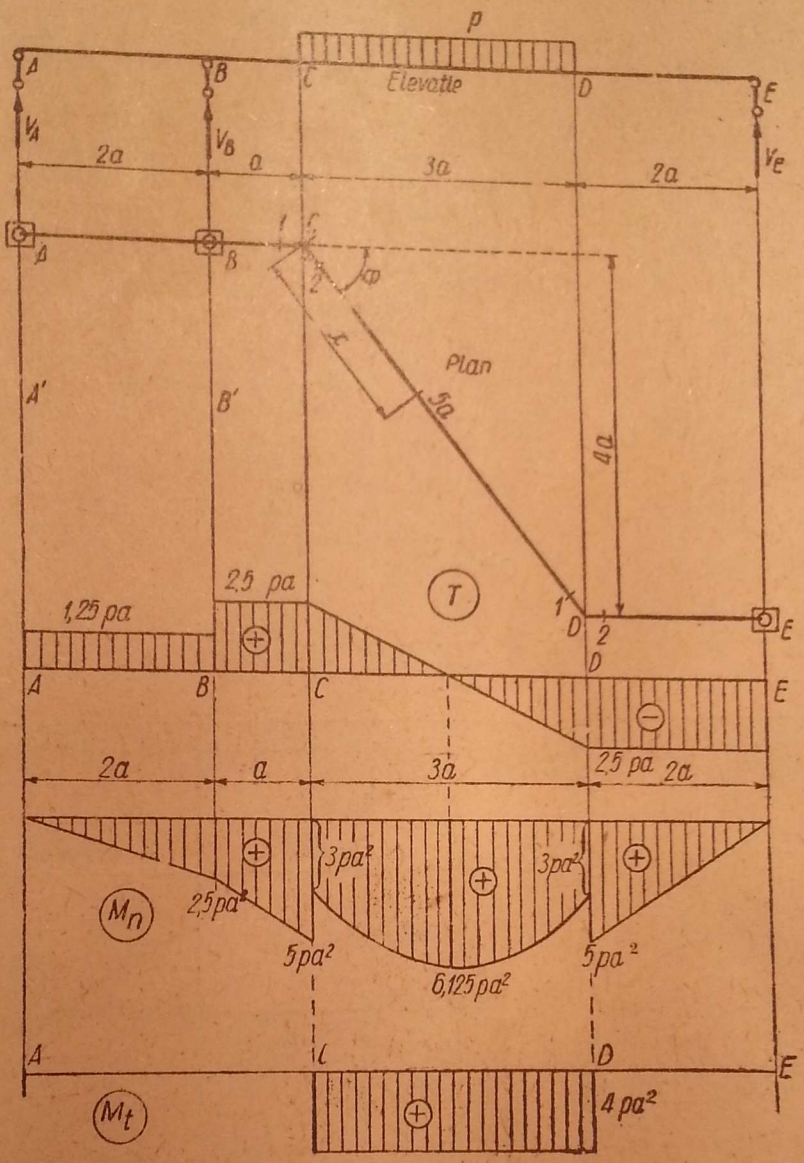


Fig. 440.

$$M^n_B = V_A \cdot 2a = 2{,}5\,pa^2; \quad M^n_{C_1} = V_A \cdot 3a + V_B \cdot a = 5\,pa^2;$$

$$M^n_{C_2} = M^n_{C_1} \cos\varphi = 0{,}6\,M^n_{C_1} = 3\,pa^2; \quad M^t_{CD} = M^n_{C_1} \cdot \sin\varphi = 0{,}8\,M^n_{C_1} = 4\,pa^2;$$

$$M^n_{CD} = M^n_{C_2} + T_C \cdot x - p\,\frac{x^2}{2}; \quad M^n_{D_1} = M^n_{C_2} + T_C \cdot 5a - \frac{25pa^2}{2} = 3pa^2 = M^n_{D_2} \cos\varphi;$$

$$M^n_{D_2} = V_E \cdot 2a = 5\,pa^2.$$

Diagramele sînt desenate pe grinda reprezentată în elevație în fig. 440.

Aplicația 99. Să se construiască diagramele eforturilor în grinda plană circulară orizontală $P - B$ încastrată în B și încărcată cu o sarcină verticală P în capătul liber, notat, de asemenea, cu P (fig. 441).

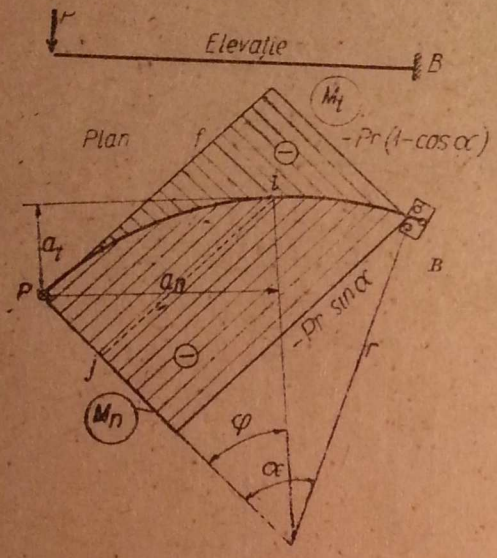


Fig. 441.

Răspuns. Într-o secțiune i avem:

$$T_i = -P;$$

$$M_i^n = -P \cdot a_n = -P \cdot ij = -Pr\sin\varphi;$$

$$M_i^t = -P \cdot a_t = -P \cdot if = -Pr(1-\cos\varphi).$$

Diagramele M^n și M^t sînt haşurate în fig. 441.

Aplicația 100. Să se determine diagramele eforturilor pe grinda plană orizontală din fig. 442, *a*, în formă de semicerc ABC prelungită cu două console drepte AD și CE încărcată cu o sarcină verticală p uniform repartizată pe metru de grindă.

Răspuns. Ecuația de momente față de dreapta $A - C$ determină pe V_B:

$$\Sigma\,\mathfrak{M}_{AC} = 0; \quad -V_B \cdot r - \frac{2pc^2}{2} + p\pi r \cdot \frac{2r}{\pi} = 0; \quad V_B = 2pr - \frac{pc^2}{r}.$$

Datorită simetriei față de axa OB avem:

$$V_A = V_C = \frac{1}{2}(p\pi r + 2pc - V_B) = pr\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{c}{r} + \frac{c^2}{2r^2}\right].$$

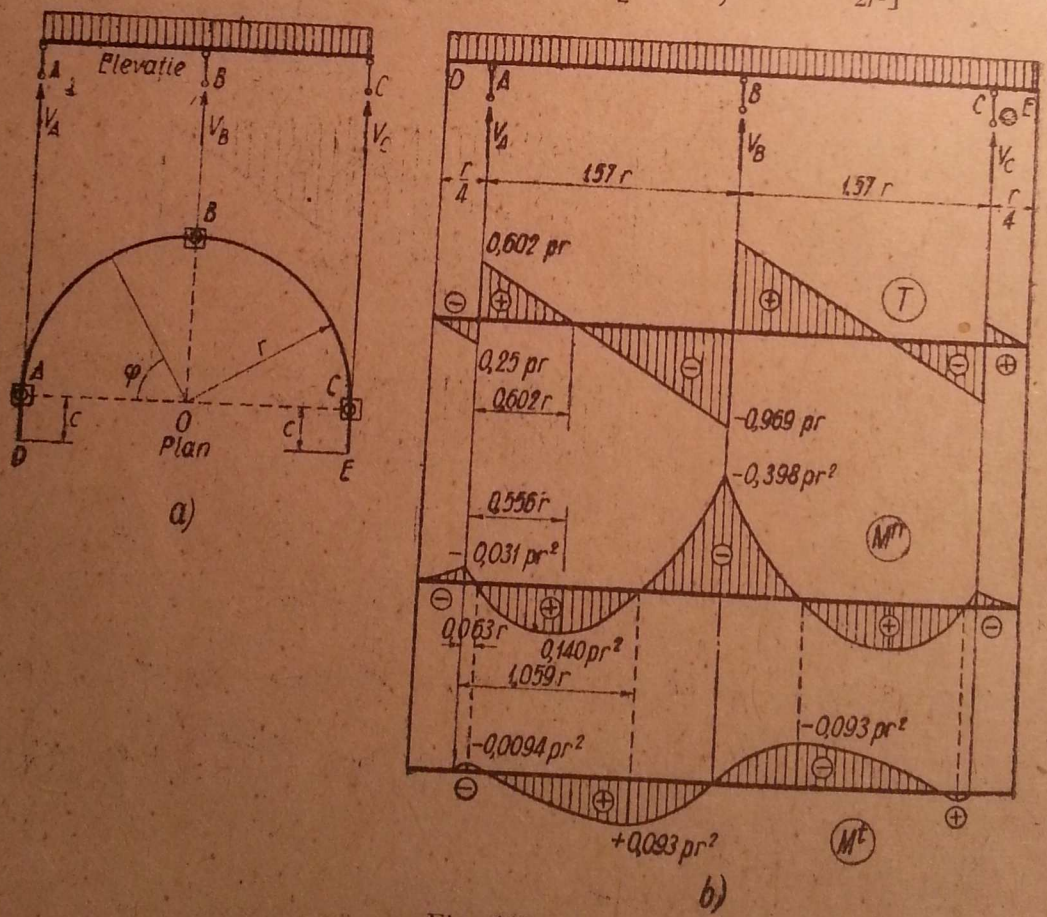


Fig. 442.

Tot datorită simetriei grinzii și încărcării față de axa OB, diagrama M^n va fi simetrică, iar diagramele T și M^t, antisimetrice față de această axă. Deoarece în B nu se aplică nici un cuplu exterior care să aibă componentă după tangentă, în virtutea antisimetriei rezultă: $M^t_B = 0$, ceea ce trebuie să constituie un control pentru expresiile M^t.

Pe intervalul $D - A$ avem:

$$T = -px\,;\quad M^n = -p\frac{x^2}{2}\,;\quad M^n_A = -p\frac{c^2}{2}\,;\quad M^t = 0.$$

Pe intervalul $A - B$ avem:

$$T = -pc + V_A - pr\varphi = pr\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{c^2}{2r^2} - \varphi\right];$$

$$T_{Adr} = pr\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{c^2}{2r^2}\right];$$

$$M^n = M^n_A \cos\varphi + T_{Adr}\, r\sin\varphi - \int_0^{\varphi} prd\varphi r\sin\varphi = -p\frac{c^2}{2}\cos\varphi +$$

$$+ pr^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{c^2}{2r^2}\right]\sin\varphi - pr^2(1 - \cos\varphi);$$

$$M^t = M^n_A \sin\varphi + T_{Adr}\cdot r(1 - \cos\varphi) - \int_0^{\varphi} prd\varphi\, r(1 - \cos\varphi) =$$

$$= -\frac{pc^2}{2}\sin\varphi + pr^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{c^2}{2r^2}\right](1 - \cos\varphi) - pr^2(\varphi - \sin\varphi).$$

Pe reazemul B, unde $\varphi = \frac{\pi}{2}$, rezultă:

$$T_{Bst} = -pr\left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right);$$

$$M^n_B = -pr^2\left(2 - \frac{\pi}{2} - \frac{c^2}{2r^2}\right);$$

$$M^t_B = 0.$$

Se verifică și relațiile (7.7) și deci vom avea M^t_{max} în secțiunea unde $M^n = 0$.

Pentru $c = \frac{r}{4}$ expresiile eforturilor pe intervalul $A - B$ devin:

$$T = pr\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{32} - \varphi\right) = (0{,}60205 - \varphi)\,pr;$$

$$M^n = pr^2\left[-1 + \frac{31}{32}\cos\varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{31}{32}\right)\sin\varphi\right] = (-1 + 0{,}96875\cos\varphi +$$

$$+ 0{,}60205\sin\varphi)\,pr^2;$$

$$M^t = pr^2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{31}{32} - \varphi + \frac{31}{32}\sin\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{31}{32}\right)\cos\varphi\right] =$$

$$= (0{,}96875\sin\varphi - 0{,}60205\cos\varphi - \varphi + 0{,}60205)\,pr^2.$$

Forța tăietoare se anulează în secțiunea $\varphi_1 = 0{,}60205$ rad (34°30′).

M^n_{max} se obține din $\frac{dM^n}{d\varphi} = 0$, în secțiunea φ_2 dedusă din ecuația:

$$-0{,}96875 \sin\varphi + 0{,}60205 \cos\varphi = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{0{,}60205}{0{,}96875} = 0{,}622;$$

$\varphi_2 = 31°20'$ (0,5564 rad); $\sin\varphi_2 = 0{,}528$; $\cos\varphi_2 = 0{,}849$.

M^t_{max} se obține din $\frac{dM^t}{d\varphi} = 0$ în secțiunile φ_3 și φ_4 deduse din ecuația:

$$0{,}60205 \sin\varphi + 0{,}96875 \cos\varphi = 1,$$

care are soluțiile:
$\varphi_3 = 3°06'$ (0,06285 rad); $\sin\varphi_3 = 0{,}0541$; $\cos\varphi_3 = 0{,}9985$;
$\varphi_4 = 60°40'$ (1,0588 rad); $\sin\varphi_4 = 0{,}872$; $\cos\varphi_4 = 0{,}490$.

În tabela 17 de mai jos sînt trecute valorile eforturilor în secțiunile importante pe intervalul $A - B$, iar în fig. 442, *b* sînt desenate diagramele eforturilor pe grinda desfășurată.

Tabela 17

φ	0°	3°06′	31°20′	34°30′	60°40′	90°
T	$0{,}602\,pr$			0		$-0{,}969\,pr$
M^n	$-0{,}031\,pr^2$	0	$+0{,}140\,pr^2$		0	$-0{,}398\,pr^2$
M^t	0	$-0{,}0094\,pr^2$			$+0{,}093\,pr^2$	0

Aplicația 101. Să se determine diagramele eforturilor pe grinda orizontală în formă de semicerc rezemată vertical în punctele A, A', B, B' și încărcată cu sarcina verticală P, în punctul notat, de asemenea, cu P. Cele patru reazeme sînt dispuse simetric față de axa OP (fig. 443).

Răspuns. Grinda are patru reazeme, deci pentru o încărcare arbitrară normală pe planul său, este odată static nedeterminată. Datorită simetriei formei, rezemării și încărcării față de raza OP, rezultă că $V_A = V_{A'}$ și $V_B = V_{B'}$, astfel că din ecuațiile de momente față de dreptele AA' și BB' se găsesc reacțiunile V_B și V_A și apoi eforturile în orice secțiune a grinzii numai din ecuații statice:

$$\sum \mathfrak{M}_{AA'} = 0; \quad -2V_B \cdot \frac{r}{2} + P \cdot r = 0; \quad V_B = +P;$$

$$\sum \mathfrak{M}_{BB'} = 0; \quad 2V_A \cdot \frac{r}{2} + P \cdot \frac{r}{2} = 0; \quad V_A = -\frac{P}{2}.$$

Diagrama M^n va fi simetrică, iar diagramele T și M^t, antisimetrice față de axa de simetrie OP.

Intervalul $A-B$:

$$T = -\frac{P}{2}; \quad M^n = -\frac{P \cdot r}{2} \sin\varphi; \quad M_t = -\frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi).$$

Pe reazemul B : $M^n_B = -0{,}25\ Pr$; $M^t_B = -0{,}067\ Pr$.

Intervalul $B - P$:

$$T = -\frac{P}{2} + P = +\frac{P}{2};$$

$$M^n = -\frac{P}{2} r \sin\varphi + Pr \sin(\varphi - 30°) = \frac{Pr}{2}(0{,}7321 \sin\varphi - \cos\varphi);$$

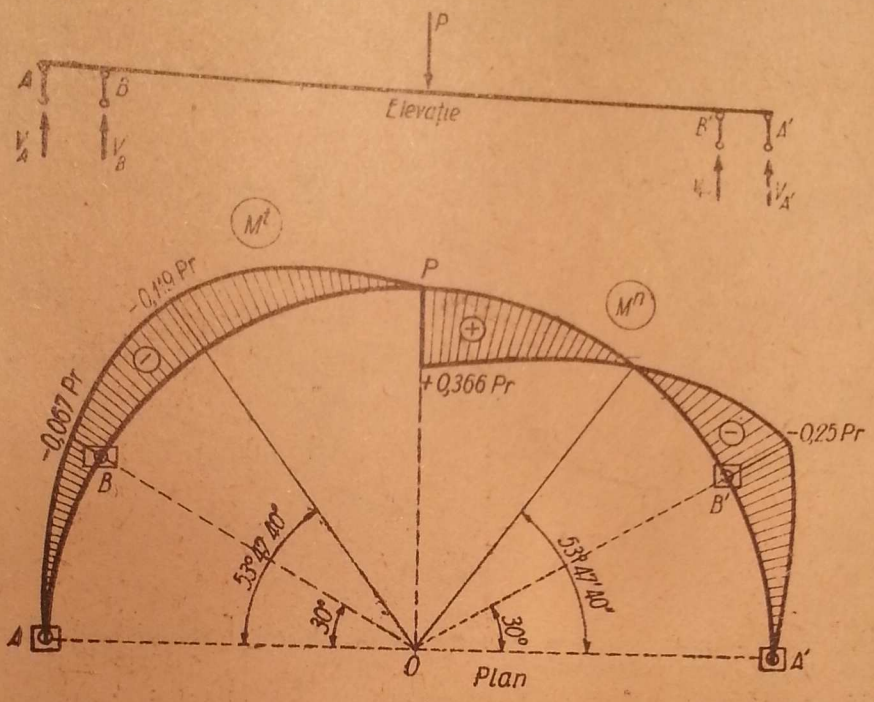


Fig. 443.

$$M^t = -\frac{P}{2} r(1 - \cos\varphi) + Pr[1 - \cos(\varphi - 30°)] = \frac{Pr}{2}(1 - \sin\varphi - 0{,}7321 \cos\varphi).$$

Pentru $\varphi = 90°$ avem $M^n_{max} = +0{,}366\ Pr$.

Pentru $\varphi = 53°\,47'\,40''$ avem $M^n = 0$ și $M^t_{min} = -0{,}119\ Pr$.

În fig. 443 sînt reprezentate pe cîte jumătate de grindă diagramele M^t și M^n. Diagrama T nu a mai fost desenată.

Din expresiile eforturilor rezultă că în dreptul forțelor concentrate V_B și P diagrama M^n are vîrfuri, pe cînd diagrama M^t trece continuu, avînd aceeași valoare a tangentei (derivata : $\frac{dM^t}{d\varphi} = M^n$) imediat înainte și imediat după forța concentrată.

Aplicația 102. O grindă orizontală în formă de cerc complet reazemă pe n reazeme verticale, situate la distanțe egale între ele și este încărcată cu o sarcină verticală uniform repartizată, q kg/m, pe toată lungimea cercului (fig. 444). Să se determine diagramele eforturilor.

Răspuns. Pentru o încărcare verticală oarecare, grinda este static nedeterminată. Care este gradul de nedeterminare statică? Din punctul de vedere al rezemării, grinda are nevoie de trei reazeme, deci este de $n - 3$ ori static nedeterminată exterior. Totodată un inel închis este de trei ori static nedeterminat interior, deoarece, dacă se face o secțiune într-un punct oarecare al lui, rămîne o grindă deschisă geometric nedeformabilă. În total, deci, grinda este de $n - 3 + 3 = n$ ori static nedeterminată. În concluzie, un inel închis plan supus la forțe

normale pe planul său, care are n reazeme ($n \geqslant 3$), este de n ori static nedeterminat. Pentru a-l face static determinat vor trebui suprimate n legături simple. Aceasta se poate face prin introducerea a n articulații cilindrice care să permită rotirea relativă numai în jurul unor axe bine determinate.

De exemplu, se poate introduce cîte o articulație de torsiune pe fiecare reazem, adică pe fiecare reazem rotația celor două părți s-ar putea face în jurul tangentei la inel. În cazul inelului circular cu sarcina uniformă pe toată lungimea și cu n reazeme egal distanțate, nu mai este nevoie să fie suprimate cele n legături suplimentare, deoarece din motive de simetrie momentul de torsiune pe fiecare reazem și în mijlocul fiecărei deschideri trebuie să fie nul (diagrama momentelor de torsiune trebuie să fie antisimetrică față de axele de simetrie).

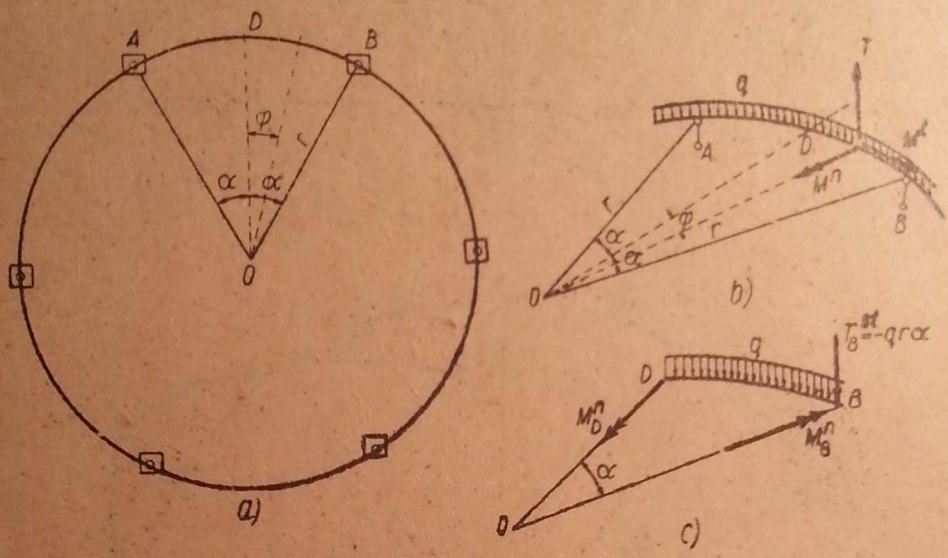


Fig. 444.

În acest caz particular este deci suficient să se folosească numai ecuațiile de echilibru static pentru determinarea eforturilor.

Se va analiza acum deschiderea $A - B$ al cărei unghi la centru este $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$ și se va lua originea unghiurilor φ de la raza OD, unde D este mijlocul arcului ADB.

Ținînd seamă că din cauza simetriei $T_D = 0$, $T_B^{st} = -qr\alpha$, $M_D^t = 0$, $M_B^t = 0$, și separînd semideschiderea DB (fig. 444, *c*) din ecuațiile de momente față de tangentele în D și B, se determină direct M_B^n și M_D^n și apoi se pot obține eforturile în orice secțiune între D și B.

Se pot folosi însă direct ecuațiile diferențiale (7.8) în care urmează să se determine constantele C_1, C_2, C_3.

În punctul D ($\varphi = 0$), avem : $T_D = 0$ și $M_D^t = 0$, de unde se deduc :

$$C_1 = 0 ; \quad C_2 = 0.$$

În punctul B, unde $\varphi = \alpha$, avem : $M_B^t = 0$, de unde se deduce :

$$C_3 = qr^2 \frac{\alpha}{\sin \alpha} .$$

Ecuațiile (7.8) devin :

$$T = -qr\varphi ;$$

$$M^n = qr^2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \cos \varphi - 1 \right) ; \tag{7.21}$$

$$M^t = -qr^2 \left(\varphi - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \varphi \right) .$$

Momentul de torsiune M^t este maxim în valoare absolută acolo unde momentul încovoietor M^n este nul, adică în secțiunea φ_0 determinată de : $\cos \varphi_0 = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

În a doua formulă din (7.21) pentru $\varphi = 0$ și $\varphi = \alpha$ se obțin momentele încovoietoare în secțiunile : D (cîmp) și în B (pe reazem). Rezultă :

$$M^n_D = qr^2\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1\right); \quad M^n_B = -qr^2 (1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$M^t_{max} = qr^2\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi_0 - \varphi_0\right) = qr^2 (\operatorname{tg}\varphi_0 - \varphi_0). \tag{7.22}$$

Dacă se ține seamă de dezvoltările în serie :

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \cdots \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2\alpha^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots$$

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2!} + \frac{\varphi_0^4}{4!} - \cdots \qquad \operatorname{tg} \varphi_0 = \varphi_0 + \frac{\varphi_0^3}{3} + \frac{2\varphi_0^5}{3^2 \cdot 5} + \frac{17\,\varphi_0^7}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$$

se obține $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 + \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{7}{360}\alpha^4 + \frac{31}{6 \cdot 2\,520}\alpha^6 + \cdots$ și $\varphi_0 \cong \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\alpha^2}{90} \cdots\right)$

Expresiile (7.22) devin :

$$M^n_D = q\,\frac{r^2\alpha^2}{6}\left(1 + \frac{7}{60}\alpha^2 + \frac{31}{2\,520}\alpha^4 + \cdots\right)$$

$$M^n_B = -q\,\frac{r^2\alpha^2}{3}\left(1 + \frac{\alpha^2}{15} + \frac{\alpha^4}{157{,}5} + \frac{\alpha^6}{1\,575} + \cdots\right).$$

$$M^t_{max} = \frac{qr^2\alpha^3}{9\sqrt{3}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{7{,}5} - \cdots\right)$$

Dacă se notează lungimea arcului ADB cu l, avem $l = 2r\alpha$ și :

$$M^n_D = \frac{1}{24}ql^2\left(1 + \frac{7}{60}\alpha^2 + \frac{31}{2\,520}\alpha^4 + \cdots\right);$$

$$M^n_B = -\frac{1}{12}ql^2\left(1 + \frac{1}{15}\alpha^2 + \frac{1}{157{,}5}\alpha^4 + \cdots\right). \tag{7.23}$$

$$M^t_{max} = \frac{ql^2}{36\sqrt{3}}\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{7{,}5} - \cdots\right)$$

Expresiile (7.23) sînt mult mai ușor de folosit decît formulele (7.22) pentru calculul cu rigla, deoarece nu conțin diferențe de mărimi apropiate între ele. Formulele (7.23) duc la rezultate cu o eroare mai mică decît 1%, chiar în cazul a trei reazeme, unde $\alpha = \frac{\pi}{3}$, și eroarea se micșorează cu cît α este mai mic, adică atunci cînd formulele exacte (7.22) sînt practic foarte greu de folosit din cauza diferențelor din paranteze care tind spre zero.

Formulele (7.23) se pretează la o interpretare interesantă :

Să presupunem că se mărește foarte mult numărul reazemelor, astfel ca α să tindă către zero și, în același timp, se mărește raza cercului r, făcînd-o să tindă către infinit. În aceste condiții, produsul $2r\alpha$ poate păstra o valoare finită care a fost notată cu l, deschiderea grinzii $A - B$.

În acest caz formulele (7.23) devin :

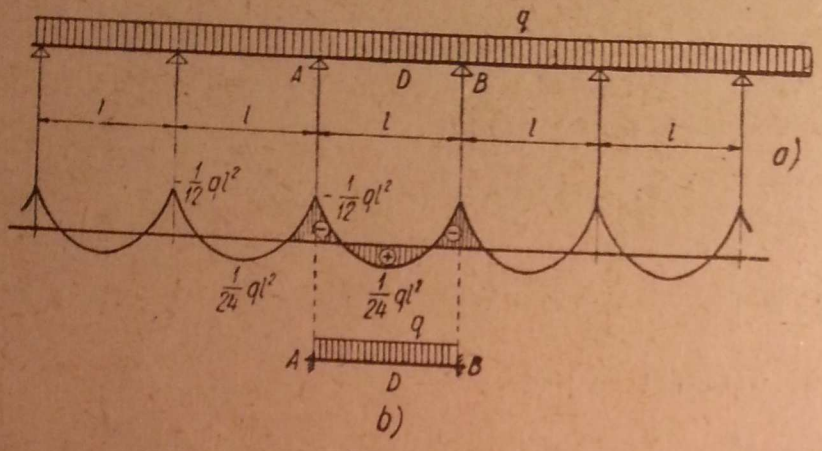


Fig. 445.

$$M_D^n = \frac{1}{24} \cdot ql^2; \qquad M_B^n = -\frac{1}{12} \cdot ql^2, \qquad (M^t \equiv 0) \tag{7.24}$$

și reprezintă momentele încovoietoare în mijlocul deschiderii și pe reazemele unei grinzi, care la limită a devenit dreaptă și continuă pe o infinitate de reazeme la distanța l între ele (fig. 445, *a*)

O deschidere se comportă ca o grindă dreaptă dublu încastrată (fig. 445,*b*).

Se va vedea la sistemele static nedeterminate că expresiile (7.24) coincid cu cele ce se vor obține din condițiile de deformație ale grinzii dublu încastrate, deși aici am ajuns la aceste expresii numai din condiții de echilibru static.

Observație. Rezultatul de mai sus nu poate fi generalizat în alte situații. Dacă cercul ar fi fost deschis, fiind limitat la un arc de cerc cu deschideri egale și încărcare uniform distribuită, nu puteam trece la limită ca să obținem expresii valabile pentru grinda dreaptă continuă cu un număr limitat de deschideri, de exemplu cu două deschideri.

Să se studieze ce deosebire calitativă există între cele două situații.

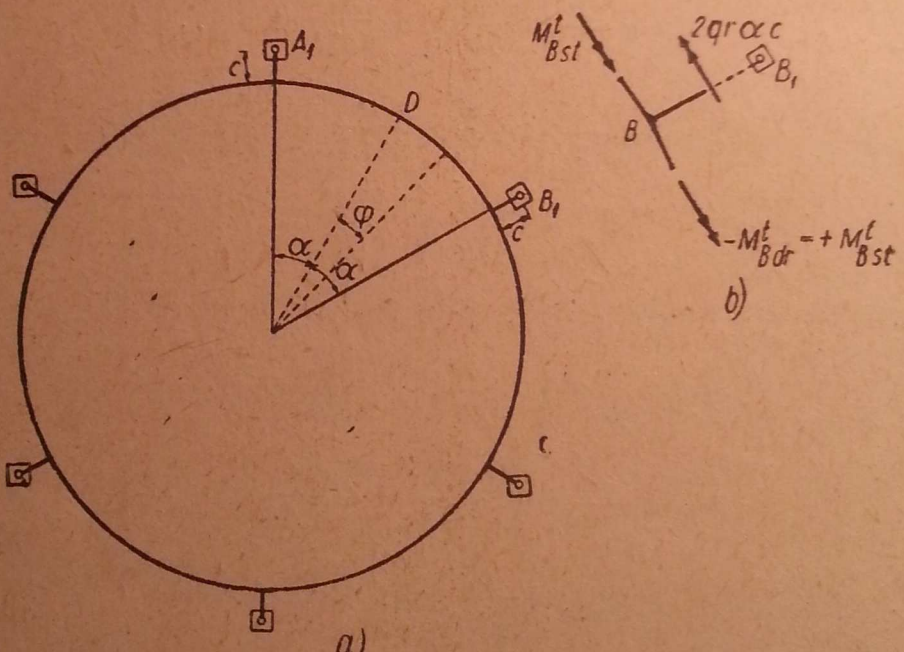


Fig. 446.

Aplicația 103. Inelul circular încărcat ca în problema precedentă este rezemat prin intermediul unor console radiale de lungime c, ca în fig. 446. Care sînt expresiile eforturilor?

Răspuns. Față de cele studiate în problema precedentă, se modifică numai constanta de integrare C_3. În adevăr, diagrama momentelor de torsiune va fi și în acest caz antisimetrică, dar în dreptul reazemului nu mai trece continuu prin zero, ci va avea un salt brusc, schimbîndu-și semnul (fig. 446, *b*), astfel încît $M^t_{B\,dr} = -M^t_{B\,st}$. Reacțiunea în fiecare dintre reazemele B_1 este : $V = 2q \cdot r \cdot \alpha$.

Această reacțiune produce în secțiunea B a consolei $B - B_1$ momentul încovoietor $V \cdot c = 2\,qr\alpha \cdot c$.

Echilibrul nodului B (fig. 446, b) dă valoarea lui $M^t_{B\,st}$:

$$M^t_{B\,st} = \frac{V \cdot c}{2} = q \cdot r \cdot c \cdot \alpha.$$

În ecuația (7.8), după ce s-a obținut $C_1 = C_2 = 0$ din $T_D = 0$ și $M^t_D = 0$, punînd condiția ca pentru $\varphi = \alpha$ să avem $M^t = qrc\,\alpha$ rezultă:

$$C_3 = qr^2 \left(1 + \frac{c}{r}\right) \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

și apoi expresiile eforturilor:

$$T = -qr\,\varphi;$$

$$M^n = qr^2 \left[\left(1 + \frac{c}{r}\right) \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \varphi - 1\right]; \tag{7.25}$$

$$M^t = -qr^2 \left[\varphi - \left(1 + \frac{c}{r}\right) \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi\right].$$

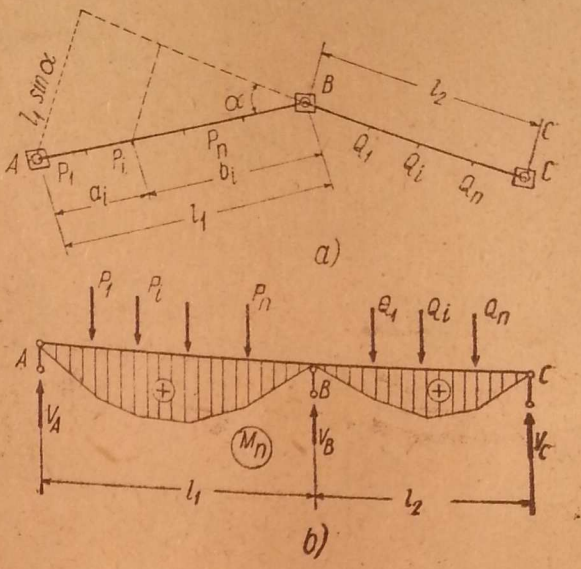


Fig. 447.

Aplicația 104. Grinzile frînte plane orizontale din fig. 447 și 448 rezemate vertical în A, B și C sînt încărcate cu un sistem de sarcini verticale. Să se construiască diagramele eforturilor.

Răspuns. La grinda din fig. 447 cu reazemul B în dreptul cotului, reacțiunea V_A se determină din ecuația de momente față de CB. Avem:

$$V_A \cdot l_1 \sin \alpha - \sum_1^n P_i \cdot b_i \cdot \sin \alpha = 0. \tag{7.26}$$

Simplificînd cu $\sin \alpha$, rezultă:

$$V_A = \frac{\sum_1^n P_i\, b_i}{l_1},$$

care este chiar reacțiunea V_A de pe o grindă simplu rezemată AB.

La fel rezultă că V_C este reacțiunea de pe o grindă simplu rezemată BC. Deci, diagramele eforturilor pe cele două zone AB și BC sînt diagramele eforturilor T și M_n de pe niște grinzi simplu rezemate (fig. 447, b). Momente de torsiune nu există.

La grinda din fig. 448 unde reazemul B nu este așezat în dreptul cotului, se obține de asemenea V_A din ecuația de momente față de CB — la fel ca mai sus, — însă l_1 reprezintă aici distanța dintre reazemul A și cotul D, iar forțele P_i de care depinde V_A sînt cele dintre A și D. Deci, porțiunea AD se comportă ca o grindă simplu rezemată în A și D, iar toată grinda, ca o grindă dreaptă cu consolă și articulație în D, grinda independentă fiind AD (fig. 448, b). Momentele de torsiune sînt nule pe tot parcursul $ADBC$.

Observație. Aceste rezultate au fost obținute simplificînd prin $\sin \alpha$ în ecuația (7.26). Deci ele nu sînt valabile cînd $\alpha = 0$. În acest caz grinda devine continuă și este static nedeterminată.

După formula (7.26) s-ar părea că pentru orice unghi $\alpha \neq 0$ rezultatele de mai sus sînt valabile. Totuşi, dacă α este mic, aceste rezultate nu sînt exacte.

Se propune să se studieze care este cauza ce face ca la un unghi α foarte mic concluziile de mai sus să nu fie valabile.

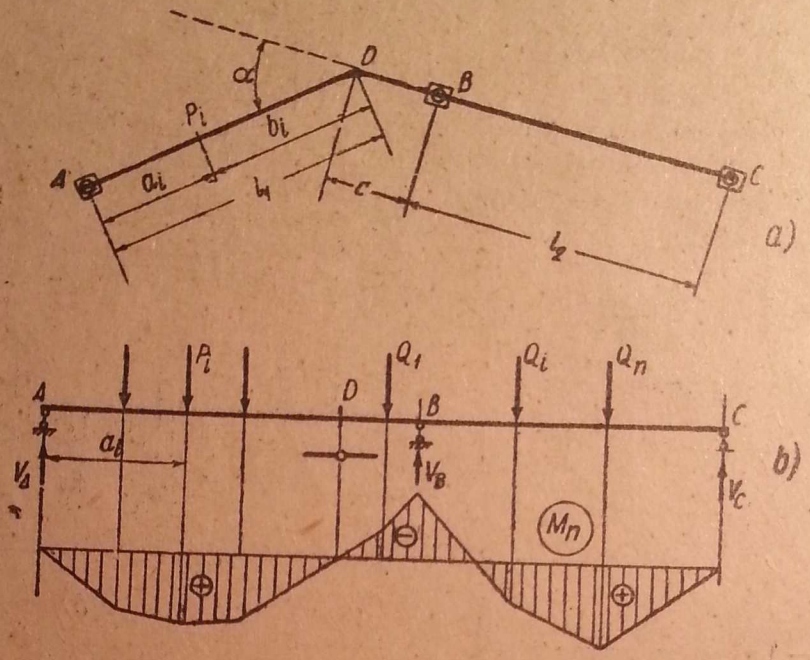


Fig. 448.

Aplicaţia 105. Grinda închisă în formă de poligon regulat situată într-un plan orizontal şi încărcată cu sarcina verticală uniform distribuită p pe toată lungimea este rezemată vertical în vîrfurile poligonului (fig. 449), sau în mijloacele laturilor (fig. 450). Să se construiască diagramele eforturilor.

Răspuns. Din cele stabilite la aplicaţia 102, rezultă că pentru această situaţie de simetrie a formei, a rezemării şi încărcării sistemul este static determinat. Din aceste observaţii

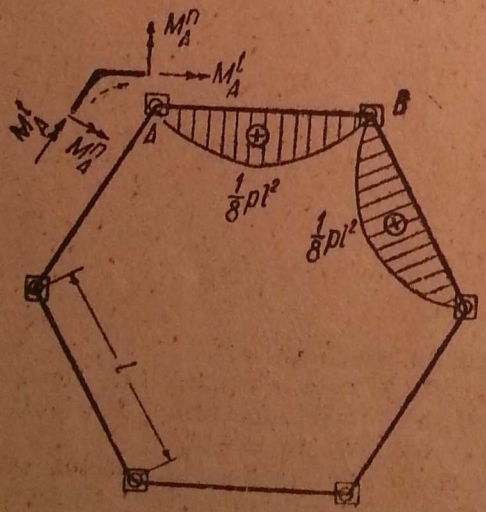


Fig. 449.

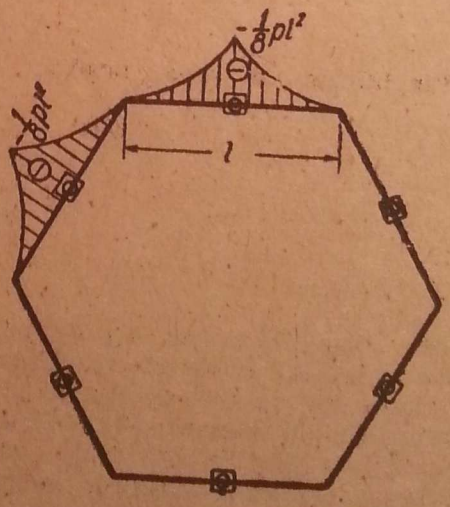


Fig. 450.

şi din echilibrul nodurilor rezultă că momentele de torsiune sînt nule pe tot poligonul, iar momentele încovoietoare sînt nule în vîrfurile poligonului.

Deci, în cazul fig. 449 momentele încovoietoare pe fiecare latură sînt ca la o grindă simplu rezemată, iar în cazul din fig. 450, ca pe nişte console.

Aplicația 106. Să se construiască liniile de influență V_A, V_B, M_B^t, M_D^n, M_D^t pentru grinda orizontală în formă de arc de cerc din fig. 451, *a*, rezemată vertical în *A* și *B* și încastrată la torsiune în *B*, pentru sarcina verticală $P = 1$ mobilă pe grindă.

Răspuns. Fig. 451, *b*, ..., *g* reprezintă liniile de influență respective. Ordonatele hașurate măsurate în desen la scara lungimilor, trebuie multiplicate cu coeficienții μ indicați la fiecare linie în parte, pentru a obține valorile ordonatelor liniilor de influență.

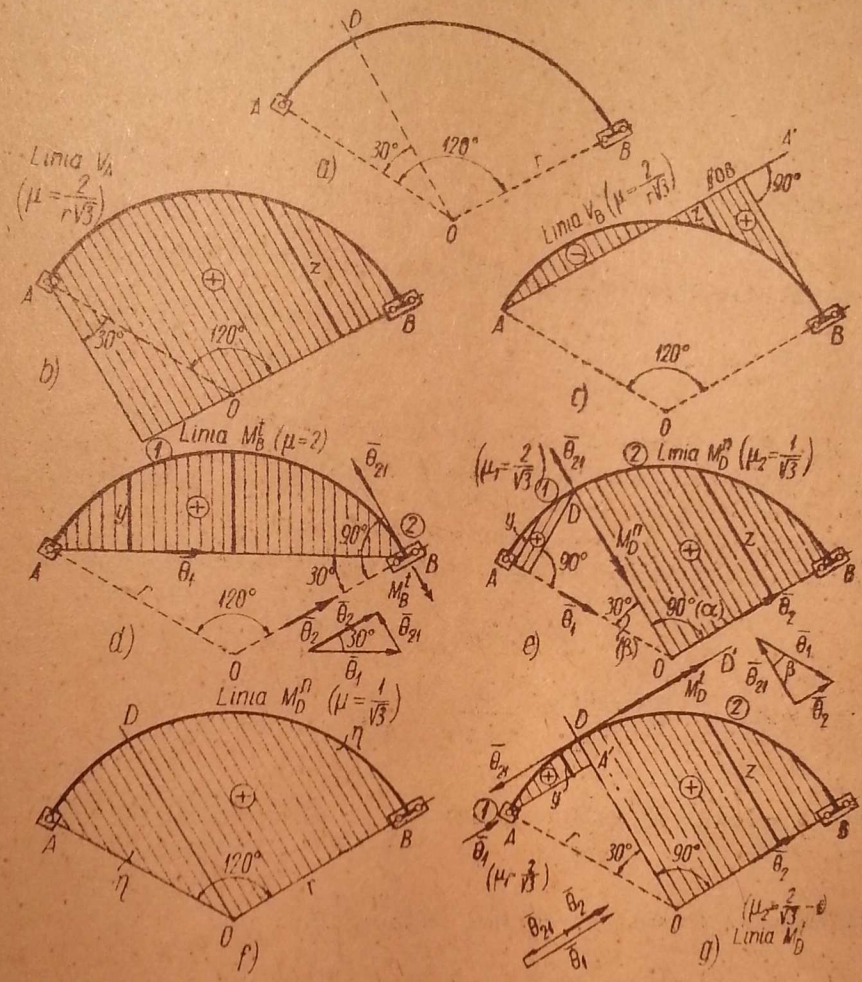


Fig. 451.

Echilibrul exterior al grinzii este asigurat prin reacțiunile verticale V_A, V_B și prin momentul de torsiune M_B^t din *B*.

Liniile V_A și V_B. Din ecuația de momente față de *OB* se obține:

$$V_A \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot z = 0; \quad V_A = \frac{2}{r\sqrt{3}} z = \mu z, \quad \text{de unde: } \mu = \frac{2}{r\sqrt{3}}.$$

Același rezultat se obține prin deplasări virtuale. Suprimînd pendulul din *A*, grinda se rotește în jurul axei *OB*, care conține cele două pendule infinit vecine din *B*.

Pentru V_B se folosește ecuația de momente față de dreapta $A\,A'$ paralelă cu *OB*.

Linia M_B^t. Se deduce prin deplasări virtuale: Se introduce în *B* o articulație care permite grinzii să se rotească față de tangenta din *B*. Corpul *1* este grinda *AB*, iar corpul *2*, sistemul celor două pendule care constituie rezemarea din *B*. Avem: $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_{21}$, unde $\bar{\theta}_{21}$ are direcția tangentei din *B* și sensul din fig. 451, *d*, $\bar{\theta}_2$ are direcția *OB* și, în consecință, $\bar{\theta}_1$ are direcția *AB*. Sensurile vectorilor $\bar{\theta}_1$ și $\bar{\theta}_2$ rezultă din sensul lui $\bar{\theta}_{21}$ și triunghiul

vectorilor. De aici rezultă semnele ordonatelor liniei de influență. Ecuația lucrului mecanic virtual se scrie astfel:

$$-M_B^t \cdot \theta_{21} + 1 \cdot v = 0, \text{ unde } v = y \cdot \theta_1 \text{ deci:}$$

$$M_B^t = \frac{\theta_1}{\theta_{21}} y = \mu y, \text{ unde multiplicatorul liniei este}$$

$$\mu = \frac{\theta_1}{\theta_{21}}.$$

Din triunghiul vectorilor rezultă $\mu = \frac{\theta_1}{\theta_{21}} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$. Deci, $M_B^t = 2y$.

Pe cale analitică se obține același rezultat folosind ecuația de momente în raport cu AB:

$$M_B^t \cdot \cos 60^\circ - 1 \cdot y = 0, \quad \text{sau:} \quad M_B^t = \frac{1}{\cos 60^\circ} y = 2y.$$

Linia M_D^n. Se introduce o articulație în D astfel ca cele două părți AD (*1*) și DB (*2*) să se poată roti între ele numai în jurul razei DO. Corpul *2* se poate roti numai în jurul razei OB datorită legăturii din B. Deci, corpul *1* se va roti în jurul axei AO. Linia de influență M_D^n rezultă ca în fig. 451, *e*. Din ecuația de lucru mecanic virtual pentru poziția lui $P = 1$ pe AD și apoi pe DB se deduc multiplicatorii μ_1 și μ_2:

$$-M_D^n \cdot \theta_{21} + 1 \cdot v = 0$$

cu $v = \theta_1 \cdot y$, rezultă: $\mu_1 = \frac{\theta_1}{\theta_{21}} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

iar cu $v = \theta_2 \cdot z$, rezultă: $\mu_2 = \frac{\theta_2}{\theta_{21}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Rezultă ordonata maximă în dreptul secțiunii D:

$$m_{D,D}^n = \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Ordonatele se pot măsura la aceeași scară în fig. 451, *f* pe paralelele η la $\overline{\theta}_{21}$. Rezultă multiplicatorul:

$$\mu = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Linia M_D^t. Se introduce în D o articulație care permite corpurilor *1* (AD) și *2* (DB) să se rotească între ele numai în jurul tangentei din D (fig. 451, *g*). Corpul *2* se rotește față de teren în jurul dreptei OB, care este paralelă cu tangenta DD', deci corpul *1* se va roti în jurul unei drepte AA' care trece prin A și este paralelă cu celelalte două (DD' și OB).

Relația: $\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_{21}$ devine o relație scalară. Triunghiul vectorilor devine un segment de dreaptă, dar se pot determina relațiile dintre rotațiile paralele ca la forțele paralele. Din ecuația de momente a vectorilor $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$ și $\overline{\theta}_{21}$ față de punctul O rezultă:

$$r \cdot \theta_{21} - r \cos 30° \cdot \theta_1 = 0,$$

de unde :

$$\theta_1 = \frac{\theta_{21}}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\theta_{21}$$

și apoi :

$$\left|\theta_2\right| = \left|\theta_1\right| - \left|\theta_{21}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\theta_{21}.$$

Semnele se deduc cu ușurință din sensurile vectorilor $\overline{\theta}_1$ și $\overline{\theta}_2$, iar multiplicatorii pe regiunile *1* și *2* — din ecuația de lucru mecanic virtual :

$$-M_D^t \cdot \theta_{21} + 1 \cdot v = 0;$$

pe corpul *1* avem : $v = y\,\theta_1$, de unde : $\mu_1 = \frac{\theta_1}{\theta_{21}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

pe corpul *2* avem : $v = z\,\theta_2$, de unde : $\mu_2 = \frac{\theta_2}{\theta_{21}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$

Rezultă ordonata maximă în dreptul lui *D* :

$$m_{D,D}^t = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) r.$$

Aplicația 107. Să se construiască liniile de influență M_B^n și M_B^t ale sistemului de două grinzi orizontale în formă de arc de cerc rezemate vertical în *A*, *B*, *C*, *E* și *F* și articulate între ele în *D*, pentru sarcina verticală $P = 1$. Punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* sînt fixate prin unghiurile la centrul *O* din fig. 452.

Răspuns. Linia M_B^n. Se introduce articulația de încovoiere în *B* și se formează astfel trei corpuri : *1* (*AB*), *2* (*BCD*) și *3* (*DEF*). Corpurile *1* și *2* se rotesc între ele cu $\overline{\theta}_{21}$ față de raza *BO*. În același timp *1* se rotește cu unghiul $\overline{\theta}_1$ după *AB*, și *2*, cu unghiul $\overline{\theta}_2$ după *BC*, față de teren. Corpul *3* se rotește față de teren cu $\overline{\theta}_3$, după *FF*. $\overline{\theta}_3$ se întîlnește cu $\overline{\theta}_2$ în *I*. Deci, corpul *3* se rotește în raport cu corpul *2* față de axa *ID* cu un unghi $\overline{\theta}_{32}$ dirijat după această axă.

Se construiește poligonul vectorilor concurenți în *B* și în *I*, ținînd seamă de relațiile :

$$\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_{21},$$

$$\overline{\theta}_3 = \overline{\theta}_2 + \overline{\theta}_{32},$$

relații care determină mărimile și sensurile rotațiilor în funcție de una dintre ele, de exemplu, în funcție de $\overline{\theta}_{21}$.

Ecuația de lucru mecanic virtual : $-M_B^n \cdot \theta_{21} + 1 \cdot v = 0$ și expresia lui *v* pe fiecare dintre corpurile *1*, *2*, *3* determină multiplicatorii ordonatelor hașurate în fig. 452.

Pe corpul *1* : $v = z_1 \cdot \theta_1$, de unde : $\mu_1 = \frac{\theta_1}{\theta_{21}} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225.$

Pe corpul *2* : $v = z_2 \cdot \theta_2$, de unde : $\mu_2 = \frac{\theta_2}{\theta_{21}} = \frac{\sin 75°}{\sin 45°} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1{,}366.$

Pe corpul *3* : $v = z_3 \cdot \theta_3$, de unde : $\mu_3 = \frac{\theta_3}{\theta_{21}} = \frac{\theta_3}{\theta_2} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_{21}} = \frac{\sin 11°20'}{\sin 48°40'} \cdot \mu_2 =$

$$= 0{,}262 \cdot 1{,}366 = 0{,}357.$$

Pentru calculul lui μ_3 s-a ținut seamă că din datele din figură rezultă : $DD' = r(\sin 60° - \sin 45°)$ și $D'I = CI - CD' = r - r(\cos 45° - \cos 60°)$, și apoi :

$$\frac{DD'}{D'I} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = 0{,}2004 = \operatorname{tg} 11°20'.$$

Linia M_B^t. Se introduce articulația de torsiune în B și se face raționamentul analog

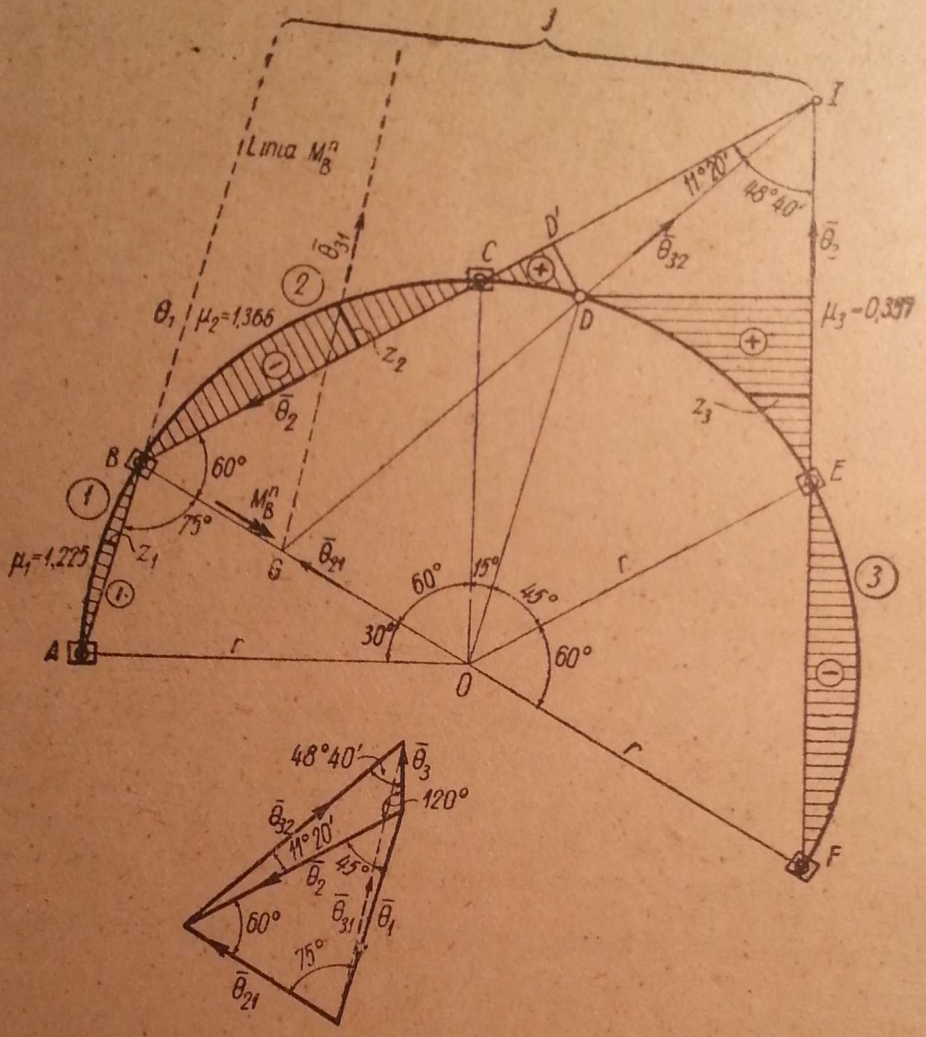


Fig. 452.

celui de la M_B^n. Fig. 453 reprezintă această linie, cum și poligonul vectorilor de rotație corespunzător, unde $\bar{\theta}_{21}$ are direcția tangentei la cerc în B. Ceilalți vectori rezultă cu aceleași direcții ca în cazul liniei M_B^n.

Din ecuația de lucru mecanic : $-M_B^t \cdot \theta_{21} + 1 \cdot v = 0$, rezultă :

Pe *1* : $v = z_1 \cdot \theta_1$ și apoi : $\mu_1 = \dfrac{\theta_1}{\theta_{21}} = \dfrac{\sin 30°}{\sin 135°} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$;

Pe *2* : $v = z_2 \cdot \theta_2$ și apoi : $\mu_2 = \dfrac{\theta_2}{\theta_{21}} = \dfrac{\sin 15°}{\sin 135°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = 0{,}366$;

Pe *3* : $v = z_3 \cdot \theta_3$ și apoi : $\mu_3 = \dfrac{\theta_3}{\theta_{21}} = \dfrac{\theta_3}{\theta_2} \cdot \dfrac{\theta_2}{\theta_{21}} = \dfrac{\sin 11°20'}{\sin 48°40'} \cdot \mu_2 =$

$= 0{,}262 \cdot 0{,}366 = 0{,}096.$

Se observă că, deși linia M^t_B are aceeași formă cu linia M^n_B, ordonatele se măsoară la scări cu totul diferite, care nu sînt în același raport pe toată grinda.

Se pot face o serie de verificări grafice pentru vectorii rotațiilor care determină liniile de influență (Cap. II, § 9—B-b, fig. 31). De exemplu: în fig. 452 s-a desenat punctat în poligonul rotațiilor vectorul $\bar{\theta}_{31}$ care definește rotația corpului 3 față de corpul 1. Poziția acestui vector pe grindă se găsește astfel: din combinația de corpuri 1, 2 și 3 rezultă $\bar{\theta}_{31} = \bar{\theta}_{21} + \bar{\theta}_{32}$; acești vectori trebuie să fie concurenți, deci $\bar{\theta}_{31}$ trece prin G care este punctul de

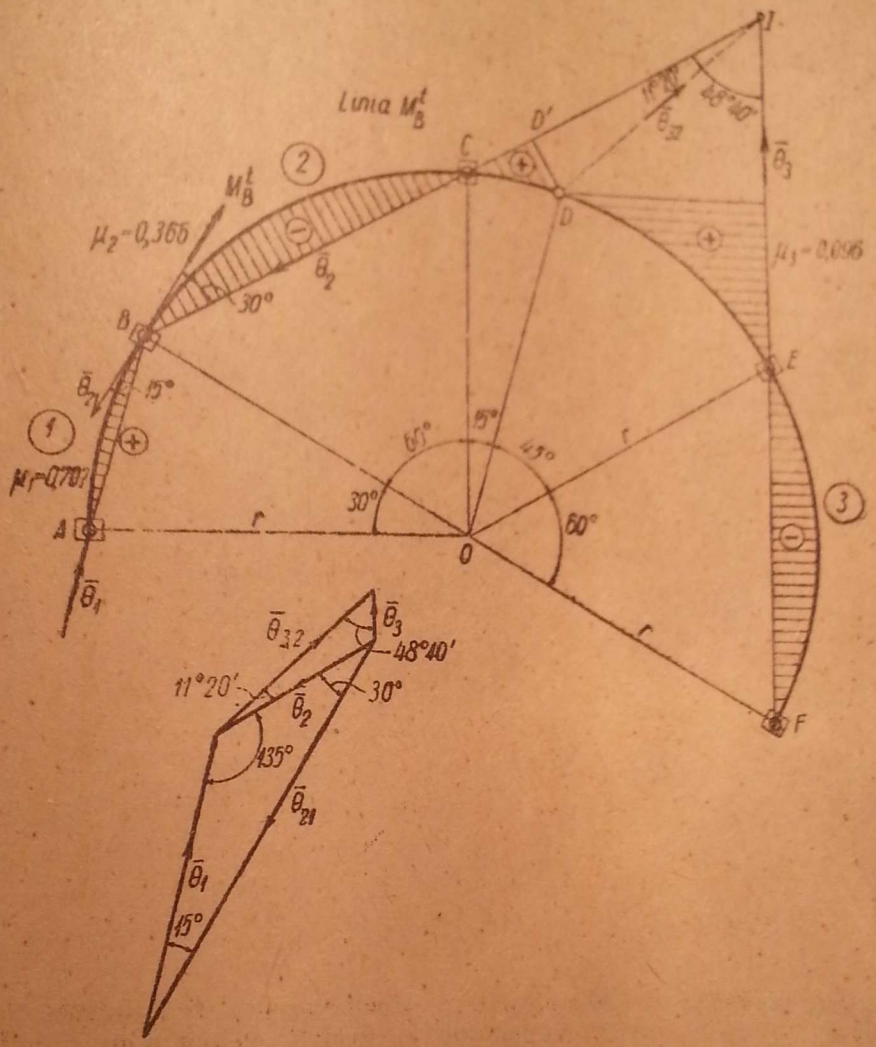


Fig. 453.

intersecție al lui $\bar{\theta}_{21}$ cu $\bar{\theta}_{32}$, iar din combinația din 1, 3 și *teren* rezultă: $\bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_{31}$, așa cum se verifică pe poligonul rotațiilor și, în același timp, $\bar{\theta}_{31}$ trebuie să treacă prin intersecția J a lui $\bar{\theta}_1$ cu $\bar{\theta}_3$, adică a dreptelor AB și EF. Punctul J nu este reprezentat în figură, ieșind din cadrul desenului. $\bar{\theta}_{31}$ este orientat după GJ care trebuie să fie paralelă cu $\bar{\theta}_{31}$ din poligonul rotațiilor.

Se mai observă reciprocitatea dintre poligonul rotațiilor și vectorii rotațiilor pe grindă: unui triunghi de rotații din poligonul rotațiilor îi corespunde un punct de concurență a acelorași vectori de rotații pe grindă și reciproc.

Aplicația 108. În calculul plăcilor după teoria stărilor limită (la rupere)[1] se arată că

[1]) A se vedea „Instrucțiuni pentru calculul plăcilor și grinzilor secundare din planșee de beton armat, ținînd seamă de deformațiile plastice" H.-132-50, Moscova, 1950.

echilibrul unei plăci se distruge cînd, prin apariţia „liniilor de rupere", placa s-a transformat într-un sistem cinematic cu un singur grad de libertate. Echilibrul static se realizează între forţele exterioare şi momentele încovoietoare capabile ale plăcii cu vectorii orientaţi de-a lungul liniilor de rupere.

În fig. 454, *a* este reprezentată o placă dreptunghiulară orizontală încastrată pe latura AB, simplu rezemată pe latura AC şi simplu rezemată în punctul D, încărcată cu o sarcină concentrată verticală P în punctul notat tot cu P. Admiţînd cunoscute momentele încovoietoare capabile de-a lungul diferitelor linii de rupere, să se găsească valoarea limită a sarcinii P, pe care o poate suporta placa.

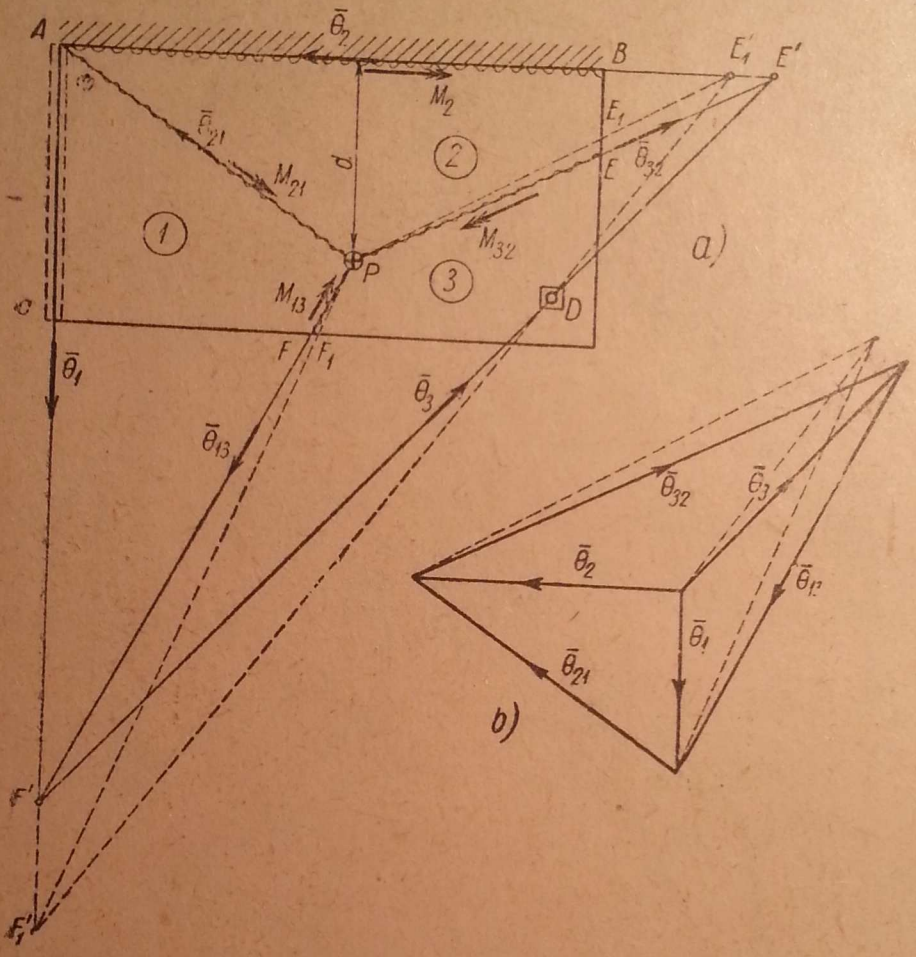


Fig. 454.

Răspuns. Deşi problema de faţă nu intră în obiectul propriu-zis al Staticii Construcţiilor, totuşi partea ei de statică de care ne ocupăm aici se rezolvă cel mai uşor cu ajutorul deplasărilor virtuale, folosind cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit numai deplasări normale pe plan.

O linie de rupere reprezintă din punct de vedere cinematic o articulaţie cilindrică în raport cu care cele două părţi se pot roti una faţă de alta.

Fără a intra în toate detaliile privitoare la modul de determinare a liniilor de rupere, se observă că în cazul din fig. 454, pentru a obţine un mecanism cu un grad de libertate, sînt necesare următoarele linii de rupere:

Întîi o linie de rupere de-a lungul încastrării AB care să permită o rotaţie faţă de această latură, aşa cum permite latura simplu rezemată AC.

Apoi, o linie de rupere care pleacă din colţul A, care se permită rotaţiile între două corpuri articulate cilindric, unul pe latura AB, şi altul — pe latura AC. În cazul unei sarcini concentrate P, această linie de rupere este chiar segmentul de dreaptă AP.

Ţinînd seamă de rezemarea din D, mai sînt necesare două linii de rupere pentru a ajunge efectiv la un mecanism cu un grad de libertate. Aceste linii vor pleca din P. Una dintre ele va trebui să permită rotaţia relativă dintre corpul care se reazemă pe latura AB şi cel care se reazemă în punctul D, deci va avea o direcţie PE, E găsindu-se între B şi D, iar

cealaltă va trebui să permită rotația relativă dintre corpul rezemat pe AC și cel rezemat în D, deci va avea o direcție PF, unde F se găsește între C și D.

Aceste ultime două linii de rupere nu pot fi duse independent una de alta. În adevăr, prin cele patru linii de rupere necesare: AB, AP, EP, FP placa s-a descompus în trei corpuri *1*, *2*, și *3* care trebuie să aibă contur convex. Corpul *1* se rotește în raport cu terenul cu unghiul $\bar{\theta}_1$ după AC, corpul *2* cu $\bar{\theta}_2$ după AB, iar corpul *2* față de corpul *1* cu $\bar{\theta}_{21}$ după AP. Cei trei vectori concurenți în A: $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ și $\bar{\theta}_{21}$ sînt legați de relația: $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_{21}$ și se construiește triunghiul acestor vectori ca în fig. 454, *b*. Dînd lui P o deplasare în jos, rezultă semnele tuturor vectorilor $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ și $\bar{\theta}_{21}$.

Apoi, dacă s-a admis că rotația dintre *2* și *3* se face față de axa PE, E fiind luat într-o poziție arbitrară între B și D, rezultă: $\bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_{32}$; $\bar{\theta}_2$ și $\bar{\theta}_{32}$ se întîlnesc în E', iar corpul *3* are un punct fix în D, deci $\bar{\theta}_3$ va fi orientat după dreapta $D'E'$, și triunghiul respectiv al vectorilor din fig. 454, *b* determină mărimile și sensurile lui $\bar{\theta}_3$ și $\bar{\theta}_{32}$.

Trecînd acum la combinația *3*, *1* și *teren* vom avea: $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_3 + \bar{\theta}_{13}$. $\bar{\theta}_1$ și $\bar{\theta}_3$ se întîlnesc în F', deci linia PF trebuie să aibă direcția PF' care este bine determinată pentru o poziție dată a punctului E. Triunghiul corespunzător determină pe $\bar{\theta}_{13}$.

Poligonul tuturor vectorilor $\bar{\theta}$ este reprezentat în fig. 454, *b*.

Prin aparițiа schematică a liniilor de rupere, continuitatea plăcii a fost suprimată de-a lungul lor, și trebuie înlocuită (la materialele a căror curbă caracteristică are zonă de curgere) prin momentele încovoietoare capabile ale secțiunii, momente ale căror vectori sînt dirijați chiar după liniile de rupere.

Se notează momentele totale încovoietoare (capabile) de-a lungul fiecărei linii de rupere în felul următor:

M_2 momentul capabil pe toată lungimea AB
M_{21} momentul capabil pe toată lungimea AP
M_{32} momentul capabil pe toată lungimea PE
M_{13} momentul capabil pe toată lungimea PF

Dacă se dă o deplasare virtuală astfel ca forța P să parcurgă o săgeată v_P în sensul forței, toate momentele încovoietoare, indiferent de sensul lor, se opun deformației, deci produc lucru mecanic negativ, cum de altfel se verifică ușor în fig. 454, *a* și *b*.

Ecuația de lucru mecanic virtual va fi: dacă se notează cu P_r valoarea limită (la rupere) a sarcinii P:

$$+ P_r \cdot v_P - M_2 \cdot \theta_2 - M_{21} \cdot \theta_{21} - M_{32} \cdot \theta_{32} - M_{13} \cdot \theta_{13} = 0.$$

Dacă se alege θ_2 ca parametru se poate scrie: $v_P = d \cdot \theta_2$, și din ecuația de mai sus se deduce valoarea lui P_r:

$$P_r = \frac{1}{d}\left(M_2 + M_{21} \cdot \frac{\theta_{21}}{\theta_2} + M_{32} \cdot \frac{\theta_{32}}{\theta_2} + M_{13} \cdot \frac{\theta_{13}}{\theta_2}\right). \qquad (7.27)$$

Toate elementele din membrul al doilea al expresiei (7.27) se pot calcula din elementele fig. 454.

Astfel, rapoartele $\frac{\theta_{21}}{\theta_2}$, $\frac{\theta_{33}}{\theta_2}$, $\frac{\theta_{13}}{\theta_2}$ rezultă din poligonul vectorilor (fig. 454, *b*) și este suficient de exact dacă această operație se face grafic prin măsurarea laturilor poligonului.

Momentele M_2, M_{21}, M_{32}, M_{13} se determină din lungimile liniilor de rupere și din momentul capabil pe unitatea de lungime a fiecărei linii de rupere, în funcție de grosimea plăcii și de armătura ei (la beton armat). Astfel, dacă pe 1 m sînt determinate momentele capabile m_2, m_{21}, m_{32}, m_{13} de-a lungul fiecărei linii de rupere, rezultă:

$$M_2 = m_2 \cdot AB;\ M_{21} = m_{21} \cdot AP;\ M_{32} = m_{32} \cdot PE;\ M_{13} = m_{13} \cdot PF$$

și, în consecință, P_r se poate determina efectiv din expresia (7.27).

Observații

1. Punctul E a fost ales arbitrar între B și D și poziția lui a determinat pe F. Dacă se ia altă poziție pentru E, de exemplu, în E_1, se obține un nou punct F_1, și apoi, alte

puncte F_1' și F_1. Acestea vor determina în poligonul rotațiilor alte laturi pentru $\bar{\theta}_{32}$, $\bar{\theta}_3$ și $\bar{\theta}_{13}$, cum și alte lungimi PE_1 și PF_1 (desenate punctat). Noile elemente introduse în (7.27) vor determina altă valoare pentru sarcina de rupere P_r.

Poziția justă a lui E va fi aceea care va determina cea mai mică valoare pentru P_r. Teoretic, ar trebui introdus un parametru, de exemplu, distanța BE, în funcție de care să se exprime θ_{32}, θ_3, θ_{13}. PE și PF, făcute înlocuirile în formula (7.27) în funcție de acest parametru și apoi să se studieze această funcție pentru a găsi minimul lui P_r. Deoarece sub această formă calculele analitice sînt greu de condus, afară de cazuri simple, practic, este de recomandat să se intuiască cît se poate de judicios liniile de rupere și să se efectueze cîteva încercări în jurul poziției presupuse juste, deoarece variația lui P_r este destul de mică în jurul valorii minime.

2. După stabilirea sarcinii de rupere P_r, sarcina de exploatare P se obține prin împărțirea cu un coeficient de siguranță c:

$$P = \frac{P_r}{c}.$$

§ 47. GRINZI CURBE STRÎMBE

A. GENERALITĂȚI

Grinzile curbe strîmbe sînt rar utilizate în construcții.

Ele prezintă dificultăți analitice în urmărirea calculului, de aceea în cele ce urmează vor fi reprezentate numai elemente cu caracter general și aplicații relativ simple.

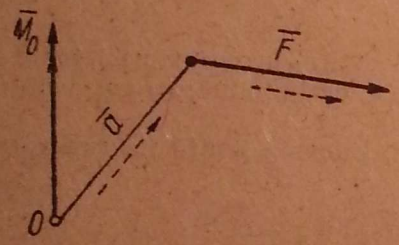


Fig. 455.

Deoarece conducerea calculului analitic este greu de urmărit în spațiu, în cazul grinzilor curbe strîmbe supuse la forțe oarecare, se va adopta calculul vectorial, care are avantaje de prezentare în situația de față.

Produsul scalar dintre doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se notează: $\bar{a} \cdot \bar{b}$, și se știe că este un scalar a cărui mărime are valoarea: $a \cdot b \cos(a \cdot b)$, iar produsul vectorial a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se notează $\bar{a} \times \bar{b}$ și este un vector normal pe planul celor doi, avînd ca mărime: $\bar{a} \cdot \bar{b} \sin(a,b)$, orientat astfel, încît $\bar{a}$ să ajungă peste $\bar{b}$, dacă se aduce la aceeași origine, prin rotația în sensul acelor unui ceasornic pentru un unghi mai mic de 180°.

Deci, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$, pe cînd: $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

Momentul unei forțe $\bar{F}$ în raport cu punctul O este produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\bar{a}$ și forța $\bar{F}$: $\bar{M}^0 = \bar{a} \times \bar{F}$, așa cum se arată în fig. 455, adică parcurgînd în același sens întîi pe $\bar{a}$, și apoi pe $\bar{F}$.

Într-un punct oarecare al unei curbe strîmbe sistemul intrinsec de axe este compus din: tangenta $(\bar{t})$, normala principală $(\bar{n})$ și binormala $(\bar{b})$. Corespondența dintre aceste axe și notațiile generale este: Ox după tangentă, Oy după normala principală și Oz după binormală, orientate astfel: tangenta pozitivă — în sensul de parcurgere al grinzii (intră în secțiune), normala principală pozitivă — spre centrul de curbură, și binormala pozi-

tivă — astfel ca un observator după $\bar{b}$ să vadă pe $\bar{t}$ rotind spre $\bar{n}$ în sensul orar (sistemul stîng).

Versorii (vectorii-unitate) după axele intrinseci se notează cu $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, iar cei după un sistem de axe fix Ox, Oy, Oz — cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

O sarcină oarecare $\bar{p}$ aplicată într-un punct are componentele după tangentă, normala principală și binormală pozitive în sensul pozitiv al axelor intrinseci:

$$\bar{p} = p_t \cdot \bar{t} + p_n \cdot \bar{n} + p_b \cdot \bar{b}. \qquad (7.28)$$

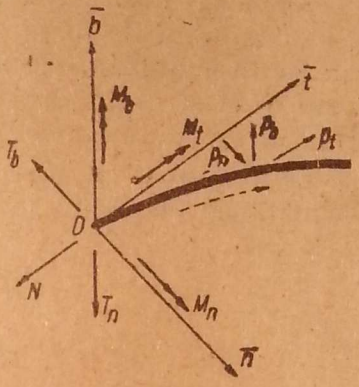


Fig. 456.

Respectînd convenția inițială, forța axială N și forțele tăietoare T_b (după $\bar{n}$) și T_n (după $\bar{b}$) sînt pozitive cînd sînt dirijate în sens opus axelor pozitive, iar momentul de torsiune M_t și momentele încovoietoare M_n și M_b sînt pozitive în sensul pozitiv al axelor (fig. 456). În consecință, dacă într-o secțiune a grinzii sistemul de forțe din stînga secțiunii s-a redus la torsorul $\bar{R}$, $\bar{M}$) vom avea pe fața din dreapta secțiunii:

$$\bar{R} = -N \cdot \bar{t} - T_b \cdot \bar{n} - T_n \cdot \bar{b} \qquad (7.29)$$

$$\bar{M} = M_t \cdot \bar{t} + M_n \cdot \bar{n} + M_b \cdot \bar{b} \qquad (7.30)$$

B. RELAȚII DIFERENȚIALE

Dacă pe o grindă curbă oarecare parcursă în sensul săgeții din fig. 457,*a* (stînga-dreapta), într-o secțiune O sistemul de forțe din stînga s-a redus

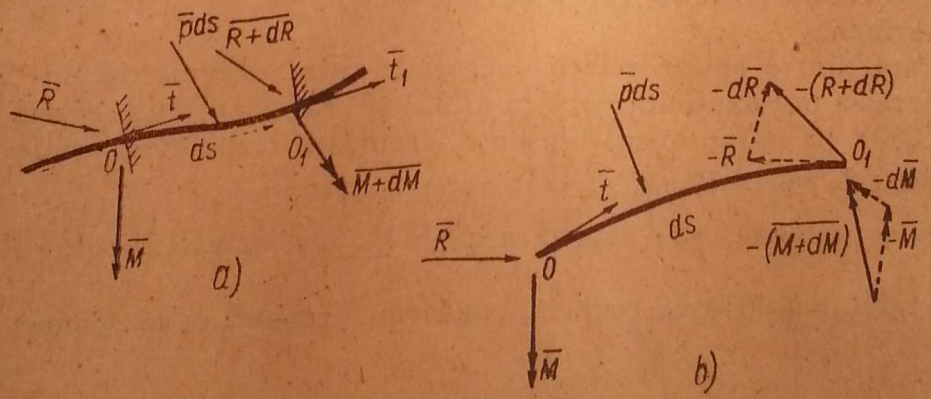


Fig. 457.

la torsorul ($\bar{R}$, $\bar{M}$,), atunci într-o secțiune O_1 la dreapta acesteia și la distanța infinit mică ds, vom avea torsorul $(\overline{R+dR}, \overline{M+dM})$. Între cele două secțiuni O și O_1 acționează sarcina presupusă uniform distribuită pe acest interval infinitesimal de o direcție oarecare $\bar{p} \cdot ds$. Separînd elementul ds,

pe fața din O vom pune ca forțe de legătură torsorul $(\overline{R}; \overline{M})$, iar pe fața din O_1, torsorul $[-(\overline{R+dR}); -(\overline{M+dM})]$, deoarece fața din O_1 aparținînd lui ds se găsește în stînga secțiunii din O_1. De asemenea, pe elementul ds acționează încărcarea $\bar{p} \cdot ds$.

Sistemul de forțe care acționează elementul ds din fig. 457, b, trebuie să fie în echilibru. Aceasta se exprimă scriind că suma vectorială a forțelor este nulă și că momentul tuturor forțelor în raport cu un punct este nul. Se vor lua momentele față de O_1 și se va ține seamă că momentul sarcinii $\bar{p} \cdot ds$ în raport cu acest punct este un infinit mic de ordin superior față de cantitățile ce rămîn în ecuație, astfel că va fi neglijat :

$$\overline{R} - \overline{(R+dR)} + \bar{p} \cdot ds = 0, \tag{7.31}$$

$$\overline{M} - \overline{(M+dM)} - ds \cdot \bar{t} \times \overline{R} = 0. \tag{7.32}$$

În ecuația (7.32) am pus semnul minus pentru momentul lui $\overline{R}$ față de O_1, deoarece elementul $ds \cdot \bar{t}$ este parcurs în sens invers celui convenit pentru semnul momentului în fig. 455.

Ținînd seamă că : $\overline{R+dR} = \overline{R} + \overline{dR}$ și $\overline{M+dM} = \overline{M} + \overline{dM}$ și împărțind prin ds în ecuațiile (7.31) (și (7.32) se obține :

$$\frac{d\overline{R}}{ds} + \bar{p} = 0, \tag{7.33}$$

$$\frac{d\overline{M}}{ds} + \bar{t} \times \overline{R} = 0. \tag{7.34}$$

Ecuațiile (7.33) și (7.34) reprezintă, sub formă vectorială, relațiile cele mai generale dintre eforturi, încărcări și elementele geometrice ale unei grinzi curbe strîmbe, încărcată cu sarcini oarecare în spațiu, aplicate pe axa grinzii.

Fiecare dintre aceste relații vectoriale este echivalentă cu trei ecuații scalare care se pot explicita dacă în (7.33) și (7.34) se ține seamă de (7.28), (7.29), (7.30) și se fac operațiile de diferențiere respective, unde vor interveni derivatele versorilor $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, în raport cu ds.

Dacă se notează cu $\frac{1}{\rho}$ curbura principală a grinzii în planul osculator și cu $\frac{1}{\rho_t}$ torsiunea grinzii, rezultă, conform formulelor lui Frenet :

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n};$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \cdot \bar{t} + \frac{1}{\rho_t} \cdot \bar{b}; \tag{7.35}$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{1}{\rho_t} \cdot \bar{n}.$$

Înlocuind pe $\bar{R}$ din (7.29) și pe $\bar{p}$ din (7.28) în (7.33), se obține :

$$\frac{d}{ds}(N\cdot\bar{t}+T_b\cdot\bar{n}+T_n\cdot\bar{b})+p_t\cdot\bar{t}+p_n\cdot\bar{n}+p_b\cdot\bar{b}=0,\ \text{sau}$$

$$\frac{dN}{ds}\cdot\bar{t}+N\frac{d\bar{t}}{ds}+\frac{dT_b}{ds}\cdot\bar{n}+T_b\cdot\frac{d\bar{n}}{ds}+\frac{dT_n}{ds}\cdot\bar{b}+T_n\cdot\frac{d\bar{b}}{ds}+p_t\cdot\bar{t}+p_n\cdot\bar{n}+$$

$$+p_b\cdot\bar{b}=0.$$

Ținînd seamă apoi de (7.35) rezultă :

$$\frac{dN}{ds}\cdot\bar{t}+\frac{N}{\rho}\cdot\bar{n}+\frac{dT_b}{ds}\cdot\bar{n}-\frac{T_b}{\rho}\cdot\bar{t}+\frac{T_b}{\rho_t}\cdot\bar{b}+\frac{dT_n}{ds}\cdot\bar{b}-\frac{T_n}{\rho_t}\cdot\bar{n}+p_t\cdot\bar{t}+p_n\cdot\bar{n}+$$

sau

$$+pb\cdot\bar{b}=0$$

$$\left(\frac{dN}{ds}-\frac{T_b}{\rho}+p_t\right)\bar{t}+\left(\frac{dT_b}{ds}+\frac{N}{\rho}-\frac{T_n}{\rho_t}+p_n\right)\bar{n}+\left(\frac{dT_n}{ds}+\frac{T_b}{\rho_t}+p_b\right)\bar{b}=0. \tag{7.36}$$

Înlocuind acum pe $\bar{R}$ din (7.29) și pe $\bar{M}$ din (7.30) în (7.34) se obține :

$$\frac{d}{ds}(M_t\cdot\bar{t}+M_n\cdot\bar{n}+M_b\cdot\bar{b})+\bar{t}\times(-N\cdot\bar{t}-T_b\cdot\bar{n}-T_n\bar{b})=0;$$

știind că $\bar{t}\times\bar{t}=0$; $\bar{t}\times\bar{n}=\bar{b}$ și $\bar{t}\times\bar{b}=-\bar{n}$, rezultă :

$$\frac{dM_t}{ds}\cdot\bar{t}+M_t\cdot\frac{d\bar{t}}{ds}+\frac{dM_n}{ds}\bar{n}+M_n\cdot\frac{d\bar{n}}{ds}+\frac{dM_b}{ds}\cdot\bar{b}+M_b\frac{d\bar{b}}{ds}-T_b\cdot\bar{b}+T_n\cdot\bar{n}=0$$

și ținînd seamă de (7.35),

$$\frac{dM_t}{ds}\cdot\bar{t}+\frac{M_t}{\rho}\cdot\bar{n}+\frac{dM_n}{ds}\cdot\bar{n}-\frac{M_n}{\rho}\cdot\bar{t}+\frac{M_n}{\rho_t}\cdot\bar{b}+\frac{dM_b}{ds}\cdot\bar{b}-\frac{M_b}{\rho_t}\cdot\bar{n}-T_b\cdot\bar{b}+$$

$$+T_n\cdot\bar{n}=0$$

sau

$$\left(\frac{dM_t}{ds}-\frac{M_n}{\rho}\right)\bar{t}+\left(\frac{dM_n}{ds}+\frac{M_t}{\rho}-\frac{M_b}{\rho_t}+T_n\right)\bar{n}+\left(\frac{dM_b}{ds}+\frac{M_n}{\rho_t}-T_b\right)\bar{b}=0. \tag{7.37}$$

Fiecare dintre ecuațiile (7.36) și (7.37) conține cîte trei ecuații scalare după axele $\bar{t}$, $\bar{n}$ și $\bar{b}$, astfel că sub formă analitică aceste relații se obțin din

egalarea cu zero a coeficienților versorilor $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$. Rezultă :

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T_b}{\rho}; \tag{7.38}$$

$$\frac{dT_b}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho} + \frac{T_n}{\rho_t}; \tag{7.39}$$

$$\frac{dT_n}{ds} = -p_b - \frac{T_b}{\rho_t}; \tag{7.40}$$

$$\frac{dM_t}{ds} = \frac{M_n}{\rho}; \tag{7.41}$$

$$\frac{dM_n}{ds} = -T_n - \frac{M_t}{\rho} + \frac{M_b}{\rho_t}; \tag{7.42}$$

$$\frac{dM_b}{ds} = T_b - \frac{M_n}{\rho_t}. \tag{7.43}$$

Expresiile (7.38)—(7.43) reprezintă, sub formă analitică, în raport cu coordonatele intrinseci, relațiile cele mai generale, pentru sarcini aplicate pe axa barei.

Prin particularizare se obțin toate formulele determinate anterior. Astfel, la grinzile curbe plane supuse la forțe oarecare, $\frac{1}{\rho_t} = 0$, și ecuațiile de mai sus se pot grupa astfel :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= -p_t + \frac{T_b}{\rho}; \\ \frac{dT_b}{ds} &= -p_n - \frac{N}{\rho}; \\ \frac{dM_b}{ds} &= T_b \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

și

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT_n}{ds} &= -p_b; \\ \frac{dM_t}{ds} &= \frac{M_n}{\rho}; \\ \frac{dM_n}{ds} &= -T_n - \frac{M_t}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

Relațiile (7.44) sînt chiar relațiile (5.1) de la arcele plane supuse la forțe în planul lor, iar relațiile (7.45) sînt identice cu relațiile (7.5) de la grinzile curbe plane supuse la forțe normale pe planul grinzii, dacă se ține seamă că acolo am pus : $p = -p_b$ și $T = -T_n$. Grupul (7.44) este independent de grupul (7.45), ceea ce constituie o verificare a faptului că grinda curbă plană cu forțe oarecare a fost descompusă corect în cele două scheme : arc plan cu forțe în plan și apoi grindă plană cu forțe normale pe plan.

În mod analog, din (7.38) — (7.43) se pot regăsi toate relațiile diferențiale stabilite anterior la grinzi drepte în plan și în spațiu.

În cazul cînd sarcina $\bar{p}\cdot ds$ se aplică în A cu o excentricitate $\bar{e}$ față de axa grinzii, ca în fig. 458, unde avem : $\bar{e} = e_n\cdot\bar{n} + e_b\cdot\bar{b}$, relația (7.31) și apoi (7.33) rămîn neschimbate, dar relația (7.32) se modifică în felul următor : în ecuația de momente față de O_1 (fig. 457 și 458) va produce moment și sarcina $\bar{p}\cdot ds$, datorită excentricității. Dacă se notează : $\bar{f} = \overline{O_1A}$, ecuația de momente față de O_1 devine :

$$\bar{M} - (\bar{M} + \overline{dM}) - ds\cdot\bar{t}\times\bar{R} + \bar{f}\times\bar{p}\cdot ds = 0, \qquad (7.46)$$

ecuație care față de (7.31) are în plus ultimul termen : $\bar{f}\times\bar{p}\cdot ds$ pe care urmează să-l dezvoltăm :

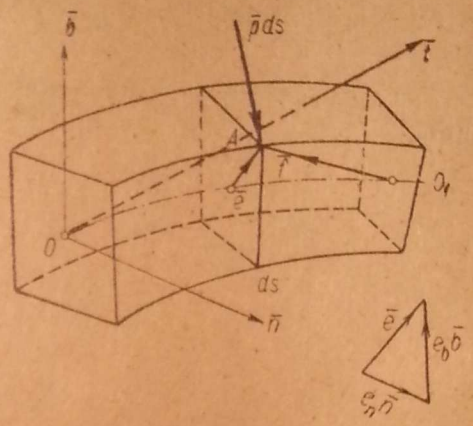


Fig. 458.

$$\bar{f} = -\frac{ds}{2}\cdot\bar{t} + e_n\cdot\bar{n} + e_b\cdot\bar{b}$$

și apoi : $$\bar{f}\times\bar{p}\cdot ds = \left(-\frac{ds}{2}\cdot\bar{t} + e_n\cdot\bar{n} + e_b\cdot\bar{b}\right)\times\bar{p}\cdot ds.$$

În paranteză $\frac{ds}{2}$ este un infinit mic față de celelalte distanțe e_n și e_b care sînt finite, așa că se poate neglija. Deci :

$$\bar{f}\times\bar{p}\cdot ds = (e_n\cdot\bar{n} + e_b\cdot\bar{b})\times\bar{p}\cdot ds = \bar{e}\times\bar{p}\cdot ds.$$

În acest caz, relația (7.46) devine :

$$\frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{t}\times\bar{R} - \bar{e}\times\bar{p} = 0; \qquad (7.47)$$

relația (7.47) diferă de relația (7.34) numai prin ultimul termen produs de excentricitatea sarcinii. Se va dezvolta aici acest ultim termen :

$$-\bar{e}\times\bar{p} = -(e_n\cdot\bar{n} + e_b\cdot\bar{b})\times(p_t\cdot\bar{t} + p_n\cdot\bar{n} + p_b\cdot\bar{b}) =$$

$$= -p_t\cdot e_n\cdot\bar{n}\times\bar{t} - p_n\cdot e_n\cdot\bar{n}\times\bar{n} - p_b\cdot e_n\cdot\bar{n}\times\bar{b} - p_t\cdot e_b\cdot\bar{b}\times\bar{t} -$$

$$- p_n\cdot e_b\cdot\bar{b}\times\bar{n} - p_b\cdot e_b\cdot\bar{b}\times\bar{b}.$$

Știind că :

$\bar{n}\times\bar{t} = -\bar{b}$; $\bar{n}\times\bar{n} = 0$; $\bar{n}\times\bar{b} = \bar{t}$; $\bar{b}\times\bar{t} = \bar{n}$;

$\bar{b}\times\bar{n} = -\bar{t}$; $\bar{b}\times\bar{b} = 0$, rezultă :

$$-\bar{e}\times\bar{p} = p_t\cdot e_n\cdot\bar{b} - p_b\cdot e_n\cdot\bar{t} - p_t\cdot e_b\cdot\bar{n} + p_n\cdot e_b\cdot\bar{t} =$$

$$= (p_n\cdot e_b - p_b\cdot e_n)\,\bar{t} - p_t\cdot e_b\cdot\bar{n} + p_t\cdot e_n\cdot\bar{b}.$$

În ecuația (7.37) dedusă din (7.34) trebuie adăugată dezvoltarea termenului $-\bar{e} \times \bar{p}$, de unde rezultă

$$\left(\frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{\rho} + p_n \cdot e_b - p_b \cdot e_n\right)\bar{t} + \left(\frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{\rho} - \frac{M_b}{\rho_t} + T_n - p_t \cdot e_b\right)\bar{n} +$$

$$+ \left(\frac{dM_b}{ds} + \frac{M_n}{\rho_t} - T_b + p_t \cdot e_n\right)\bar{b} = 0. \tag{7.48}$$

Ecuația (7.48) este echivalentă cu expresiile de mai jos care înlocuiesc relațiile (7.41), (7.42) și (7.43), cînd sarcina se aplică cu excentricitate :

$$\frac{dM_t}{ds} = \frac{M_n}{\rho} - p_n \cdot e_b + p_b \cdot e_n ; \tag{7.49}$$

$$\frac{dM_n}{ds} = -T_n - \frac{M_t}{\rho} + \frac{M_b}{\rho_t} + p_t \cdot e_b ; \tag{7.50}$$

$$\frac{dM_b}{ds} = T_b - \frac{M_n}{\rho_t} - p_t \cdot e_n . \tag{7.51}$$

Evident, relațiile (7.38), (7.39) și (7.40) deduse din (7.31) rămîn neschimbate.

C. DIAGRAMELE EFORTURILOR

După determinarea reacțiunilor se poate trece la exprimarea eforturilor în orice secțiune a grinzii curbe în spațiu, reducînd toate forțele exterioare de la stînga secțiunii în raport cu centrul de greutate al ei.

Toate forțele de la stînga secțiunii se reduc în raport cu centrul său de greutate la torsorul $(\bar{R}, \bar{M})$ care constituie chiar eforturile din secțiunea considerată.

Vom avea :

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i$$

și

$$\bar{M} = \sum \bar{a}_i \times \bar{F}_i,$$

unde sumele se referă la toate forțele exterioare (forțele date și reacțiuni) de la stînga secțiunii (sau de la dreapta, cu semn schimbat) ;

$\bar{a}_i$ reprezintă vectorul cu originea în centrul de greutate al secțiunii considerate și cu extremitatea în punctul de aplicație al forței $\bar{F}_i$.

Deoarece prin eforturi se înțeleg în mod obișnuit proiecțiile celor doi vectori $\bar{R}$ și $\bar{M}$ pe axele intrinseci, acestea se obțin cu relațiile (7.29) și (7.30) :

$$\bar{R} = -N \cdot \bar{t} - T_b \cdot \bar{n} - T_n \cdot \bar{b}, \tag{7.29}$$

$$\bar{M} = M_t \cdot \bar{t} + M_n \cdot \bar{n} + M_b \cdot \bar{b}. \tag{7.30}$$

Diagramele celor șase eforturi : N, T_b, T_n, M_t, M_n, M_b, se obțin prin calcularea valorilor în diferite secțiuni și reprezentarea lor față de o axă, care se ia de obicei axa desfășurată a grinzii.

Corespondența dintre eforturi este dată de relațiile (7.38) — (7.43), care sînt mai greu de interpretat pe diagrame. Relația (7.41) arată că în cazul unei grinzi curbe fără coturi ($\rho \neq 0$ și $\rho \neq \infty$), momentul de torsiune M_t este maxim, sau minim acolo unde momentul încovoietor M_n este nul, dacă bineînțeles sarcinile se aplică în axa grinzii.

Modul de conducere a calculelor pentru determinarea eforturilor în diferite secțiuni, și apoi construcția diagramelor eforturilor sînt arătate direct în aplicațiile care urmează.

Aplicația 109. Să se determine diagramele eforturilor în grinda elicoidală din fig. 459 încărcată cu o sarcină uniform repartizată q kg/m de proiecție orizontală. Unghiul de înfășurare al elicei cilindrice este $\sphericalangle AOB = \frac{3\pi}{2}$, iar panta este dată de unghiul α. În capătul inferior A grinda are o legătură mixtă cu cinci elemente simple — cele trei elemente de forță și două componente ale momentelor după tangentă $(\bar{t})$ și binormală $(\bar{b})$ — iar în capătul superior B, un reazem simplu vertical.

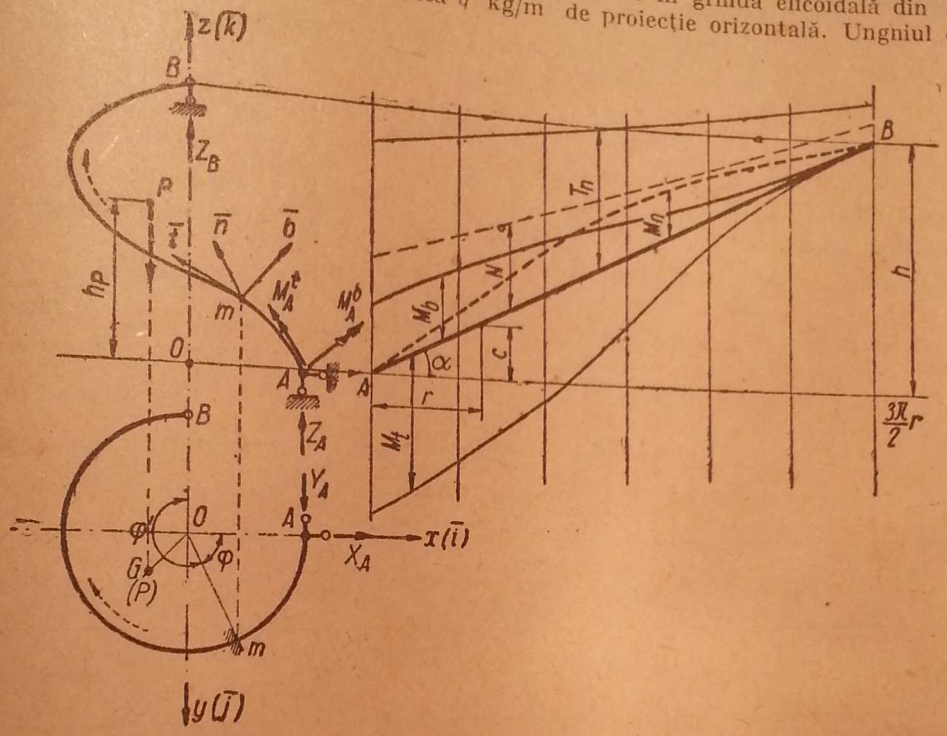


Fig. 459.

Răspuns. Elemente geometrice:

Coordonatele unui punct curent m de pe elice față de sistemul de axe $Oxyz$ cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sînt:

$x = r \cdot \cos\varphi$; $y = r \cdot \sin\varphi$; $z = c \cdot \varphi$, unde: $c = r \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Alte elemente sînt:

$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}};$$

$$ds = \sqrt{r^2 + c^2} \cdot d\varphi = \frac{r}{\cos\alpha} \cdot d\varphi; \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\alpha}{r}.$$

Curbura și torsiunea elicei sînt: $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{r} = \frac{r}{r^2 + c^2}$; $\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\alpha}{c} = \frac{c}{r^2 + c^2}$.

Vectorul de poziție al punctului curent m este:

$$\bar{a}_m = \overline{Om} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} = r \cdot \cos\varphi \cdot \bar{i} + r \sin\varphi \cdot \bar{j} + c\varphi \cdot \bar{k}.$$

Sistemul intrinsec de axe în punctul curent m pentru sensul de parcurgere indicat de săgeată de la A spre B are versorii $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ care se deduc din $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ în felul următor:

$$\bar{t} = \frac{d\bar{a}_m}{ds} = \frac{d\bar{a}_m}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\sin\varphi \cdot \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\varphi \cdot \cos\alpha \cdot \bar{j} + \sin\alpha \cdot \bar{k}; \tag{7.52}$$

$\bar{n}$ se deduce din prima expresie (7.35):

$$\bar{n} = \rho \frac{d\bar{t}}{ds} = \rho \cdot \frac{d\bar{t}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{r}{\cos^2\alpha} (-\cos\varphi \cos\alpha \cdot \bar{i} - \sin\varphi \cos\alpha \cdot \bar{j}) \cdot \frac{\cos\alpha}{r} =$$

$$= -\cos\varphi \cdot \bar{i} - \sin\varphi \cdot \bar{j}; \tag{7.53}$$

$\bar{b}$ se obține din: $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} = \sin\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \bar{i} - \cos\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \bar{j} + \cos\alpha \cdot \bar{k}$. (7.54)

Înmulțind relațiile (7.52), (7.53) și (7.54) scalar cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ se obțin produsele scalare: $\bar{t} \cdot \bar{i}$, $\bar{t} \cdot \bar{j}$, $\bar{t} \cdot \bar{k}$, $\bar{n} \cdot \bar{i}, \ldots$, etc., din tabela 18.

Tabela 18

	$\bar{t}$	$\bar{n}$	$\bar{b}$
$\bar{i}$	$-\sin\varphi \cdot \cos\alpha$	$-\cos\varphi$	$+\sin\varphi \cdot \sin\alpha$
$\bar{j}$	$+\cos\varphi \cdot \cos\alpha$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi \cdot \sin\alpha$.
$\bar{k}$	$+\sin\alpha$	0	$+\cos\alpha$

Determinarea reacțiunilor. Componentele reacțiunilor din A și B sînt: X_A, Y_A, Z_A, Z_B, M_A^t și M_A^b.

Deși în cazul de față reacțiunile se pot deduce ușor prin ecuații directe de proiecție și momente, se va folosi însă metoda generală a calculului vectorial.

Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\bar{R} = X_A \cdot \bar{i} + Y_A \cdot \bar{j} + (Z_A + Z_B - P) \cdot \bar{k} = 0, \tag{7.55}$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_A = \bar{a}_{AB} \times \bar{Z}_B + M_A^t \cdot \bar{t} + M_A^b \cdot \bar{b} + \bar{a}_{AP} \times \bar{P} = 0, \tag{7.55'}$$

unde $P = \frac{3\pi}{2} \cdot qr$ și se aplică într-un punct notat tot cu P.

Încărcarea fiind verticală în sens opus axei Oz pozitive în (7.55') trebuie pus:

$$\bar{P} = -P \cdot \bar{k}.$$

Din (7.55) se deduce: $X_A = 0$; $Y_A = 0$; $Z_A + Z_B = P$.

Apoi

$$\bar{a}_{AB} = -\bar{a}_A + \bar{a}_B = -r \cdot \bar{i} - r \cdot \bar{j} + h \cdot \bar{k},$$

$$\bar{a}_{AP} = -\bar{a}_A + \overline{OG} + h_P \cdot \bar{k},$$

dar $OG = r\,\dfrac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi}\cdot r$ și $\overline{OG} = -OG\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\bar{i} + OG\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\bar{j} =$

$$= -\frac{2r}{3\pi}\cdot\bar{i} + \frac{2r}{3\pi}\cdot\bar{j},$$

astfel încît:

$$\bar{a}_{AP} = -r\cdot\bar{i} - \frac{2r}{3\pi}\bar{i} + \frac{2r}{3\pi}\cdot\bar{j} + h_P\cdot\bar{k} = -\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\cdot r\cdot\bar{i} + \frac{2}{3\pi}\cdot r\cdot\bar{j} + h_P\cdot\bar{k}.$$

Ecuația (7.55') devine:

$$-r\cdot Z_B\cdot\bar{i}\times\bar{k} - r\cdot Z_B\cdot\bar{j}\times\bar{k} + h\cdot Z_B\cdot\bar{k}\times\bar{k} + M_A^t\cdot\bar{t} + M_A^b\cdot\bar{b} + \left(1+\frac{2}{3\pi}\right)r\cdot P\cdot\bar{i}\times\bar{k} -$$

$$-\frac{2r}{3\pi}\cdot P\cdot\bar{j}\times\bar{k} - h_P\cdot P\cdot\bar{k}\times\bar{k} = 0.$$

Dacă se ține seamă de valorile produselor vectoriale:
$\bar{i}\times\bar{k} = -\bar{j}$; $\bar{j}\times\bar{k} = \bar{i}$; $\bar{k}\times\bar{k} = 0$ și de faptul că din tabela 18 se poate scrie în A:

$$M_A^t\cdot\bar{t} = M_A^t\cdot\cos\alpha\cdot\bar{j} + M_A^t\sin\alpha\cdot\bar{k};$$

$$M_A^b\cdot\bar{b} = -M_A^b\cdot\sin\alpha\cdot\bar{j} + M_A^b\cdot\cos\alpha\cdot\bar{k},$$

rezultă:

$$\left(-rZ_B - \frac{2r}{3\pi}P\right)\bar{i} + \left[rZ_B - \left(1+\frac{2}{3\pi}\right)rP + M_A^t\cdot\cos\alpha - M_A^b\sin\alpha\right]\cdot\bar{j} +$$

$$+ (M_A^t\cdot\sin\alpha + M_A^b\cdot\cos\alpha)\cdot\bar{k} = 0. \qquad (7.56$$

Din (7.56) se deduce:

$$-r\cdot Z_B - \frac{2r}{3\pi}\cdot P = 0;$$

$$rZ_B - \frac{2}{3\pi}rP - rP + M_A^t\cos\alpha - M_A^b\sin\alpha = 0;$$

$$M_A^t\sin\alpha + M_A^b\cos\alpha = 0,$$

care, rezolvate, dau valorile Z_B, M_A^t și M_A^b.

Au fost determinate astfel toate reacțiunile:

$$X_A = 0;\quad Y_A = 0;\quad Z_A = \left(\frac{3\pi}{2}+1\right)\cdot qr;\quad Z_B = -qr;$$

$$M_A^t = \left(\frac{3\pi}{2}+2\right)\cdot qr^2\cdot\cos\alpha;\quad M_A^b = -\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)qr^2\cdot\sin\alpha; \qquad (7.57)$$

Determinarea eforturilor într-o secțiune curentă m.
Dacă se pornește din A spre m în sensul săgeții, conform relațiilor (7.29) și (7.30):

$$\bar{R} = -N \cdot \bar{t} - T_b \cdot \bar{n} - T_n \cdot \bar{b},$$

$$\bar{M} = M_t \cdot \bar{t} + M_n \cdot \bar{n} + M_b \cdot \bar{b}.$$

Pentru $\bar{M}$ este mai avantajos să se pornească de la B spre m, deoarece intervine o singură reacțiune Z_B. În acest caz, pornind de la dreapta, trebuie schimbate semnele în (7.29) și (7.30), și astfel rezultă:

$$\bar{R} = +N \cdot \bar{t} + T_b \cdot \bar{n} + T_n \cdot \bar{b}, \tag{7.29'}$$

$$\bar{M} = -M_t \cdot \bar{t} - M_n \cdot \bar{n} - M_b \cdot \bar{b}. \tag{7.30'}$$

Avem:

$$\bar{R} = (Z_B - P') \cdot \bar{k}, \tag{7.58}$$

$$\bar{M} = \bar{a}_{mB} \times \bar{Z}_B + \bar{a}_{mP'} \times \bar{P}', \tag{7.59}$$

unde cu P' s-a notat rezultanta sarcinilor de la B până în punctul m: $P' = qr \cdot \varphi' = qr \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$ și vectorial: $\bar{P}' = -P' \cdot \bar{k}$. Apoi: $\bar{a}_{mB} = -\bar{a}_m + \bar{a}_B = -r \cdot \cos\varphi \cdot \bar{i} - r \cdot \sin\varphi \cdot \bar{j} - c\varphi \cdot \bar{k} - r \cdot \bar{j} + h \cdot \bar{k} = -r \cdot \cos\varphi \cdot \bar{i} - r(1 + \sin\varphi) \cdot \bar{j} + (h - c\varphi) \cdot \bar{k}$.

Proiecția G' a punctului de aplicație al lui P' pe planul orizontal are coordonatele care rezultă din $OG' = \frac{r \sin {}^1/_2\varphi'}{{}^1/_2\varphi'}$, unde $\varphi' = \frac{3\pi}{2} - \varphi$.

Deci, $\overline{OG'} = -OG' \cdot \sin\frac{\varphi'}{2} \cdot \bar{i} - OG' \cdot \cos\frac{\varphi'}{2} \cdot \bar{j} = -2r \frac{\sin^2\frac{\varphi'}{2}}{\varphi'} \bar{i} - \frac{2r \cdot \sin\frac{\varphi'}{2} \cos\frac{\varphi'}{2}}{\varphi'} \cdot \bar{j} = r \cdot \frac{\cos\varphi' - 1}{\varphi'} \cdot \bar{i} - r\frac{\sin\varphi'}{\varphi'} \cdot \bar{j}$.

Rezultă: $\bar{a}_{mP'} = -\bar{a}_m + \overline{OG'} + \bar{h}_{P'} = -r\cos\varphi \cdot \bar{i} - r \cdot \sin\varphi \cdot \bar{j} - c\varphi \cdot \bar{k} + r\frac{\cos\varphi' - 1}{\varphi'} \bar{i} - r\frac{\sin\varphi'}{\varphi'} \bar{j} + h_{P'} \cdot \bar{k} = -r\left(-\frac{\cos\varphi' - 1}{\varphi'} + \cos\varphi\right)\bar{i} - r\left(\frac{\sin\varphi'}{\varphi'} + \sin\varphi\right)\bar{j} - (c \cdot \varphi - h_{P'})\bar{k}$. (7.60)

Introducînd aceste valori în expresia lui $\bar{M}$, rezultă:

$$\bar{M} = -M_t \cdot \bar{t} - M_n \cdot \bar{n} - M_b \cdot \bar{b} = [-r \cdot \cos\varphi \cdot \bar{i} - r(1 + \sin\varphi)\bar{j} + (h - c\varphi)\bar{k}] \times Z_B \cdot \bar{k} - \left[-r\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi' - 1}{\varphi'}\right)\bar{i} - r\left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi'}{\varphi'}\right)\bar{j} - (c\varphi - h_{P'})\bar{k}\right] \times P' \cdot \bar{k}$$

și efectuînd calculele, se obține:

$$-\bar{M} = M_t \cdot \bar{t} + M_n \cdot \bar{n} + M_b \cdot \bar{b} = \left[r(1 + \sin\varphi)Z_B - r\left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi'}{\varphi'}\right)P'\right]\bar{i} + \left[-r \cdot \cos\varphi \cdot Z_B + r\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi' - 1}{\varphi'}\right)P'\right] \cdot \bar{j} = C_1\bar{i} + C_2\bar{j}, \tag{7.61}$$

unde s-au notat cu C_1 și C_2 cele două paranteze mari.

Această relație ne arată că vectorul $\bar{M}$ este orizontal în orice punct al grinzii.

Multiplicînd relația (7.61) scalar, pe rînd cu $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ și ținînd seama de tabela 18, se obține:

$$M_t = -C_1 \sin\varphi \cdot \cos\alpha + C_2 \cos\varphi \cos\alpha;$$
$$M_n = -C_1 \cos\varphi - C_2 \sin\varphi;$$
$$M_b = C_1 \sin\varphi \cdot \sin\alpha - C_2 \cos\varphi \cdot \sin\alpha.$$

Ținînd seamă că $P' = qr\varphi'$; $\varphi' = \frac{3\pi}{2} - \varphi$; $Z_B = -qr$ și de valorile lui C_1 și C_2 de mai sus și efectuînd calculele se obține:

$$M_t = qr^2 \cos\alpha \left(1 + \frac{3\pi}{2} - \varphi + \sin\varphi + \cos\varphi\right) = qr^2 \cos\alpha\,(1 + \varphi' - \sin\varphi' - \cos\varphi');$$
$$M_n = -qr^2(+1 + \sin\varphi - \cos\varphi) = -qr^2\,(1 + \sin\varphi' - \cos\varphi');$$
$$M_b = -qr^2 \sin\alpha \left(1 + \frac{3\pi}{2} - \varphi + \sin\varphi + \cos\varphi\right) = -qr^2 \sin\alpha\,(1 + \varphi' - \sin\varphi' - \cos\varphi'). \qquad (7.62)$$

Eforturile N, T_b, T_n se deduc din ecuația:

$\bar{R} = N \cdot \bar{t} + T_b \cdot \bar{n} + T_n \cdot \bar{b} = (Z_B - P')\bar{k}$, dacă se multiplică scalar pe rînd cu $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$:

$$N = (Z_B - P')\sin\alpha = -(1 + \varphi')\,qr \cdot \sin\alpha = -\left(1 + \frac{3\pi}{2} - \varphi\right) qr \cdot \sin\alpha; \qquad (7.63)$$
$$T_b = 0;$$
$$T_n = (Z_B - P')\cos\alpha = -(1 + \varphi')\,qr \cdot \cos\alpha = -\left(1 + \frac{3\pi}{2} - \varphi\right) qr \cdot \cos\alpha.$$

Este ușor de observat că relațiile diferențiale (7.38) — (7.43), unde $p_t = -q \sin\alpha \cos\alpha$; $p_n = 0$; $p_b = -q \cdot \cos^2\alpha$, deoarece q a fost dat pe metru de proiecție orizontală, iar p_t, p_n, p_b trebuie evaluați pe metru de grindă, sînt verificate de expresiile eforturilor obținute mai sus.

În tabela 19 de mai jos sînt calculate eforturile cu expresiile (7.62) și (7.63) în cîteva puncte ale grinzii. S-a luat $c = 0{,}5\,r$, de unde: $\sin\alpha = 0{,}447$; $\cos\alpha = 0{,}894$.

Tabela 19

φ	N	T_n	M_t	M_n	M_b
0	−2,555	−5,110	+6,010	0	−3,005
$\frac{\pi}{4}$	−2,205	−4,410	+5,660	−1,00	−2,830
$\frac{\pi}{2}$	−1,850	−3,700	+4,690	−2,00	−2,345
$\frac{3\pi}{4}$	−1,505	−3,010	+3,000	−2,414	−1,500
π	−1,150	−2,300	+1,405	−2,00	−0,7025
$\frac{5\pi}{4}$	−0,798	−1,596	+0,332	−1,00	−0,166
$\frac{3\pi}{2}$	−0,447	−0,894	0	0	0
	$\cdot qr$		$\cdot qr^2$		

Observație. Dacă în expresiile (7.62) și (7.63) se face $\alpha = 0$, se obțin eforturile în grinda curbă plană rezemată vertical în A și B și încastrată la torsiune în A, încărcată cu sarcina q normală pe plan, ale cărei eforturi T', M_n' și M_t' sînt legate de eforturile de mai sus prin relațiile:

$$N = -T' \sin \alpha; \quad T_b = 0; \quad T_n = -T' \cos \alpha; \tag{7.64}$$

$$M_t = M_t' \cos \alpha; \quad M_n = M_n'; \quad M_b = -M_t' \sin \alpha.$$

Aplicația 110. Să se determine expresiile eforturilor într-o secțiune curentă a unei grinzi elicoidale încastrată perfect la capătul inferior A și liberă la capătul superior B, încărcată cu sarcina uniform repartizată pe metru de proiecție orizontală (fig. 460).

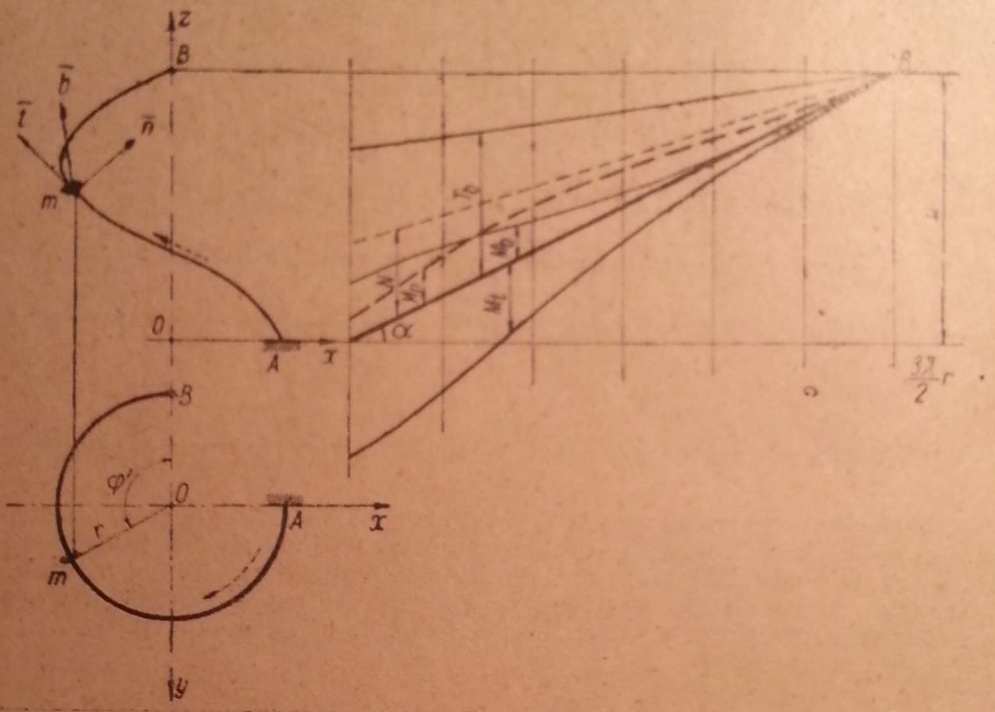


Fig. 460.

Răspuns. Dacă se notează cu φ' unghiul de la capătul liber B pînă la punctul curent m și se ține seamă că în felul acesta, pornind de la dreapta, eforturile într-o secțiune sînt date de expresiile (7.29′) și (7.30′), rezultă:

$$\overline{R} = \overline{P'} = -qr\varphi' \cdot \overline{k} = N \cdot \overline{t} + T_b \cdot \overline{n} + T_n \cdot \overline{b};$$

$$\overline{M} = \overline{a}_{mP'} \times \overline{P'} = -qr\varphi' \cdot \overline{a}_{mP'} \times \overline{k} = -M_t \cdot \overline{t} - M_n \cdot \overline{n} - M_b \cdot \overline{b},$$

se poate continua ca în aplicația precedentă, deoarece elementele geometrice sînt calculate.

Însă pe baza observației finale de la aplicația precedentă se pot obține eforturile și pe altă cale: se calculează întîi expresiile eforturilor în proiecția orizontală a elicei ca la o grindă curbă plană cu forțe normale pe plan, eforturi care se notează cu T', M_n', M_t'. Se obțin cu ușurință expresiile acestor eforturi pornind din capătul liber B:

$$T' = qr\varphi'; \quad M_n' = -qr^2(1-\cos\varphi'); \quad M_t' = qr^2(\varphi' - \sin\varphi').$$

Apoi, ținînd seamă de (7.64), se obțin eforturile în grinda elicoidală:

$$N = -qr\varphi' \cdot \sin\alpha; \quad T_b = 0; \quad T_n = -qr\varphi' \cdot \cos\alpha; \tag{7.65}$$

$$M_t = qr^2 \cos\alpha(\varphi' - \sin\varphi'); \quad M_n = -qr^2(1-\cos\varphi');$$

$$M_b = -qr^2 \cdot \sin\alpha(\varphi' - \sin\varphi').$$

Dacă se ia același unghi de înfășurare ca în aplicația precedentă $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ și se ține seamă că $\varphi' = \frac{3\pi}{2} - \varphi$, și luînd aceeași pantă α ($c = 0{,}5\ r$), se obțin eforturile din tabela 20.

Formulele (7.65) arată că M_t și M_b cresc necontenit cu mărirea unghiului de înfășurare φ', datorită factorului ($\varphi' - \sin\varphi'$), pe cînd M_n are o variație periodică.

Din compararea datelor din tabelele 19 și 20 rezultă că eforturile, în cazul grinzii elicoidale libere în capătul superior B, sînt mai mici decît în cazul rezemării simple verticale în B. Se propune să se găsească explicația acestor rezultate.

Tabela 20

φ	N	T_n	M_t	M_n	M_b
0	−2,110	−4,22	+5,110	−1,000	−2,555
$\frac{\pi}{4}$	−1,759	−3,518	+4,149	−1,707	−2,074
$\frac{\pi}{2}$	−1,405	−2,810	+2,810	−2,000	−1,405
$\frac{3\pi}{4}$	−1,053	−2,105	+1,475	−1,707	−0,738
π	−0,703	−1,406	+0,510	−1,000	−0,255
$\frac{5\pi}{4}$	−0,352	−0,704	+0,070	−0,293	−0,035
$\frac{3\pi}{2}$	0	0	0	0	0
	$\cdot\ qr$		$\cdot\ qr^2$		

BIBLIOGRAFIE FOLOSITĂ

Filipescu Gh. Em, „Statica Construcţiilor şi Rezistenţa Materialelor", Imprimeria Naţională, Bucureşti, 1935.

Prokofiev I. P., „Statica Construcţiilor", vol. I (tradus din limba rusă). O.P.E.D., C.F.R., Bucureşti, 1950.

Rabinovici I. M., „Curs de Mecanica Construcţiilor", vol. I, Stroiizdat. Moscova-Leningrad, 1950.

Rabinovici I. M., „Culegere de probleme de Teoria Construcţiilor", Stroiizdat, Moscova-Leningrad, 1950.

Darkov A. V. şi *Kuznețov V. I.*, „Statica Construcţiilor" Transjeldorizdat, Moscova, 1950.

Umanski A. A. „Sisteme spaţiale", Stroiizdat, Moscova, 1948.

Filonenko-Borodici şi alţii, „Curs de Rezistenţa Materialelor", vol. I şi II (tradus din limba rusă). Editura Tehnică, Bucureşti, 1951 şi 1952.

Timoşenko S., „Teoria Construcţiilor", Moscova, 1934 şi Paris, 1949.

Beyer Kurt, „Statica construcţiilor de beton armat, Berlin, 1933.

Müller-Breslau H., „Statica grafică a construcţiilor", vol. I. Leipzig, 1927.

Ioachimescu A. G., „Mecanica Raţională", Imprimeria Naţională, Bucureşti, 1947.

Beleş A. A. şi *Bălan Ştefan*, „Introducere în Mecanica Teoretică şi Aplicată", Imprimeria C.F.R., Bucureşti, 1942.

Gheorghiu Al. „Statica Construcţiilor, Partea I" (Curs litografiat), Institutul de construcţii, Bucureşti, 1950.

TABLA DE MATERII

Prefața 5

Generalități

Capitolul I. *Noțiuni generale și ipoteze de bază*
§ 1. Obiectul Staticii Construcțiilor 9
§ 2. Clasificarea elementelor de construcții și noțiunea de schemă de calcul . . 9
§ 3. Încărcări în construcții 9
§ 4. Ipoteze fundamentale 13
§ 5. Echilibru static și echilibru elastic 16
§ 6. Reazeme și reacțiuni 21
. 22

Sisteme static determinate

Capitolul II. *Metode generale de calcul* 29
§ 7. Secțiuni și eforturi 29
§ 8. Metode de calcul 33
§ 9. Analiza cinematică a sistemelor de solide cu grade de libertate 34
A. Determinarea gradelor de libertate ale sistemelor cinematice 34
B. Teoreme generale în analiza sistemelor cinematice 37
a) Cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit deplasări numai în planul sistemului. 40
b) Cinematica sistemelor plane cu grade de libertate care permit deplasări numai perpendicular pe planul sistemului 47
§ 10. Diagrame de eforturi 49
a) Calculul eforturilor pe cale analitică 50
b) Utilizarea deplasărilor virtuale pentru determinarea reacțiunilor și a eforturilor într-o secțiune 56
§ 11. Linii de influență 58
A. Determinarea liniilor de influență pe cale analitică 61
B. Determinarea liniilor de influență prin deplasări virtuale 62
C. Determinarea liniilor de influență cu ajutorul diagramei vitezelor (deplasărilor) 64
§ 12. Sisteme static determinate și static nedeterminate. 69

Sisteme static determinate plane

. 73
Capitolul III. *Grinzi drepte* 73
§ 13. Relații diferențiale la bare drepte 75
§ 14. Grinda simplu rezemată. Sarcini fixe 75
A. Diagrame de eforturi T și M pentru sarcini transmise direct 85
B. Diagrame de eforturi pe cale grafică pentru sarcini fixe, transmise direct 91
C. Sarcini transmise indirect. Diagrame de eforturi 93
Aplicațiile 1—9. 97
§ 15. Grinda simplu rezemată. Sarcini mobile 97
A. Linii de influență pentru sarcini transmise direct 97
a) Determinarea liniilor de influență pe cale analitică 99
b) Determinarea liniilor T_x și M_x prin deplasări virtuale 99

B. Linii de influenţă pentru sarcini transmise indirect 100
C. Forţa tăietoare maximă 100
a) Sarcini directe. Soluţie analitică 101
Aplicaţiile 10—11 101
b) Sarcini directe. Soluţie grafică 103
c) Sarcini indirecte. Soluţie analitică 106
d) Sarcini indirecte. Soluţie grafică 108
D. Momente încovoietoare maxime 109
a) Soluţie analitică 110
Aplicaţia 12 110
b) Soluţie grafică 111
E. Calculul eforturilor cu ajutorul sarcinilor echivalente 113
Aplicaţia 13 115
F. Moment încovoietor maximum maximorum 115
Aplicaţiile 14—17 116
§ 16. Grinzi încastrate şi grinzi cu console 117
A. Diagrame de eforturi 120
a) Grinzi încastrate. Soluţie analitică 120
b) Grinzi încastrate. Soluţie grafică 120
c) Grinzi cu console. Soluţie analitică 121
d) Grinzi cu console. Soluţie grafică 122
B. Linii de influenţă 125
a) Metoda analitică 126
b) Metoda deplasărilor virtuale 126
§ 17. Grinzi cu console şi articulaţii 127
a) Generalităţi 127
b) Calculul eforturilor pe cale analitică 127
c) Calculul eforturilor pe cale grafică 128
d) Linii de influenţă 129
Aplicaţiile 18—21 130
§ 18. Grinzi drepte cu reazeme şi forţe înclinate 132
Aplicaţiile 22—25 134
§ 19. Sisteme de grinzi drepte 137
A. Sisteme cu trei condiţii simple de rezemare 139
B. Sisteme cu mai mult decît trei condiţii simple de rezemare 139
C. Simetrie şi antisimetrie 142
Aplicaţiile 26—34 147
Capitolul IV. *Grinzi cu zăbrele (sisteme articulate)* 151
§ 20. Chestiuni generale 158
A. Definiţii 158
B. Condiţii de nedeformabilitate geometrică 158
C. Terminologie 159
§ 21. Determinarea eforturilor în bare 164
A. Metoda secţiunilor 165
a) Soluţia analitică 165
1. Grinzi cu tălpi paralele 165
2. Grinzi cu tălpi poligonale 165
b) Soluţia grafică 167
B. Metoda separării nodurilor 170
a) Soluţia analitică 171
b) Soluţia grafică 171
C. Metoda înlocuirii barelor 173
D. Metoda celor două secţiuni 177
E. Calculul eforturilor în sistemele compuse 179
F. Eforturile în bare cînd sarcinile se transmit între noduri 180
Aplicaţiile 35—43 185
§ 22. Linii de influenţă pe cale analitică 186
A. Sisteme simple 194
a) Grinzi cu tălpi paralele, sistem dreptunghiular 194
b) Grinzi cu tălpi paralele, sistem triunghiular 194
c) Grinzi cu tălpi poligonale 196
d) Grinzi cu diagonale în K 198
B. Sisteme compuse 203
203

§ 23. Eforturi maxime în bare 208
Aplicaţiile 44—51 211
§ 24. Linii de influenţă prin deplasări virtuale 221
A. Noţiuni generale 221
B. Grinzi cu tălpi poligonale 222
C. Grinzi cu tălpi paralele 227
D. Un alt exemplu pentru deplasări virtuale 229
Aplicaţiile 52—57 232
§ 25. Metoda diagramei vitezelor (deplasărilor) 237
a) Grinzi cu zăbrele simple 237
b) Sisteme complexe 240
c) Grinzi cu zăbrele, sistem dublu dreptunghiular 244
d) Grinzi cu zăbrele, sistem dublu triunghiular 246
e) Grinzi sistem dublu triunghiular cu tălpi poligonale 249
f) Construcţii ajutătoare prin metoda poziţiilor false 250
Aplicaţiile 58 şi 59 253
§ 26. Grinzi cu zăbrele static determinate, cu mai mult decît trei condiţii simple de rezemare 253
§ 27. Forme critice 261
A. Metode analitice 262
B. Metode cinematice 264
a) Folosirea centrelor instantanee 264
b) Folosirea diagramei deplasărilor (vitezelor) 267
Aplicaţiile 60 şi 61 269
§ 28. Influenţa formei grinzii asupra eforturilor în bare 272
Capitolul V. *Arce (sisteme cu împingeri)* 285
§ 29. Chestiuni generale 285
§ 30. Relaţii diferenţiale 288
§ 31. Arcul cu trei articulaţii. Încărcări fixe 290
A. Reacţiuni şi eforturi pe cale analitică 290
a) Încărcări oarecare 290
b) Încărcări verticale 293
B. Reacţiuni şi eforturi pe cale grafică 296
a) Încărcări oarecare 296
b) Încărcări verticale. Forţe paralele 301
C. Arce cu axă raţională pentru eforturi 304
Aplicaţiile 62—71 316
§ 32. Linii de influenţă la arcul cu trei articulaţii 327
A. Metoda analitică 327
a) Liniile de influenţă ale reacţiunilor 327
b) Liniile de influenţă ale eforturilor 327
B. Metoda deplasărilor virtuale 330
a) Liniile de influenţă ale reacţiunilor cu ajutorul centrelor instantanee 331
b) Liniile de influenţă ale eforturilor cu ajutorul centrelor instantanee 335
c) Linii de influenţă prin diagrama vitezelor (deplasărilor) 341
C. Linii de influenţă ale momentelor la limitele sîmburelui central 342
Aplicaţia 72 346
§ 33. Arce cu o articulaţie şi un reazem simplu 352
A. Reacţiuni şi eforturi din încărcări fixe 352
B. Linii de influenţă 354
a) Metoda analitică 354
b) Metoda deplasărilor virtuale 357
§ 34. Arc cu trei articulaţii şi tirant 360
§ 35. Arce cu trei articulaţii şi console 362
A. Încărcări fixe 363
B. Linii de influenţă 363
a) Metoda analitică 363
b) Metoda deplasărilor virtuale 365
Aplicaţiile 73—78 371
§ 36. Arce cu zăbrele 371
A. Încărcări fixe 372
B. Linii de influenţă 375
Aplicaţiile 79 şi 80 . . . . . .